Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s1journaldemat18liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE MALLET-BACHELIER,
rue du Jardinet, n° 12.

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

OU

RECUEIL MENSUEL

DE MÉMOIRES SUR LES DIVERSES PARTIES DES MATHÉMATIQUES;

Publié

PAR JOSEPH LIOUVILLE,
Membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes.

TOME XVIII. — ANNÉE 1853.

PARIS,

MALLET-BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DU BUREAU DES LONGITUDES,
QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

1853

QA
1
J684
t.18
20774
c.

TABLE DES MATIÈRES,

TOME XVIII.

Pages.

Mémoire sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la théorie des courbes à double courbure; par M. *J.-A. Serret*. 1

Théorie des cônes circulaires roulants; par M. *Poinsot*. 41

Sur l'équation aux différences partielles

$$\frac{d^2 \log \lambda}{du\, dv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0;$$

par M. *J. Liouville*. 71

Résolution des équations biquadratiques

$$(1)\ (2)\ z^2 = x^4 \pm 2^m y^4, \qquad (3)\ z^2 = 2^m x^4 - y^4, \qquad (4)\ (5)\ 2^n z^2 = x^4 \pm y^4;$$

par M. *Lebesgue*. 73

Sur l'intégration des différentielles irrationnelles; par M. *P. Tchebichef*. . . . 87

Sur une transformation d'intégrales définies; par M. *Besge*. 112

Mémoire sur les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes ou sphériques; par M. *J.-A. Serret*. 113

Sur la surface dont la courbure moyenne est constante; par M. *J.-H. Jellett*. . . 163

Addition à la Note sur une transformation d'intégrales définies, insérée dans le cahier de mars; par M. *Besge*. 168

Théorie analytique des moindres carrés; par M. *P.-E. Biver*. 169

Règles de convergence des séries et des intégrales définies qui contiennent un facteur périodique; par le P. *J. Chartier*, S. J. 201

Des mouvements relatifs en général, et spécialement des mouvements relatifs sur la Terre; par M. *Quet*. 213

PAGES.

Remarques sur les differences qui distinguent l'interpolation de M. Cauchy de la methode des moindres carres, et qui assurent la superiorite de cette methode, par M. *Jules Bienaymé* 299

Extraits de deux Memoires sur les proprietes generales et la dependance mutuelle des courbes algébriques; par M. *Steiner*. — Traduit de l'allemand par M. *Woepcke* 300

Theorie generale des effets dynamiques de la chaleur; par M. *F. Reech*. . . 357

PLANCHES.

Planche I. — Memoire de M. Poisson, page 41.

Planche II. — Mémoire de M. F. Reech, page 357.

ERRATUM.

Page	Ligne			
108.	2,	*au lieu de*	par suite, du,	*lisez* par suite du

JOURNAL
DE MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES.

MÉMOIRE

Sur une classe d'équations différentielles simultanées qui se rattachent à la théorie des courbes à double courbure;

PAR M. J.-A. SERRET.

(Présenté à l'Académie des Sciences, le 12 juillet 1852.)

Diverses questions de géométrie, et particulièrement un grand nombre de celles qui se rattachent à la théorie des courbes à double courbure, se ramènent à l'intégration de certains systèmes d'équations différentielles simultanées à trois variables qui ont un caractère remarquable. Les systèmes dont il s'agit sont formés de deux équations entre plusieurs fonctions de trois variables et de leurs différentielles jusqu'à celles d'un certain ordre quelconque; ces fonctions sont telles, qu'étant égalées à des constantes arbitraires, les équations qui en résultent se réduisent, après la différentiation, à une ou au plus à deux équations différentielles distinctes.

Dans le premier cas, celui où les équations dont nous parlons se réduisent à une seule, le système des équations proposées n'a point, à proprement parler, d'intégrale; il se réduit en quelque sorte à une équation unique et admet, par suite, une solution qui renferme une fonction arbitraire. Mais, outre cette solution si générale, il en existe une autre à laquelle on peut justement donner le nom de solu-

tion particulière et qui renferme un moindre nombre de constantes arbitraires qu'il n'y en a, en général, dans l'intégrale d'un système de même ordre que le proposé. Cette solution particulière donne presque toujours la véritable solution de la question qui a conduit aux équations différentielles proposées. On en a un exemple dans le problème qui a pour objet de trouver une courbe dont les centres des sphères osculatrices soient situées sur une courbe donnée. On satisfait effectivement à la question en prenant une courbe tracée à volonté sur une sphère de rayon arbitraire et qui aurait son centre en un point quelconque de la courbe donnée; mais on y satisfait aussi par le moyen d'une courbe non sphérique et dont les équations renferment deux constantes arbitraires.

Le deuxième cas conduit à des résultats différents. Les équations proposées admettent une intégrale et une solution particulière qui renferme généralement une constante arbitraire de moins que l'intégrale, et qui donne presque toujours la vraie solution du problème qui a conduit aux équations différentielles proposées. On a un exemple de ce deuxième cas dans le problème qui a pour but de trouver une courbe dont les centres de courbure soient sur une courbe donnée, plane ou à double courbure. On satisfait évidemment au problème en prenant un cercle dont le rayon et le plan soient arbitraires, et dont le centre soit en un point quelconque de la courbe donnée. Les équations de ce cercle renferment quatre constantes arbitraires et forment l'intégrale générale des équations différentielles du problème auquel on satisfait aussi par le moyen d'autres courbes dont les équations peuvent contenir trois constantes arbitraires au plus.

Lagrange est, je crois, le premier qui ait considéré des équations différentielles à deux variables formées avec deux ou plusieurs fonctions de ces variables et de leurs différentielles qui, égalées à des constantes arbitraires, fournissent autant d'intégrales d'une même équation. Dans une Note que j'ai publiée à la suite de la *Théorie des Fonctions analytiques* (troisième édition), j'ai ajouté quelques développements à l'analyse de Lagrange, et les considérations dont j'ai fait usage ont été le point de départ des recherches nouvelles que j'ai l'honneur de présenter aujourd'hui à l'Académie.

Ce Mémoire est composé de deux parties. La première partie renferme l'analyse générale des équations différentielles dont il a été parlé plus haut, avec plusieurs applications de la théorie. Dans la seconde partie, j'étudie les détails que présente la solution des deux problèmes principaux qui m'ont conduit à entreprendre les recherches actuelles. On y verra une application remarquable des formules dont j'ai fait usage dans plusieurs Mémoires, et, en particulier, dans celui que j'ai publié au tome XVI du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

PREMIÈRE PARTIE.

I.

Soient

$$x,\ y,\ z,$$

trois variables dont l'une peut être supposée indépendante, les deux autres étant alors des fonctions inconnues de celle-là. Soient

$$\varphi,\ \psi,\ \varpi,\ldots,\ \chi,$$

μ fonctions de x, y, z et de leurs différentielles jusqu'à l'ordre n inclusivement, telles que les équations

$$(1)\qquad \varphi = a,\quad \psi = b,\quad \varpi = c,\ldots,\quad \chi = k,$$

où a, b, c,..., k désignent μ constantes arbitraires, satisfassent à la même équation différentielle d'ordre $n+1$,

$$(2)\qquad \Omega = 0.$$

Cette circonstance aura lieu évidemment si les rapports des différentielles $d\varphi$, $d\psi$, $d\varpi$, ..., $d\chi$ à l'une d'entre elles ne contiennent les différentielles de x, y, z que jusqu'à l'ordre n. Soient enfin f et F deux fonctions données, et considérons les deux équations simultanées

$$(3)\qquad \begin{cases} f(\varphi,\ \psi,\ \varpi,\ldots,\ \chi) = 0, \\ F(\varphi,\ \psi,\ \varpi,\ldots,\ \chi) = 0. \end{cases}$$

Ces équations n'ont pas, à proprement parler, d'intégrale. En effet,

prenons x pour variable indépendante; si les équations (3) admettaient une intégrale, on pourrait en tirer les valeurs de $d^n y$ et de $d^n z$; par suite, les équations obtenues en différentiant les équations (3), feraient connaître $d^{n+1} y$ et $d^{n+1} z$. Mais cela n'a pas lieu, puisque les premiers membres des équations dont il s'agit s'obtiennent en multipliant la même quantité Ω par des fonctions qui ne contiennent les différentielles de y et de z que jusqu'à l'ordre n.

Cela posé, il est évident que les équations (3) seront satisfaites en même temps que les équations (1), pourvu que, dans ces dernières, on considère les quantités $a, b, c, \ldots, k$ comme assujetties à vérifier les deux équations

$$(4) \qquad \begin{cases} f(a, b, c, \ldots, k) = 0, \\ F(a, b, c, \ldots, k) = 0; \end{cases}$$

or on peut satisfaire aux équations (1) de deux manières tres-différentes : 1° en supposant les quantités $a, b, c, \ldots, k$ constantes; 2° en supposant ces mêmes quantités variables.

Je dis d'abord que l'équation obtenue en éliminant entre les équations (1) les $\mu - 1$ différentielles

$$d^n y, \quad d^{n-1} y, \ldots, \quad d^{n-\mu+2} y.$$

ne contiendra pas non plus les différentielles

$$d^n z, \quad d^{n-1} z, \ldots, \quad d^{n-\mu+2} z.$$

Considérons z comme une fonction donnée, quoique arbitraire, de la variable indépendante x, et $a, b, c, \ldots, k$ comme des constantes arbitraires. Alors l'équation (2) sera une équation différentielle à deux variables x et y seulement, et il est clair que les équations (1) en seront μ intégrales premières; ce qui montre, en premier lieu, que μ doit être au plus égal à $n + 1$. En second lieu, l'équation

$$(5) \qquad H = 0,$$

obtenue en éliminant

$$d^n y, \quad d^{n-1} y, \ldots, \quad d^{n-\mu+2} y,$$

entre les équations (1), sera une intégrale d'ordre μ de l'équation (2) : par conséquent, d'après la théorie des constantes arbitraires, le système des équations (1) sera équivalent à celui formé de l'équation (5) et de ses $\mu - 1$ premières différentielles, c'est-à-dire au système

$$(6) \qquad \Pi = 0, \quad d\Pi = 0, \quad d^2\Pi = 0, \ldots, \quad d^{\mu-1}\Pi = 0.$$

Il résulte de là que l'équation (5) ne peut contenir les différentielles

$$d^n z, \quad d^{n-1} z, \ldots, \quad d^{n-\mu+2} z.$$

Si, en effet, l'équation (5) contenait les différentielles de z de l'ordre $n - \mu + 2$ ou des ordres supérieurs, les équations (6) en contiendraient d'ordres supérieurs à n, et elles ne pourraient plus dès lors former un système équivalent au système (1).

On voit par là qu'on satisfera aux équations proposées (3) si l'on satisfait à la seule équation (5), qui est seulement de l'ordre $n - \mu + 1$ par rapport à y et par rapport à z, pourvu toutefois que l'on considère $a, b, c, \ldots, k$ comme des constantes assujetties à vérifier les équations (4). On pourra donc prendre pour z une fonction quelconque de x, ou, plus généralement, établir entre x, y, z telle relation que l'on voudra. A l'aide de cette relation, on pourra réduire l'équation (5) à ne plus contenir que deux variables, et, en l'intégrant, on aura un résultat renfermant $n - \mu + 1$ nouvelles constantes; ce qui, avec les $\mu - 2$ qui restent arbitraires parmi $a, b, c, \ldots, k$, fera en tout $n - 1$ constantes arbitraires.

Maintenant, il est évident qu'on satisfera encore aux équations (3) si l'on satisfait à l'équation (5), où $a, b, c, \ldots, k$ seront considérées comme variables, pourvu que les équations (6) équivalentes aux équations (1) demeurent les mêmes dans le cas de $a, b, c, \ldots$, variables que dans le cas de $a, b, c, \ldots$, constantes. Pour plus de clarté, nous emploierons exclusivement la caractéristique d pour désigner les différentielles dans l'hypothèse de $a, b, c, \ldots, k$ constantes, et nous dénoterons par δ les différentielles relatives à $a, b, c, \ldots, k$.

D'après cela, en différentiant l'équation

$$\Pi = 0$$

dans l'hypothèse de a, b, c,..., variables, on trouve

$$d\Pi + \delta\Pi = 0,$$

et l'on voit que, pour avoir

$$d\Pi = 0,$$

il faut poser

$$\delta\Pi = 0.$$

En différentiant de même l'équation

$$d\Pi = 0,$$

on trouve

$$d^2\Pi + \delta d\Pi = 0;$$

par suite, puisqu'on veut avoir

$$d^2\Pi = 0,$$

il faut poser

$$\delta d\Pi = 0;$$

en poursuivant ce raisonnement, on voit que les conditions pour que les équations (6) aient lieu dans le cas de a, b, c,..., variables, sont

$$\delta\Pi = 0, \quad \delta d\Pi = 0, \quad \delta d^2\Pi = 0, \ldots, \quad \delta d^{\mu-2}\Pi = 0.$$

En d'autres termes, on satisfera aux équations proposées (3) si l'on satisfait aux μ équations

$$(7) \qquad \Pi = 0, \quad \delta\Pi = 0, \quad \delta d\Pi = 0, \ldots, \quad \delta d^{\mu-2}\Pi = 0,$$

et qu'on regarde les quantités a, b, c,..., k actuellement variables comme étant toujours assujetties à vérifier les équations (4). Les équations (7) jointes aux équations (4) formeront un système de $\mu + 2$ équations entre les $\mu + 3$ variables

$$x, \ y, \ z, \quad a, \ b, \ c, \ldots, \ k;$$

ce système admettra donc, en général, une intégrale qui formera une solution parfaitement déterminée des équations (3).

On peut mettre les équations (7) sous une forme qui sera souvent plus commode. Différentions, en effet, chacune de ces équations à

partir de la deuxième et jusqu'à l'avant-dernière. On aura, en observant qu'on peut intervertir l'ordre des différentiations par d et par δ,

$$\delta d\Pi + \delta^2\Pi = 0, \quad \delta d^2\Pi + \delta^2 d\Pi = 0, \quad \ldots \quad \delta d^{\nu-2}\Pi + \delta^2 d^{\nu-3}\Pi = 0;$$

d'où il suit que le système (7) peut être remplacé par le suivant :

$$\Pi = 0, \quad \delta\Pi = 0, \quad \delta^2\Pi = 0, \quad \delta^2 d\Pi = 0, \ldots, \quad \delta^2 d^{\nu-1}\Pi = 0;$$

opérant sur ce système comme sur le système (7) et continuant ainsi, on remplacera partout la caractéristique d par la δ, et l'on formera le nouveau système équivalent à (7), savoir

$$(8) \qquad \Pi = 0, \quad \delta\Pi = 0, \quad \delta^2\Pi = 0, \ldots, \quad \delta^{\nu-1}\Pi = 0,$$

qui ne contient les différentielles de y et de z que jusqu'à l'ordre $n - \mu + 1$.

II.

Comme application de la théorie précédente, proposons-nous de trouver la courbe dont les sphères osculatrices ont leurs centres sur une courbe donnée.

Désignons par x, y, z les coordonnées rectangulaires de la courbe cherchée; par ds la différentielle de l'arc de cette courbe; par ρ le rayon de courbure; par r le rayon de torsion; par ξ, υ, ζ; λ, μ, ν les angles formés respectivement avec les axes par la normale principale et par l'axe du plan osculateur; enfin par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de la sphère osculatrice. On a [*]

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = x + \rho\cos\xi - r\dfrac{d\rho}{ds}\cos\lambda, \\ y_1 = y + \rho\cos\upsilon - r\dfrac{d\rho}{ds}\cos\mu, \\ z_1 = z + \rho\cos\zeta - r\dfrac{d\rho}{ds}\cos\nu. \end{cases}$$

[*] *Voir* le Mémoire que j'ai publié au tome XVI du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

On pourrait exprimer aisément x_1, y_1, z_1 en fonction de x, y, z et de leurs différentielles; mais ces expressions, qui sont très-compliquées, ne nous sont pas nécessaires; il suffit, pour notre objet, de remarquer qu'elles renfermeraient les différentielles des coordonnées jusqu'au troisième ordre. D'après l'énoncé de la question, les coordonnées x_1, y_1, z_1 qui appartiennent à un point de la courbe donnée devront vérifier les équations de cette courbe, savoir

$$(2)\quad \begin{cases} f(x_1, y_1, z_1) = 0, \\ F(x_1, y_1, z_1) = 0. \end{cases}$$

En substituant à x_1, y_1, z_1 leurs valeurs, ces équations (2) deviendront des équations différentielles du troisième ordre dont il faut trouver les solutions. Or je dis que ces équations appartiennent à la classe de celles dont il a été question au paragraphe précédent. En effet, des équations (1) on déduit (*voir* le Mémoire cité plus haut)

$$dx_1 = -\left[\frac{\rho}{r}ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\lambda,$$

$$dy_1 = -\left[\frac{\rho}{r}ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\mu,$$

$$dz_1 = -\left[\frac{\rho}{r}ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\nu,$$

en sorte qu'en différentiant les équations

$$x_1 = \text{constante}, \quad y_1 = \text{constante}, \quad z_1 = \text{constante},$$

on trouve l'équation unique

$$\frac{\rho}{r}ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right) = 0.$$

Cela posé, d'après l'analyse exposée au paragraphe précédent, il est possible d'éliminer entre les équations (1) les différentielles du deuxième et du troisième ordre. Cette élimination se fait immédiatement, en ajoutant les équations (1) après les avoir multipliées par dx, dy, dz respectivement; on obtient ainsi

$$(3)\qquad (x - x_1)\,dx + (y - y_1)\,dy + (z - z_1)\,dz = 0.$$

En considérant x_1, y_1, z_1 comme des constantes liées par les équations (2), cette équation (3) fera connaître la solution générale de notre problème. Intégrant donc, dans l'hypothèse de x_1, y_1, z_1 constantes, il vient

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \text{constante};$$

d'où il suit que si l'on conçoit une surface sphérique de rayon arbitraire, et dont le centre soit en un point quelconque de la courbe donnée, puis que l'on trace sur cette sphère une courbe quelconque, cette courbe satsifera au problème. Cette solution est évidente à priori.

Mais pour avoir la solution particulière, qui est ici la vraie solution, il faut, conformément à notre théorie, joindre à l'équation (3) ses deux premières différentielles par rapport à x_1, y_1, z_1, considérées comme seules variables. On obtient ainsi le système

$$\left\{\begin{aligned} &(x - x_1)\,dx + (y - y_1)\,dy + (z - z_1)\,dz = 0,\\ &dx_1\,dx + dy_1\,dy + dz_1\,dz = 0.\\ &d^2x_1\,dx + d^2y_1\,dy + d^2z_1\,dz = 0,\end{aligned}\right.$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{dx}{dy_1\,d^2z_1 - dz_1\,d^2y_1} = \frac{dy}{dz_1\,d^2x_1 - dx_1\,d^2z_1} = \frac{dz}{dx_1\,d^2y_1 - dy_1\,d^2x_1},\\ &(dy_1\,d^2z_1 - dz_1\,d^2y_1)(x - x_1) + (dz_1\,d^2x_1 - dx_1\,d^2z_1)(y - y_1\\ &\qquad + (dx_1\,d^2y_1 - dy_1\,d^2x_1)(z - z_1) = 0.\end{aligned}\right.$$

On peut chasser y_1 et z_1 à l'aide des équations (2), puis tirer ensuite la valeur de x_1 de la dernière équation (4) pour la porter dans les autres; on obtiendra ainsi un système de deux équations différentielles du premier ordre entre x, y, z. L'intégration de celles-ci amenera deux constantes arbitraires seulement.

Il est bon de remarquer qu'on arrive immédiatement à poser les équations (4), si l'on considère la courbe cherchée comme une trajectoire orthogonale des plans osculateurs de la courbe donnée.

III.

Soient, comme précédemment,

$$x, \quad y, \quad z,$$

trois variables dont la première x sera supposée indépendante; les deux autres seront alors des fonctions de x. Soient

$$\varphi, \quad \psi, \quad \varpi, \ldots, \quad \chi,$$

μ fonctions de x, y, z, et de leurs différentielles jusqu'à l'ordre n inclusivement, telles que les équations

$$(1) \qquad \varphi = a, \quad \psi = b, \quad \varpi = c, \ldots, \quad \chi = k,$$

où $a, b, c, \ldots, k$ désignent μ constantes arbitraires, satisfassent aux deux équations d'ordre $n+1$

$$(2) \qquad \Omega = 0, \quad \Omega_1 = 0,$$

mais ne se réduisent pas toutes, par la différentiation, à une seule des équations précédentes, comme dans le cas que nous avons traité au § I. L'hypothèse où nous nous plaçons sera réalisée si chacune des différentielles $d\varphi$, $d\psi$, $d\varpi, \ldots$, $d\chi$ s'obtient en ajoutant les quantités Ω, Ω_1, respectivement multipliées par des facteurs qui ne contiennent les différentielles de y et de z que jusqu'à l'ordre n. Soient enfin f et F deux fonctions données, et considérons les deux équations simultanées

$$(3) \qquad \begin{cases} f(\varphi, \psi, \varpi, \ldots, \chi) = 0, \\ F(\varphi, \psi, \varpi, \ldots, \chi) = 0. \end{cases}$$

Il est évident que ces équations (3) seront satisfaites en même temps que les équations (1), pourvu que, dans ces dernières, on considère les quantités $a, b, c, \ldots, k$ comme assujetties à vérifier les deux équations

$$(4) \qquad \begin{cases} f(a, b, c, \ldots, k) = 0, \\ F(a, b, c, \ldots, k) = 0. \end{cases}$$

Or on peut satisfaire aux équations (1) de deux manières: 1° en suppo-

sant a, b, c,..., k constantes; 2° en considérant ces mêmes quantités comme variables.

Pour satisfaire aux équations (1) dans l'hypothèse de a, b, c,.... k constantes, il est clair qu'il suffit d'achever l'intégration des équations (2) dont les équations (1) forment déjà μ intégrales, puis d'éliminer du résultat toutes les différentielles. La solution ainsi obtenue renfermera $2n$ constantes arbitraires, et formera en conséquence l'intégrale générale du système (3). On arrivera encore au même résultat en éliminant des équations (1) $\mu - 2$ différentielles parmi les plus hautes de y ou de z, ou de l'une et l'autre variables, puis intégrant ensuite le système des équations

$$\Pi = 0, \quad \Pi_1 = 0, \tag{5}$$

résultant de cette élimination. Il est bon de remarquer que les équations (5) peuvent admettre une solution particulière outre leur intégrale, et qu'à cette solution particulière peut correspondre une solution particulière des équations (3). On en verra un exemple dans la suite de ce Mémoire; mais la solution particulière qu'il importe surtout de remarquer est celle que l'on obtient en considérant a, b, c, ... k comme variables, et dont nous allons nous occuper.

D'après la théorie des équations différentielles, le système (5) est, en général, équivalent au système (1), dans l'hypothèse de a, b, c, ... k constantes, en ce sens qu'on pourra retrouver les équations (1) en combinant les équations (5) avec celles qu'on en déduit par une ou plusieurs différentiations. Si donc ces dernières équations sont les mêmes dans le cas de a, b, c,..., k variables que dans le cas de a, b, c,...., k constantes, les équations (5) continueront de fournir une solution des équations (3). Pour qu'il en soit ainsi, il faudra satisfaire à un nombre d'équations de condition égal au nombre des différentielles qu'on aura éliminées des équations (1) pour former les équations (5), c'est-à-dire égal à $\mu - 2$. Ces $\mu - 2$ équations, jointes aux équations (4) et (5), formeront un système de $\mu + 2$ équations entre les $\mu + 3$ variables

$$x, \quad y, \quad z, \quad a, \quad b, \quad c, \ldots, \quad k.$$

dont l'intégrale sera la solution particulière des équations (3). Nous allons entrer à ce sujet dans quelques détails.

Si μ est pair, on pourra éliminer des équations (1) les différentielles de y et de z à partir de l'ordre $n - \frac{\mu}{2} + 2$; on peut donc supposer que les équations (5) ne soient que de l'ordre $n - \frac{\mu}{2} + 1$, tant par rapport à y que par rapport à z. Si, au contraire, μ est impair, on pourra éliminer des équations (1) les différentielles de y et de z à partir de l'ordre $n - \frac{\mu - 1}{2} + 1$ pour l'une des variables, et à partir de l'ordre $n - \frac{\mu - 1}{2} + 2$ pour l'autre; on peut donc supposer que la première équation (5) soit de l'ordre $n - \frac{\mu - 1}{2}$ par rapport à chaque variable, et que la deuxième soit de ce même ordre par rapport à une des variables, mais de l'ordre immédiatement supérieur par rapport à l'autre variable. Cela posé, il est évident que, dans le cas de a, b, c,..., constantes, les équations, qu'il faut joindre aux équations (5) pour former un système équivalent au système (1), sont

$$(6)\qquad \begin{cases} d\Pi = 0, \quad d^2\Pi = 0, \ldots, \quad d^{\frac{\mu}{2}-1}\Pi = 0, \\ d\Pi_1 = 0, \quad d^2\Pi_1 = 0, \ldots, \quad d^{\frac{\mu}{2}-1}\Pi_1 = 0, \end{cases}$$

dans le cas de μ pair, et

$$(6')\qquad \begin{cases} d\Pi = 0, \quad d^2\Pi = 0, \ldots, \quad d^{\frac{\mu+1}{2}-1}\Pi = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d\Pi_1 = 0, \quad d^2\Pi_1 = 0, \ldots, \quad d^{\frac{\mu-1}{2}-1}\Pi_1 = 0, \end{cases}$$

dans le cas de μ impair. Il faut donc, pour avoir la solution particulière des équations (3), exprimer que les équations (6) ou (6') sont les mêmes dans le cas de a, b, c,..., variables que dans le cas de a, b, c,..., constantes. Or, si l'on dénote par la caractéristique δ les différentielles relatives à a, b, c,..., considérées comme seules variables et que l'on réserve la d pour désigner les différentielles prises comme

si a, b, c,..., étaient constantes, on trouvera, par le raisonnement employé au § I, que les conditions demandées sont

$$(7)\qquad \begin{cases} \partial\Pi = 0, \quad \partial d\Pi = 0, \ldots, \quad \partial d^{\frac{\mu}{2}-2}\Pi = 0, \\ \partial\Pi_1 = 0, \quad \partial d\Pi_1 = 0, \ldots, \quad \partial d^{\frac{\mu}{2}-2}\Pi_1 = 0, \end{cases}$$

dans le cas de μ pair, et

$$(7')\qquad \begin{cases} \partial\Pi = 0, \quad \partial d\Pi = 0, \ldots, \quad \partial d^{\frac{\mu+1}{2}-2}\Pi = 0, \\ \partial\Pi_1 = 0, \quad \partial d\Pi_1 = 0, \ldots, \quad \partial d^{\frac{\mu-1}{2}-2}\Pi_1 = 0, \end{cases}$$

dans le cas de μ impair.

On voit aussi, à l'aide du raisonnement déjà employé, qu'on peut, si on le juge à propos, remplacer partout la d par la ∂, et prendre en conséquence

$$(8)\qquad \begin{cases} \partial\Pi = 0, \quad \partial^2\Pi = 0, \ldots, \quad \partial^{\frac{\mu}{2}-1}\Pi = 0, \\ \partial\Pi_1 = 0, \quad \partial^2\Pi_1 = 0, \ldots, \quad \partial^{\frac{\mu}{2}-1}\Pi_1 = 0, \end{cases}$$

dans le cas de μ pair, et

$$(8')\qquad \begin{cases} \partial\Pi = 0, \ \partial^2\Pi = 0, \ldots, \ \partial^{\frac{\mu-1}{2}-1}\Pi = 0, \ \partial^{\frac{\mu-1}{2}}\Pi = 0, \\ \partial\Pi_1 = 0, \ \partial^2\Pi_1 = 0, \ldots, \ \partial^{\frac{\mu-1}{2}-1}\Pi_1 = 0, \end{cases}$$

dans le cas de μ impair.

Le système formé par les équations (8) ou (8') jointes aux équations (4) et (5) fera connaître la solution particulière cherchée.

Dans le cas de $\mu = 3$, les équations (8') se réduisent à l'équation unique

$$\partial\Pi = 0,$$

comme cela doit être, ainsi qu'on s'en assure en traitant à part ce cas

particulier. Dans le cas de $\mu = 4$, les équations (8) se réduisent aux deux

$$\delta\Pi = 0, \quad \delta\Pi_1 = 0.$$

IV.

On peut former les équations

$$\delta\Pi = 0, \quad \delta\Pi_1 = 0, \ldots,$$

sans faire l'élimination qui conduit aux équations

$$\Pi = 0, \quad \Pi_1 = 0.$$

Nous nous bornerons aux cas de $\mu = 3$ et $\mu = 4$.

Soient, en premier lieu, les équations

$$(1) \quad \begin{cases} f(\varphi, \psi, \varpi) = 0, \\ F(\varphi, \psi, \varpi) = 0; \end{cases}$$

φ, ψ, ϖ étant des fonctions de x, y, z et de leurs différentielles jusqu'à l'ordre n, telles que

$$(2) \quad \varphi = a, \quad \psi = b, \quad \varpi = c;$$

soient trois intégrales du système

$$(3) \quad \Omega = 0, \quad \Omega_1 = 0.$$

Prenons x pour variable indépendante et posons

$$d^n y = p\,dx^n, \quad d^n z = q\,dx^n;$$

il est clair que l'équation dont nous avons besoin s'obtiendra en portant dans la première équation (2) les valeurs de p et q tirées des deux autres, puis en différentiant le résultat par rapport aux seules quantités a, b, c; par conséquent, cette équation s'obtiendra aussi en différentiant les trois équations (2) par rapport à p, q, a, b, c et éliminant

dp et dq du résultat. En opérant ainsi, on trouve

$$\frac{d\varphi}{dp}dp + \frac{d\varphi}{dq}dq = da,$$

$$\frac{d\psi}{dp}dp + \frac{d\psi}{dq}dq = db,$$

$$\frac{d\varpi}{dp}dp + \frac{d\varpi}{dq}dq = dc;$$

d'où, en éliminant dp et dq,

$$(4)\quad \left(\frac{d\psi}{dp}\frac{d\varpi}{dq} - \frac{d\psi}{dq}\frac{d\varpi}{dp}\right)da + \left(\frac{d\varpi}{dp}\frac{d\varphi}{dq} - \frac{d\varpi}{dq}\frac{d\varphi}{dp}\right)db + \left(\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\psi}{dq} - \frac{d\varphi}{dq}\frac{d\psi}{dp}\right)dc = 0.$$

Cela posé, si l'on élimine p ou q entre les équations (2) et (4), on aura trois équations qui, jointes à

$$f(a, b, c) = 0,$$
$$F(a, b, c) = 0,$$

composeront le système qui fournit la solution particulière des équations (1).

Soient, en second lieu, les équations

$$(1)\quad \begin{cases} f(\varphi, \psi, \varpi, \chi) = 0, \\ F(\varphi, \psi, \varpi, \chi) = 0; \end{cases}$$

φ, ψ, ϖ, χ étant des fonctions de x, y, z et de leurs différentielles jusqu'à l'ordre n, telles que

$$(2)\qquad \varphi = a, \quad \psi = b, \quad \varpi = c, \quad \chi = e;$$

soient quatre intégrales du système

$$(3)\qquad \Omega = 0, \quad \Omega_1 = 0.$$

Prenons toujours x pour variable indépendante, et posons comme précédemment

$$d^n y = p\,dx^n, \quad d^n z = q\,dx^n;$$

les deux équations que nous cherchons s'obtiendront en remplaçant, dans les deux premières équations (2), p et q par leurs valeurs tirées des

deux autres, puis en différentiant ensuite les résultats par rapport à a, b, c, e; d'où il suit que les mêmes équations s'obtiendront aussi en éliminant dp et dq des quatre suivantes :

$$\frac{d\varphi}{dp}dp + \frac{d\varphi}{dq}dq = da,$$
$$\frac{d\psi}{dp}dp + \frac{d\psi}{dq}dq = db,$$
$$\frac{d\varpi}{dp}dp + \frac{d\varpi}{dq}dq = dc,$$
$$\frac{d\chi}{dp}dp + \frac{d\chi}{dq}dq = de.$$

On obtient ainsi

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\left(\frac{d\psi}{dp}\frac{d\varpi}{dq} - \frac{d\psi}{dq}\frac{d\varpi}{dp}\right)da + \left(\frac{d\varpi}{dp}\frac{d\varphi}{dq} - \frac{d\varpi}{dq}\frac{d\varphi}{dp}\right)db + \left(\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\psi}{dq} - \frac{d\varphi}{dq}\frac{d\psi}{dp}\right)dc = 0,\\ &\left(\frac{d\psi}{dp}\frac{d\chi}{dq} - \frac{d\psi}{dq}\frac{d\chi}{dp}\right)da + \left(\frac{d\chi}{dp}\frac{d\varphi}{dq} - \frac{d\chi}{dq}\frac{d\varphi}{dp}\right)dc + \left(\frac{d\varphi}{dp}\frac{d\psi}{dq} - \frac{d\varphi}{dq}\frac{d\psi}{dp}\right)de = 0.\end{aligned}\right.$$

Cela posé, si l'on élimine p et q entre les équations (2) et (4), on aura quatre équations qui, jointes aux deux

$$f(a, b, c, e) = 0,$$
$$F(a, b, c, e) = 0,$$

composeront le système qui donne la solution particulière des équations proposées.

V.

Comme première application de la théorie qui vient d'être exposée, nous résoudrons la question suivante :

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'une courbe C, ds la différentielle de l'arc de cette courbe; si l'on fait

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= y\frac{dz}{ds} - z\frac{dy}{ds},\\ y_1 &= z\frac{dx}{ds} - x\frac{dz}{ds},\\ z_1 &= x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds},\end{aligned}\right.$$

les points (x_1, y_1, z_1) formeront une courbe C_1. Cela posé, on demande de trouver la courbe C, connaissant les équations de la courbe C_1, savoir

$$(2)\qquad \begin{cases} f(x_1, y_1, z_1) = 0, \\ F(x_1, y_1, z_1) = 0; \end{cases}$$

en d'autres termes, on demande de trouver l'intégrale et les solutions particulières du système (2), où x_1, y_1, z_1 sont censées remplacées par leurs valeurs tirées des équations (1).

Les équations (2) sont du genre de celles dont on a fait l'analyse au § III; car les trois équations

$$x_1 = \text{constante}, \quad y_1 = \text{constante}, \quad z_1 = \text{constante},$$

se réduisent, après la différentiation, aux deux seules équations

$$d^2 y = 0, \quad d^2 z = 0,$$

si l'on prend dx pour la différentielle constante.

Cela posé, pour appliquer notre méthode générale aux équations (2), il faut, des équations (1), en déduire deux autres dont la première ne renferme plus de différentielles et dont la seconde ne renferme que la différentielle d'une seule variable dépendante. Pour avoir la première équation, il suffit d'ajouter les équations (1) multipliées respectivement par x, y, z; on obtient ainsi

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0.$$

On aurait la deuxième équation en éliminant ds et l'une des différentielles dx, dy, dz entre deux des équations (1) et la suivante,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

mais il vaut mieux, pour la symétrie, prendre l'équation obtenue en ajoutant les équations (1) après les avoir élevées au carré; il vient ainsi

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{ds^2}.$$

Nous ferons, pour abréger,

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2;$$

et alors les deux équations qui nous sont nécessaires seront

$$(3) \quad \begin{cases} xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0, \\ r^2 - r^2 \dfrac{dr^2}{ds^2} = r_1^2. \end{cases}$$

D'après la théorie du § III, si l'on considère x_1, y_1, z_1 comme des constantes assujetties à vérifier les équations (2), les équations (3), après que la deuxième aura été intégrée, feront connaître l'intégrale générale du système proposé. La première équation (3) représente un plan passant par l'origine des coordonnées; par suite, r et ds sont le rayon vecteur et l'arc infiniment petit d'une ligne située dans ce plan. Si donc x' et y' désignent des coordonnées rectangulaires situées dans ce même plan, on aura

$$r^2 = x'^2 + y'^2, \quad ds^2 = dx'^2 + dy'^2;$$

par suite, la deuxième équation (3) devient

$$x'^2 + y'^2 - \frac{(x'\,dx' + y'\,dy')^2}{dx'^2 + dy'^2} = r_1^2;$$

d'où l'on tire

$$y' = x'\frac{dy'}{dx'} + r_1\sqrt{1 - \frac{dy'^2}{dx'^2}}.$$

Cette équation a pour intégrale

$$y' = mx' + r_1\sqrt{1 + m^2},$$

m étant la constante arbitraire, et elle admet pour solution particulière

$$y'^2 + x'^2 = r_1^2;$$

d'où il suit que l'intégrale générale du système proposé représente des lignes droites situées dans les divers plans que représente l'équation

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 0;$$

les droites situées dans chacun de ces plans sont tangentes à une circonférence décrite de l'origine comme centre, avec r_1 pour rayon.

Enfin l'ensemble de toutes les circonférences ainsi construites forme une solution particulière des équations différentielles proposées.

Pour avoir maintenant la solution particulière des équations proposées qui résulte de la variation de x_1, y_1, z_1, il faut différentier la première équation (3) par rapport à x_1, y_1, z_1, considérées comme seules variables, puis joindre l'équation obtenue aux équations (3). On a ainsi à intégrer le nouveau système,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} xx_1 + yy_1 + zz_1 &= 0,\\ x\,dx_1 + y\,dy_1 + z\,dz_1 &= 0,\\ r^2 - r^2\frac{dr^2}{ds^2} &= r_1^2. \end{aligned}\right.$$

Si l'on fait, pour abréger,

$$ds_1 = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2},$$

on déduit des deux premières équations (4)

$$\frac{x}{y_1\frac{dz_1}{ds_1} - z_1\frac{dy_1}{ds_1}} = \frac{y}{z_1\frac{dx_1}{ds_1} - x_1\frac{dz_1}{ds_1}} = \frac{z}{x_1\frac{dy}{ds_1} - y_1\frac{dx_1}{ds_1}}.$$

La somme des carrés des numérateurs de ces fractions est r^2, celle des carrés des dénominateurs est $r_1^2\left(1 - \frac{dr_1^2}{ds_1^2}\right)$; par conséquent, chacune des fractions dont il s'agit a pour valeur

$$\frac{r}{r_1\sqrt{1 - \frac{dr_1^2}{ds^2}}};$$

ainsi l'on a

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{r} &= \frac{y_1\frac{dz_1}{ds_1} - z_1\frac{dy_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1 - \frac{dr_1^2}{ds_1^2}}},\\ \frac{y}{r} &= \frac{z_1\frac{dx_1}{ds_1} - x\frac{dz_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1 - \frac{dr_1^2}{ds_1^2}}},\\ \frac{z}{r} &= \frac{x_1\frac{dy_1}{ds_1} - y_1\frac{dx_1}{ds}}{r_1\sqrt{1 - \frac{dr_1^2}{ds^2}}}. \end{aligned}\right.$$

Différentions ces équations (5), il vient

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{r\,dx - x\,dr}{r^2} &= d\,\frac{y_1\dfrac{dz_1}{ds_1} - z_1\dfrac{dy_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}},\\
\frac{r\,dy - y\,dr}{r^2} &= d\,\frac{z_1\dfrac{dx_1}{ds_1} - x_1\dfrac{dz_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}},\\
\frac{r\,dz - z\,dr}{r^2} &= d\,\frac{x_1\dfrac{dy_1}{ds_1} - y_1\dfrac{dx_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}}.
\end{aligned}\right.$$

Elevant au carré ces trois équations (6) et ajoutant ensuite, il vient

$$\frac{ds^2 - dr^2}{r^2} =$$

$$\left[d\,\frac{y_1\dfrac{dz_1}{ds_1} - z_1\dfrac{dy_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}}\right]^2 + \left[d\,\frac{z_1\dfrac{dx_1}{ds_1} - x_1\dfrac{dz_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}}\right]^2 + \left[d\,\frac{x_1\dfrac{dy_1}{ds_1} - y_1\dfrac{dx_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}}\right]^2;$$

enfin, en éliminant ds^2 entre cette équation et la troisième équation (4), il vient

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{r_1^2\,dr^2}{r^2(r^2 - r_1^2)} =\\
&\left[d\,\frac{y_1\dfrac{dz_1}{ds_1} - z_1\dfrac{dy_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}}\right]^2 + \left[d\,\frac{z_1\dfrac{dx_1}{ds_1} - x_1\dfrac{dz_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}}\right]^2 + \left[d\,\frac{x_1\dfrac{dy_1}{ds_1} - y_1\dfrac{dx_1}{ds_1}}{r_1\sqrt{1-\dfrac{dr_1^2}{ds_1^2}}}\right]^2.
\end{aligned}\right.$$

Les quantités x_1, y_1, z_1, r_1 et ds_1 peuvent, à l'aide des équations (2), s'exprimer en fonction d'une seule variable indépendante; l'équation (7) une fois intégrée, on aura l'expression de r en fonction de cette variable indépendante; les équations (5) feront ensuite connaître x, y et z en fonction de cette même variable. La solution que nous

obtenons ainsi renferme une seule constante arbitraire, comme la première solution particulière déjà trouvée.

Un cas très-remarquable de la question qui vient d'être analysée, est celui où l'une des équations (2) a la forme

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = \text{une constante};$$

c'est-à-dire le cas où la courbe donnée C_1 est sphérique. Effectivement, comme r_1 est constant, l'équation (7) est satisfaite par

$$r = r_1.$$

A cette solution particulière de l'équation (7) correspond une solution particulière des équations proposées; les valeurs de x, y, z données par les équations (5) deviennent alors

$$(8)\qquad \begin{cases} x = y_1 \dfrac{dz_1}{ds_1} - z_1 \dfrac{dy_1}{ds_1}, \\ y = z_1 \dfrac{dx_1}{ds_1} - x_1 \dfrac{dz_1}{ds_1}, \\ z = x_1 \dfrac{dy_1}{ds_1} - y_1 \dfrac{dx_1}{ds_1}. \end{cases}$$

Ces équations, qui ont la même forme que les équations (1), montrent qu'il y a réciprocité entre la courbe C_1 et la courbe C, qui représente la solution dont nous nous occupons. Chacune de ces courbes, situées toutes deux sur la même sphère, se déduit de l'autre par la même série de constructions.

On voit que, dans ce cas, les équations proposées admettent quatre solutions : 1° une intégrale renfermant deux constantes arbitraires; 2° deux solutions particulières renfermant chacune une constante arbitraire; 3° une solution particulière sans constante arbitraire.

VI.

Le cas que nous venons d'examiner est assez intéressant pour que je croie devoir en donner ici un exemple. Je supposerai que les équa-

tions (2) du § V soient

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1 = 1, \\ y_1^2 - z_1^2 - z_1 = 0. \end{cases}$$

L'intégrale générale et la première solution particulière s'obtenant immédiatement, je ne m'occuperai que des deux dernières solutions. Faisant $u = \sqrt{z_1}$, je prendrai u pour variable indépendante : les équations (5) et (7) du § V deviennent

$$\begin{cases} x = r\dfrac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}, \\ y = r\dfrac{u^2 - 2u}{\sqrt{1+u^2}}, \\ z = r\dfrac{1-u^2}{\sqrt{1+u^2}}. \end{cases}$$

$$\frac{dr}{r\sqrt{r^2-1}} = \frac{2+u^2}{1+u^2}\,du.$$

Cette dernière a pour intégrale

$$r = \frac{\sqrt{1+u^2}}{\cos(u+g) - u\sin(u+g)},$$

g étant la constante arbitraire ; et elle admet pour solution particulière

$$r = 1;$$

il en résulte donc ces deux solutions des équations différentielles proposées,

$$\begin{cases} x = \dfrac{u^2}{\cos(u+g) - u\sin(u+g)}, \\ y = \dfrac{u^2 - 2u}{\cos(u+g) - u\sin(u+g)}, \\ z = \dfrac{1-u^2}{\cos(u+g) - u\sin(u+g)}. \end{cases}$$

et

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}, \\ y &= \frac{u-2u}{\sqrt{1+u^2}}, \\ z &= \frac{(1-u^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{1+u^2}}. \end{aligned}\right.$$

VII.

Comme deuxième application de notre théorie, nous résoudrons le problème qui a pour but de trouver la courbe dont les centres de courbure sont situés sur une courbe donnée plane ou à double courbure.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires de la courbe cherchée; ρ le rayon de courbure de cette courbe; r le rayon de torsion ou de deuxième courbure; ξ, υ, ζ les angles formés avec les axes par la direction du rayon de courbure; enfin x_1, y_1, z_1 les coordonnées du centre de courbure. On a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x + \rho\cos\xi, \\ y_1 &= y + \rho\cos\upsilon, \\ z_1 &= z + \rho\cos\zeta. \end{aligned}\right.$$

En outre, le point (x_1, y_1, z_1) étant sur la courbe donnée, on a les deux équations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} f(x_1, y_1, z_1) &= 0, \\ F(x_1, y_1, z_1) &= 0, \end{aligned}\right.$$

où f et F désignent des fonctions données.

Si l'on exprimait x_1, y_1, z_1 en fonction de x, y, z et de leurs différentielles, les équations (2) se changeraient en deux équations différentielles du deuxième ordre; ces équations, qu'il s'agit ici d'intégrer, appartiennent à la classe de celles que nous avons analysées au § III, car les trois équations

$$x_1 = \text{constante}, \quad y_1 = \text{constante}, \quad z_1 = \text{constante}.$$

sont trois intégrales du système formé des deux équations du troisième ordre

$$(3) \qquad d\rho = 0, \quad \frac{1}{r} = 0.$$

Cela posé, pour avoir l'intégrale de nos équations différentielles, il faut considérer x_1, y_1, z_1 comme des constantes vérifiant les équations (2), et achever l'intégration des équations (3) dont les équations (1) forment déjà trois intégrales.

La première équation (3) donne

$$\rho = \text{constante},$$

et l'on déduit des équations (1)

$$(4) \qquad (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = \rho^2.$$

En outre, si l'on prend pour variable indépendante ds ou $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, on sait que $\cos\xi$, $\cos\eta$, $\cos\zeta$ sont proportionnels à d^2x, d^2y, d^2z. D'après cela, les équations (1) donnent

$$\begin{aligned}
(y - y_1)\,d^2z - (z - z_1)\,d^2y &= 0,\\
(z - z_1)\,d^2x - (x - x_1)\,d^2z &= 0,\\
(x - x_1)\,d^2y - (y - y_1)\,d^2x &= 0;
\end{aligned}$$

intégrant et désignant par A, B, C, trois constantes arbitraires, il vient

$$\begin{aligned}
(y - y_1)\,dz - (z - z_1)\,dy &= \mathrm{A}C\,ds,\\
(z - z_1)\,dx - (x - x_1)\,dz &= \mathrm{B}C\,ds,\\
(x - x_1)\,dy - (y - y_1)\,dz &= \mathrm{C}\,ds.
\end{aligned}$$

En ajoutant ces équations respectivement multipliées par $(x - x_1)$, $(y - y_1)$, $(z - z_1)$, il vient

$$(5) \qquad \mathrm{A}(x - x_1) + \mathrm{B}(y - y_1) + (z - z_1) = 0.$$

Le système des équations (4) et (5), qui renferme six constantes A, B, ρ, x_1, y_1, z_1, dont quatre sont arbitraires, forme l'intégrale générale des équations différentielles proposées. Ces équations représentent, comme

on voit, un cercle qui a son centre en un point quelconque de la courbe donnée, et dont le rayon, ainsi que le plan, est arbitraire.

On serait arrivé au même résultat, quoiqu'avec un peu plus de peine, en formant avec les équations (1), comme nous l'avons indiqué au § III, un système de deux équations dont l'une fût du premier ordre seulement, et en intégrant ensuite ces équations. La première des équations dont je parle s'obtient immédiatement en ajoutant les équations (1) après les avoir multipliées par dx, dy, dz, respectivement; ce qui donne

$$(x - x_1)\,dx + (y - y_1)\,dy + (z - z_1)\,dz = 0;$$

quant à l'autre équation, je la représenterai simplement par

$$\Pi_1 = 0,$$

comme dans le cas général du § III. Cela posé, pour avoir la solution particulière des équations proposées, il faut joindre aux deux équations précédentes celle obtenue en différentiant la première d'entre elles par rapport à x_1, y_1, z_1, équation qui est

$$dx_1\,dx + dy_1\,dy + dz_1\,dz = 0,$$

puis intégrer ensuite le système ainsi formé. Or, il est évident qu'on peut remplacer l'équation $\Pi_1 = 0$ par celle qu'on obtient en différentiant la précédente et chassant ensuite les différentielles deuxièmes de x, y et z par le moyen des équations (1). On peut écrire ainsi l'équation précédente,

$$dx_1 \frac{dx}{ds} + dy_1 \frac{dy}{ds} + dz_1 \frac{dz}{ds} = 0;$$

différentiant et observant qu'on a, à cause des équations (1),

$$d\frac{dx}{ds} = \frac{ds}{\rho}\cos\xi = -\frac{(x - x_1)\,ds}{\rho^2} = -\frac{(x - x_1)\,ds}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

$$d\frac{dy}{ds} = \frac{ds}{\rho}\cos\upsilon = -\frac{(y - y_1)\,ds}{\rho^2} = -\frac{(y - y_1)\,ds}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

$$d\frac{dz}{ds} = \frac{ds}{\rho}\cos\zeta = -\frac{(z - z_1)\,ds}{\rho^2} = -\frac{(z - z_1)\,ds}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2},$$

il vient

$$d^2 x_1 \frac{dx}{ds} + d^2 y_1 \frac{dy}{ds} + d^2 z_1 \frac{dz}{ds}$$

$$- \frac{(x - x_1)\,dx_1 + (y - y_1)\,dy_1 + (z - z_1)\,dz_1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2}\,ds = 0,$$

ou

$$d^2 x_1\,dx + d^2 y_1\,dy + d^2 z_1\,dz$$

$$- (dx^2 + dy^2 + dz^2)\frac{(x - x_1)\,dx_1 + (y - y_1)\,dy_1 + (z - z_1)\,dz_1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} = 0.$$

Ainsi la solution particulière des équations différentielles proposées, ou, en d'autres termes, la véritable solution de notre problème est donnée par les trois équations

$$(6)\quad \left\{ \begin{array}{c} (x - x_1)\,dx + (y - y_1)\,dy + (z - z_1)\,dz = 0, \\ dx_1\,dx + dy_1\,dy + dz_1\,dz = 0, \\ d^2 x_1\,dx + d^2 y_1\,dy + d^2 z_1\,dz \\ - (dx^2 + dy^2 + dz^2)\dfrac{(x - x_1)\,dx_1 + (y - y_1)\,dy_1 + (z - z_1)\,dz_1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2} = 0. \end{array} \right.$$

On peut, à cause des équations (2), considérer x_1, y_1, z_1 comme fonctions d'une même variable indépendante θ, et, par suite, les équations (6) auront lieu entre les quatre variables x, y, z, θ et leurs différentielles premières. Le système de ces équations admet une intégrale qui renferme trois constantes arbitraires, et il peut, en outre, avoir des solutions particulières répondant à notre problème, ainsi qu'on le verra dans la seconde partie de ce Mémoire.

VIII.

Je ferai remarquer, en terminant cette première partie, qu'il faut encore rattacher à la théorie du § III l'intégration des deux équations simultanées

$$\left\{ \begin{array}{l} y = px + f(p, q), \\ z = qx + F(p, q), \end{array} \right.$$

où f et F sont des fonctions données, et où p et q désignent les

dérivées $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$. Si, en effet, on pose

$$(2) \qquad p = a, \quad q = b, \quad y - px = \alpha, \quad z - qx = \beta.$$

on a

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha = f(a, b), \\ \beta = F(a, b); \end{cases}$$

d'ailleurs, si l'on considère a, b, α, β comme des constantes, les équations (2) sont les quatre intégrales du système

$$d^2 y = 0, \quad d^2 z = 0;$$

donc les équations (1) appartiennent à la classe de celles que nous avons considérées au § III.

Si l'on élimine p et q des équations (2), les deux résultantes, savoir

$$(4) \qquad \begin{cases} y = ax + \alpha, \\ z = bx + \beta, \end{cases}$$

formeront l'intégrale générale des proposées, pourvu que l'on considère a et b comme des constantes arbitraires, et α et β comme des fonctions de a et b données par les équations (3).

Pour avoir la solution particulière des équations (1), il faut joindre aux équations (4) celles qu'on en déduit par la différentiation relative à a, b, α, β; ces équations sont

$$x\,da + d\alpha = 0, \quad x\,db + d\beta = 0.$$

ou

$$\left(x + \frac{df}{da}\right) da + \frac{df}{db}\, db = 0, \qquad \left(x + \frac{dF}{db}\right) db + \frac{dF}{da}\, da = 0.$$

On a ainsi le système de quatre équations

$$(5) \qquad \begin{cases} y = ax + f(a, b), \\ z = bx + F(a, b), \\ x = -\frac{df}{da} - \frac{df}{db}\frac{db}{da} = -\frac{dF}{da}\frac{da}{db} - \frac{dF}{db}, \\ \frac{df}{db}\left(\frac{db}{da}\right)^2 + \left(\frac{df}{da} - \frac{dF}{db}\right)\frac{db}{da} - \frac{dF}{da} = 0. \end{cases}$$

En intégrant la dernière équation (5), on aura la valeur de b en fonction de a et d'une constante arbitraire; les trois premières équations feront ensuite connaître x, y, z en fonction de a. Il importe de remarquer que la dernière équation (5) admettra, en général, une solution particulière à laquelle correspondra une solution des équations proposées.

En appliquant ce qui précède aux deux équations

$$\begin{cases} y = px + p^2 + q, \\ z = qx + pq, \end{cases}$$

on trouve, pour l'intégrale,

$$\begin{cases} y = ax + a^2 + b, \\ z = bx + ab, \end{cases}$$

a et b étant les deux constantes; puis on a, en outre, les deux solutions particulières

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}(x + \alpha)^2 + \alpha^2, \\ z = -\frac{\alpha}{4}(x - \alpha)^2, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{3}x^2, \\ z = -\frac{1}{27}x^3. \end{cases}$$

Dans la première de ces deux solutions, α désigne une constante arbitraire.

En général, le système des équations (1) admet, outre son intégrale, deux solutions particulières distinctes, mais il y a des cas où l'une de ces solutions particulières cesse d'avoir lieu; cela arrive, par exemple, si les fonctions f et F ne contiennent que q et p respectivement, comme il est aisé de s'en assurer. Il peut se faire aussi que le nombre des solutions particulières distinctes des équations (1) soit

supérieur à 2; cela arrivera si les quantités

$$\frac{df}{db}, \quad \frac{df}{da} - \frac{dF}{db}, \quad \frac{dF}{da},$$

ont un facteur commun; car, en égalant à zéro ce facteur commun, on obtiendra une solution particulière de la dernière équation (5), à laquelle pourra correspondre une solution nouvelle des équations (1). Nous allons en donner un exemple. Considérons les deux équations

$$\begin{cases} y = px - 9q^2 + 18p^2q - 4p^4, \\ z = qx + 12pq^2 - 4p^3q. \end{cases}$$

L'intégrale générale sera d'abord

$$\begin{cases} y = ax - 9b^2 + 18a^2b - 4a^4, \\ z = bx + 12ab^2 - 4a^3b, \end{cases}$$

a et b étant les deux constantes arbitraires; on trouve ensuite que la dernière équation (5) se décompose dans les deux suivantes qu'il faut considérer successivement,

$$b = a^2 \quad \text{et} \quad b = a\frac{db}{da} - \frac{3}{2}\left(\frac{db}{da}\right)^2;$$

alors le système (5) donne lieu aux deux suivants :

$$\begin{cases} y = ax - 9b^2 + 18a^2b - 4a^4, \\ z = bx + 12ab^2 - 4a^3b, \\ x = -(36ab - 16a^3) + 18(b - a^2)\frac{db}{da}, \\ b = a\frac{db}{da} - \frac{3}{2}\left(\frac{db}{da}\right)^2, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} y = ax - 9b^2 + 18a^2b - 4a^4, \\ z = bx + 12ab^2 - 4a^3b, \\ x = -20a^3, \\ b = a^2. \end{cases}$$

Le premier de ces deux systèmes fournit deux solutions particulières des équations proposées; l'une de ces solutions renferme une

constante arbitraire. Le deuxième système fournit une troisième solution particulière sans constante arbitraire, et qui est

$$\begin{cases} y = -15\left(\frac{x}{20}\right)^{\frac{4}{3}}, \\ z = +12\left(\frac{x}{20}\right)^{\frac{5}{3}}. \end{cases}$$

DEUXIÈME PARTIE.

I.

J'ai été conduit naturellement aux résultats exposés dans la première partie de ce Mémoire, en étudiant les deux problèmes qui ont pour objet de trouver une courbe quand on connaît le lieu des centres de ses sphères osculatrices ou de ses cercles osculateurs. Je me suis borné, dans ce qui précède, à établir les équations différentielles dont ces problèmes dépendent immédiatement, sans entrer dans les détails. Je me propose, dans cette seconde partie, de faire connaître une solution nouvelle et directe des deux problèmes dont il s'agit, et d'analyser les divers cas remarquables que présente le second d'entre eux. Je ferai un usage fréquent de quelques formules que j'ai publiées dans un Mémoire inséré au tome XVI du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, et qu'il est nécessaire de rappeler ici.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'une courbe; ds la différentielle de l'arc de cette courbe, c'est-à-dire $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$; ρ le rayon de la première courbure; r le rayon de la seconde courbure ou le rayon de torsion; α, β, γ; ξ, υ, ζ; λ, μ, ν les angles formés avec les axes des x, des y et des z, par la tangente, par la normale principale suivant laquelle est dirigé le rayon de courbure, et par l'axe du plan osculateur respectivement. On a

$$\begin{cases} d\cos\alpha = \cos\xi\,\dfrac{ds}{\rho}, \\ d\cos\beta = \cos\upsilon\,\dfrac{ds}{\rho}, \\ d\cos\gamma = \cos\zeta\,\dfrac{ds}{\rho}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\cos\lambda = \cos\xi\,\dfrac{ds}{r}, \\ d\cos\mu = \cos\upsilon\,\dfrac{ds}{r}, \\ d\cos\nu = \cos\zeta\,\dfrac{ds}{r}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} d\cos\xi = -\cos\alpha\,\dfrac{ds}{\rho} - \cos\lambda\,\dfrac{ds}{r}, \\ d\cos\upsilon = -\cos\beta\,\dfrac{ds}{\rho} - \cos\mu\,\dfrac{ds}{r}, \\ d\cos\zeta = -\cos\gamma\,\dfrac{ds}{\rho} - \cos\nu\,\dfrac{ds}{r}. \end{cases}$$

Ces formules expriment, comme on voit, les différentielles des neuf cosinus des angles α, β,..., par des fonctions linéaires de ces mêmes cosinus dont les coefficients ne contiennent que r, ρ et ds.

II.

Nous nous proposons, en premier lieu, de trouver la courbe dont les centres des sphères osculatrices soient sur une courbe donnée. Je désignerai par des lettres sans indice les quantités relatives à la courbe inconnue, et par les mêmes lettres affectées d'un indice les quantités analogues relatives à la courbe donnée. Ainsi, par exemple, x, y, z étant les coordonnées rectangulaires d'un point de la courbe inconnue; x_1, y_1, z_1 seront celles du centre de la sphère osculatrice. Cela posé, on a

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 - x = \rho\cos\xi - r\dfrac{d\rho}{ds}\cos\lambda, \\ y_1 - y = \rho\cos\upsilon - r\dfrac{d\rho}{ds}\cos\mu, \\ z_1 - z = \rho\cos\zeta - r\dfrac{d\rho}{ds}\cos\nu. \end{cases}$$

Différentiant, il vient

$$(2)\quad \begin{cases} dx_1 = -\left[\frac{\rho}{r}ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\lambda, \\ dy_1 = -\left[\frac{\rho}{r}ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\mu, \\ dz_1 = -\left[\frac{\rho}{r}ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)\right]\cos\nu. \end{cases}$$

Élevant au carré et ajoutant, on aura ds_1^2, et l'on peut poser

$$(3)\quad ds_1 = -\left[\frac{\rho}{r}ds + d\left(r\frac{d\rho}{ds}\right)\right],$$

puisque l'origine des arcs s_1 est arbitraire. Des équations (2) et (3), on déduit

$$\frac{dx_1}{ds_1} = \cos\lambda, \quad \frac{dy_1}{ds_1} = \cos\mu, \quad \frac{dz_1}{ds_1} = \cos\nu,$$

ou

$$(4)\quad \cos\alpha_1 = \cos\lambda, \quad \cos\beta_1 = \cos\mu, \quad \cos\gamma_1 = \cos\nu,$$

équations très-connues et qu'on aurait pu écrire tout de suite.

Différentiant les équations (4) et ayant égard à celles rappelées au § I, il vient

$$\begin{cases} \frac{ds_1}{\rho_1}\cos\xi_1 = \frac{ds}{r}\cos\xi, \\ \frac{ds_1}{\rho_1}\cos\upsilon_1 = \frac{ds}{r}\cos\upsilon, \\ \frac{ds_1}{\rho_1}\cos\zeta_1 = \frac{ds}{r}\cos\zeta; \end{cases}$$

d'où

$$(5)\quad \frac{ds_1}{\rho_1} = \pm\frac{ds}{r},$$

et

$$(6)\quad \cos\xi_1 = \pm\cos\xi, \quad \cos\upsilon_1 = \pm\cos\upsilon, \quad \cos\zeta_1 = \pm\cos\zeta.$$

Des équations (3) et (5), on tire

$$(7)\quad \frac{d\left(\rho\frac{d\rho}{ds_1}\right)}{ds_1} + \frac{\rho}{\rho_1} \pm 1 = 0,$$

et, en vertu des équations (4), (5) et (6), les équations (1) deviennent

$$(8)\quad \begin{cases} x = x_1 \pm \rho_1 \dfrac{d\rho}{ds_1} \cos\alpha_1 \mp \rho \cos\xi_1, \\ y = y_1 \pm \rho_1 \dfrac{d\rho}{ds_1} \cos\beta_1 \mp \rho \cos\upsilon_1, \\ z = z_1 \pm \rho_1 \dfrac{d\rho}{ds_1} \cos\gamma_1 \mp \rho \cos\zeta_1. \end{cases}$$

ρ_1 est une fonction connue de s_1; par suite, l'équation (7) étant intégrée, on aura la valeur de ρ exprimée en fonction de s_1 et de deux constantes arbitraires; les équations (8) feront ensuite connaître x, y et z. Il faut remarquer que, dans les précédentes équations, on doit prendre ensemble les signes supérieurs ou les inférieurs; ce signe d'ailleurs est indifférent, car on passe d'un cas à l'autre en changeant ρ en $-\rho$.

III.

Proposons-nous maintenant de trouver la courbe dont les centres de courbure soient sur une courbe donnée.

Comme dans le problème précédent, j'emploierai des lettres sans indice pour représenter les quantités relatives à la courbe inconnue, tandis que les mêmes lettres affectées d'un indice désigneront les quantités analogues relatives à la courbe donnée. Nous prendrons pour variable indépendante l'arc s_1 de la courbe donnée. Cela posé, on a

$$(1)\quad \begin{cases} x_1 - x = \rho \cos\xi, \\ y_1 - y = \rho \cos\upsilon, \\ z_1 - z = \rho \cos\zeta. \end{cases}$$

Différentiant et observant que

$$dx = ds \cos\alpha, \quad dy = ds \cos\beta, \quad dz = ds \cos\gamma,$$

il vient

$$(2)\quad \begin{cases} dx_1 = d\rho \cos\xi - \dfrac{\rho\, ds}{r} \cos\lambda, \\ dy_1 = d\rho \cos\upsilon - \dfrac{\rho\, ds}{r} \cos\mu, \\ dz_1 = d\rho \cos\zeta - \dfrac{\rho\, ds}{r} \cos\nu; \end{cases}$$

élevant ces équations (2) au carré et ajoutant, il vient

$$ds_1^2 = d\rho^2 + \frac{\rho^2\, ds^2}{r^2},$$

d'où

$$(3) \qquad \frac{ds}{r} = \frac{ds_1}{\rho}\sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}.$$

Si l'on divise les équations (2) par ds_1 et qu'on y remplace $\frac{ds}{r}$ par sa valeur tirée de (3), il vient

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} \cos\alpha_1 &= \frac{d\rho}{ds_1}\cos\xi - \sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}\cos\lambda, \\ \cos\beta_1 &= \frac{d\rho}{ds_1}\cos\nu - \sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}\cos\mu, \\ \cos\gamma_1 &= \frac{d\rho}{ds_1}\cos\zeta - \sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds^2}}\cos\nu; \end{aligned}\right.$$

multipliant ces équations (4) respectivement par $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, puis par $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, puis par $\cos\xi$, $\cos\nu$, $\cos\zeta$, et ajoutant chaque fois les trois produits, il vient

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} &\cos\alpha_1\cos\alpha + \cos\beta_1\cos\beta + \cos\gamma_1\cos\gamma = 0, \\ &\cos\alpha_1\cos\lambda + \cos\beta_1\cos\mu + \cos\gamma_1\cos\nu = -\sqrt{1 - \frac{d\rho}{ds_1^2}}, \\ &\cos\alpha_1\cos\xi + \cos\beta_1\cos\nu + \cos\gamma_1\cos\zeta = \frac{d\rho}{ds_1}. \end{aligned}\right.$$

Différentions ces équations (5); il vient, en ayant égard à ces mêmes équations et à celles rappelées au § I,

$$\left\{\begin{aligned} &\cos\xi_1\cos\alpha + \cos\nu_1\cos\beta + \cos\zeta_1\cos\gamma = -\frac{\rho_1}{\rho}\frac{d\rho}{ds_1}\frac{ds}{ds}, \\ &\cos\xi_1\cos\lambda + \cos\nu_1\cos\mu + \cos\zeta_1\cos\nu = \rho_1\frac{\frac{d\rho}{ds_1}}{\sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}}\left(\frac{d^2\rho}{ds_1^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho^2}{ds^2} - \frac{1}{\rho}\right), \\ &\cos\xi_1\cos\xi + \cos\nu_1\cos\nu + \cos\zeta_1\cos\zeta = \rho_1\left(\frac{d^2\rho}{ds_1^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho^2}{ds^2} - \frac{1}{\rho}\right); \end{aligned}\right.$$

en élevant ces équations au carré, puis ajoutant ensuite les résultats, il vient

$$1 = \left(\frac{\rho_1}{\rho}\frac{d\rho}{ds_1}\frac{ds}{ds_1}\right)^2 + \frac{\rho_1^2}{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}}\left(\frac{d^2\rho}{ds_1^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho^2}{ds_1^2} - \frac{1}{\rho}\right)^2,$$

d'où

$$\frac{\rho_1}{\rho}\frac{d\rho}{ds_1}\frac{ds}{ds_1} = \sqrt{1 - \frac{\rho_1^2}{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}}\left(\frac{d^2\rho}{ds_1^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho^2}{ds_1^2} - \frac{1}{\rho}\right)^2}.$$

équation qui détermine ds en fonction de ρ, $\frac{d\rho}{ds_1}$, $\frac{d^2\rho}{ds_1^2}$ et des quantités connues.

Faisant, pour abréger,

$$(6) \qquad V = \frac{d^2\rho}{ds_1^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho^2}{ds_1^2} - \frac{1}{\rho},$$

les équations précédentes deviennent

$$(7) \quad \left\{\begin{aligned} &\cos\xi_1\cos\alpha + \cos\upsilon_1\cos\beta + \cos\zeta_1\cos\gamma = -\frac{\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V^2}}{\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2}}}, \\ &\cos\xi_1\cos\lambda + \cos\upsilon_1\cos\mu + \cos\zeta_1\cos\nu = \rho_1\frac{\frac{d\rho}{ds_1}}{\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds^2}}}V, \\ &\cos\xi_1\cos\xi + \cos\upsilon_1\cos\upsilon + \cos\zeta_1\cos\zeta = \rho_1 V; \end{aligned}\right.$$

et

$$(8) \qquad \frac{\rho_1}{\rho}\frac{d\rho}{ds_1}\frac{ds}{ds_1} = \frac{\sqrt{1-\frac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V^2}}{\sqrt{1-\frac{d\rho}{ds_1^2}}}.$$

Remarquons maintenant que les carrés des quantités

$$\cos\lambda_1\cos\alpha + \cos\mu_1\cos\beta + \cos\nu_1\cos\gamma,$$
$$\cos\lambda_1\cos\lambda + \cos\mu_1\cos\mu + \cos\nu_1\cos\nu,$$
$$\cos\lambda_1\cos\xi + \cos\mu_1\cos\upsilon + \cos\nu_1\cos\zeta,$$

ajoutés respectivement avec les carrés des premiers membres des équations (5) et (7), donnent des résultats égaux à l'unité; d'où il résulte que l'on a

$$(9)\quad \begin{cases} \cos\lambda_1 \cos\alpha + \cos\mu_1 \cos\beta + \cos\nu_1 \cos\gamma = \dfrac{\rho_1 V}{\sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2}}}, \\[2ex] \cos\lambda_1 \cos\lambda + \cos\mu_1 \cos\mu + \cos\nu_1 \cos\nu = \dfrac{\dfrac{d\rho}{ds_1}}{\sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2}}} \sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V^2}. \\[2ex] \cos\lambda_1 \cos\xi + \cos\mu_1 \cos\upsilon + \cos\nu_1 \cos\zeta = \sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V}. \end{cases}$$

Dans ces équations (9), les signes des seconds membres ont été déterminés de manière à satisfaire les deux équations suivantes qu'on déduit facilement des équations (4) et (7), savoir :

$$\frac{d\rho}{ds_1}(\cos\lambda_1 \cos\xi + \ldots) - \sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}(\cos\lambda_1 \cos\lambda + \ldots) = 0,$$

$$-\frac{\sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2}}}(\cos\lambda_1 \cos\alpha + \ldots) + \rho_1 V \frac{\dfrac{d\rho}{ds_1}}{\sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2}}}(\cos\lambda_1 \cos\lambda + \ldots)$$

$$+ \rho_1 V(\cos\lambda_1 \cos\xi + \ldots) = 0.$$

Prenons maintenant la dernière équation dans chacun des systèmes (5), (7) et (9); on formera le système suivant :

$$(10)\quad \begin{cases} \cos\alpha_1 \cos\xi + \cos\beta_1 \cos\upsilon + \cos\gamma_1 \cos\zeta = \dfrac{d\rho}{ds_1}, \\[2ex] \cos\xi_1 \cos\xi + \cos\upsilon_1 \cos\upsilon + \cos\zeta_1 \cos\zeta = \rho_1 V, \\[2ex] \cos\lambda_1 \cos\xi + \cos\mu_1 \cos\upsilon + \cos\nu_1 \cos\zeta = \sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V^2}; \end{cases}$$

multipliant ces équations respectivement par $\cos\alpha_1$, $\cos\xi_1$, $\cos\lambda_1$, puis par $\cos\beta_1$, $\cos\upsilon_1$, $\cos\mu_1$, puis enfin par $\cos\gamma_1$, $\cos\zeta_1$, $\cos\nu_1$, et

ajoutant chaque fois les résultats, il vient

$$(11)\quad \begin{cases} \cos\xi = \dfrac{d\rho}{ds_1}\cos\alpha_1 + \rho_1 V\cos\xi_1 + \sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V^2}\cos\lambda_1, \\ \cos\upsilon = \dfrac{d\rho}{ds_1}\cos\beta_1 + \rho_1 V\cos\upsilon_1 + \sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V^2}\cos\mu_1, \\ \cos\zeta = \dfrac{d\rho}{ds_1}\cos\gamma_1 + \rho_1 V\cos\zeta_1 + \sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V^2}\cos\nu_1; \end{cases}$$

portant ces valeurs de $\cos\xi$, $\cos\upsilon$, $\cos\zeta$ dans les équations (1), celles-ci deviennent

$$(12)\quad \begin{cases} x = x_1 - \rho\dfrac{d\rho}{ds_1}\cos\alpha_1 - \rho_1\rho V\cos\xi_1 - \rho\sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V^2}\cos\lambda_1, \\ y = y_1 - \rho\dfrac{d\rho}{ds_1}\cos\beta_1 - \rho_1\rho V\cos\upsilon_1 - \rho\sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V^2}\cos\mu_1, \\ z = z_1 - \rho\dfrac{d\rho}{ds_1}\cos\gamma_1 - \rho_1\rho V\cos\zeta_1 - \rho\sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V^2}\cos\nu_1. \end{cases}$$

Ces équations (12) feront connaître les coordonnées de la courbe cherchée en fonction de s_1, lorsqu'on connaîtra l'expression de ρ en fonction de cette variable.

La quantité ρ dépend d'une équation différentielle du troisième ordre que nous allons actuellement former.

Différentions les équations (7); on trouvera, en ayant égard à ces mêmes équations, ainsi qu'aux équations (3) et (8) et à celles rappelées au § I,

$$(13)\quad \begin{cases} \cos\lambda_1\cos\alpha + \cos\mu_1\cos\beta + \cos\nu_1\cos\gamma = -\dfrac{r_1\rho_1 V}{\sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2}}\sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho^2 V^2}}\,U, \\ \cos\lambda_1\cos\lambda + \cos\mu_1\cos\mu + \cos\nu_1\cos\nu = -\dfrac{r_1\rho_1\dfrac{d\rho}{ds_1}}{\sqrt{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2}}}\,U, \\ \cos\lambda_1\cos\xi + \cos\mu_1\cos\upsilon + \cos\nu_1\cos\zeta = -r_1\rho_1 U, \end{cases}$$

en faisant, pour abréger,

$$(14)\qquad U = \frac{dV}{ds_1} + \frac{V^2}{\dfrac{d\rho}{ds_1}\left(1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2}\right)} + \left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds_1} + \frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{ds}\right)V - \frac{1}{\rho_1^2}\,\frac{1 - \dfrac{d\rho^2}{ds_1^2}}{\dfrac{d\rho}{ds_1}}.$$

Pour que les équations (13) coïncident avec les équations (9), il faut et il suffit que l'on ait

$$(15)\qquad U + \frac{1}{r_1\rho_1}\sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V^2} = 0.$$

Cette équation renferme ρ, $\frac{d\rho}{ds_1}$, $\frac{d^2\rho}{ds_1^2}$ et $\frac{d^3\rho}{ds_1^3}$, avec les quantités connues r_1 et ρ_1, qui sont des fonctions données de s_1. L'intégration amènera donc trois constantes arbitraires, ainsi que nous en avons déjà fait la remarque dans la première partie de ce travail.

Dans le cas particulier où la courbe donnée est plane, on a

$$\frac{1}{r_1} = 0,$$

et l'équation (15) se réduit à

$$U = 0.$$

Il est très-aisé de vérifier que les équations (12) satisferont aux équations (1), si l'on admet que l'équation (15) ait lieu. Il y a pourtant une exception à faire à l'égard d'une certaine solution de l'équation (15). Celle-ci est satisfaite si l'on pose

$$(16)\qquad 1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2} - \rho_1^2 V^2 = 0;$$

mais alors la plupart de nos formules deviennent illusoires. L'équation (8) montre que l'équation (16) ne peut être admise que dans deux hypothèses : 1° si $\frac{d\rho}{ds_1} = 0$; 2° si $\frac{d\rho}{ds_1} = 1$. Dans le premier cas, l'équation (16) se réduit à $\rho = \rho_1$; il faut donc que le rayon de courbure de la courbe donnée soit constant. Les équations (11) et (12) deviennent alors

$$(17)\qquad \begin{cases} \cos\xi = \cos\xi_1, \\ \cos\upsilon = \cos\upsilon_1, \\ \cos\zeta = \cos\zeta_1, \end{cases}$$

$$(18)\qquad \begin{cases} x = x_1 - \rho_1\cos\xi_1, \\ y = y_1 - \rho_1\cos\upsilon_1, \\ z = z_1 - \rho_1\cos\zeta_1. \end{cases}$$

On vérifie aisément que ces équations (18) satisfont aux équations (17), à moins que la courbe donnée ne soit plane.

Dans l'hypothèse de $\frac{d\rho}{ds_1} = 1$, les équations (12) deviennent

$$(19)\quad \begin{cases} x = x_1 - \rho\cos\alpha_1, \\ y = y_1 - \rho\cos\beta_1, \\ z = z_1 - \rho\cos\gamma_1; \end{cases}$$

et l'on vérifie aisément que ces équations ne satisfont aux équations (1) que dans le seul cas de $r_1 = \infty$, c'est-à-dire dans le cas où la courbe donnée est plane. Alors les équations (19) appartiennent aux développantes de la courbe donnée en prenant

$$\rho = s_1 + \text{une constante}.$$

Il résulte de là qu'en excluant de l'équation (15) la solution particulière qui satisfait à l'équation (16), on ne rejette que les développantes de la courbe donnée si celle-ci est plane, et la courbe parallèle à la courbe donnée est distante de celle-ci d'une quantité égale à son rayon de courbure, si celui-ci est constant.

IV.

L'équation différentielle du troisième ordre dont ρ dépend, s'abaisse au deuxième ordre si r_1 et ρ_1 sont constants, auquel cas la courbe donnée est une hélice ou un cercle. Supposons, en effet,

$$\rho_1 = \text{une constante } a, \quad r_1 = \text{une constante } b;$$

l'équation en ρ devient

$$\frac{dV}{ds_1} + \frac{V^2}{\frac{d\rho}{ds_1}\left(1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}\right)} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds_1}V - \frac{1}{a^2}\frac{1 - \frac{d\rho^2}{ds_1^2}}{\frac{d\rho}{ds_1}} + \frac{1}{ab}\sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds^2} - a^2V^2} = 0,$$

et l'on a

$$V = \frac{d^2\rho}{ds_1^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d\rho^2}{ds^2} - \frac{1}{\rho}.$$

Prenons deux nouvelles variables t et u, telles que

$$t = \rho^2, \quad u = \rho\sqrt{1 - \frac{d\rho^2}{ds^2}};$$

on aura

$$du = -\frac{V\sqrt{t}\,dt}{2u}.$$

d'où

$$V = -\frac{2u\,du}{dt};$$

et si l'on prend t pour variable indépendante, notre équation différentielle devient

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{u}{t-u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{u}{4a^2(t-u^2)} - \frac{1}{4ab}\frac{\sqrt{1-4a^2\frac{du^2}{dt^2}}}{\sqrt{t-u^2}} = 0.$$

Si l'on fait $b = \infty$, c'est-à-dire si l'on suppose que la courbe donnée soit un cercle, l'équation précédente se réduit à

$$\frac{d^2u}{dt^2} - \frac{u}{t-u^2}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{u}{4a^2(t-u^2)} = 0.$$

Telle est l'équation dont dépend, en dernière analyse, la recherche des courbes à double courbure dont les centres de courbure sont situés sur une circonférence de cercle. Il ne paraît pas que cette équation puisse être intégrée sous forme finie.

THÉORIE

DES

CÔNES CIRCULAIRES ROULANTS;

PAR M. POINSOT,
Membre de l'Institut.

Sous ce titre abrégé, je n'ai pas uniquement en vue, comme on pourrait le croire, le cas particulier d'un corps homogène de figure conique qui roulerait sur un autre cône fixe : mais je considère en général un corps solide de forme et de constitution quelconque, doué de deux axes égaux d'inertie, et qui se meut, autour d'un point pris sur son troisième axe, comme si un cône circulaire décrit du même point autour de cet axe roulait actuellement, sans glisser, sur la surface d'un autre cône circulaire de même sommet. Je cherche la condition d'un tel mouvement, je veux dire, le couple accélérateur étranger qui serait capable de le produire.

DÉFINITIONS ET LEMMES PRÉLIMINAIRES.

1. Considérons donc un corps quelconque mobile autour d'un point fixe O.

Soit OA un des trois axes principaux du corps, et autour duquel le moment d'inertie soit A; et supposons que tous les moments d'inertie soient égaux entre eux et à B, autour de tous les axes menés par le point O perpendiculairement à celui-là. Tous ces autres axes formeront un plan que je nommerai l'*équateur* du corps, tandis que l'axe perpendiculaire OA en sera nommé l'*axe de figure*.

A et B étant les deux moments d'inertie du corps, l'un autour de l'axe de figure, l'autre autour d'un diamètre quelconque de l'équa-

teur; si l'on nomme I le moment d'inertie de ce corps autour d'un axe OI, incliné d'un angle o à l'axe de figure, on aura, comme on le sait,

$$I = A \cos^2 o + B \sin^2 o.$$

2. Supposons maintenant que le corps soit frappé par un couple G, dont l'axe soit OG (*Pl. I, fig.* 1), et qui tende à produire au premier instant une rotation θ autour de l'axe OI; cet axe instantané OI tombera dans le plan même de l'axe du couple et de l'axe de figure, et si l'on désigne par i l'inclinaison de OI à l'axe OG du couple, il est aisé de voir qu'on aura l'équation

$$G \cos i = I\theta;$$

car il est clair que $I\theta$ exprime, aussi bien que $G \cos i$, la somme des moments de toutes les forces, ou le moment total G estimé autour de l'axe OI.

3. De plus, si vous nommez u l'inclinaison de l'axe OG du couple à l'axe OA du corps, vous aurez, entre o et u, la relation nécessaire

$$B \operatorname{tang} o = A \operatorname{tang} u;$$

car, imaginez le couple G décomposé en deux, l'un autour de OA, l'autre autour de l'axe principal OB mené dans le plan GOA, vous aurez pour ces deux composants rectangulaires du couple G, les valeurs $G \cos u$ et $G \sin u$, et dont le rapport, pris dans l'ordre inverse, sera $\operatorname{tang} u$. Mais, d'un autre côté, la rotation θ, décomposée en deux autour des mêmes axes, donne les deux composantes $\theta \cos o$, $\theta \sin o$, et, par conséquent, $A\theta \cos o$ et $B\theta \sin o$ pour les deux couples capables de les produire; couples dont le rapport, pris dans le même ordre que ci-dessus, donne $\frac{B}{A} \operatorname{tang} o$: d'où résulte, en égalant cette expression à la précédente, l'équation $B \operatorname{tang} o = A \operatorname{tang} u$, qu'il s'agissait de démontrer.

4. Les trois axes OA, OI et OG étant dans un même plan, on voit que l'angle u n'est autre chose que la différence ou la somme des deux angles o et i; de sorte qu'on aura

$$u = o - i, \quad \text{ou} \quad u = o + i,$$

selon qu'on aura

$$A > B, \quad \text{ou} \quad A < B,$$

comme on le voit par la relation ci-dessus, qui donne $u < o$, ou $u > o$, selon qu'on a $A > B$, ou $A < B$. La figure répond ici au cas de $A > B$.

5. Enfin, les deux composants rectangulaires du couple G étant exprimés par $A\theta \cos o$ et $A\theta \sin o$, on aura, entre G et θ, la relation

$$G = \theta \cos o \sqrt{A^2 + B^2 \tang^2 o}.$$

Mais cette équation est déjà renfermée dans les précédentes; car, en y mettant au lieu de o sa valeur en i, tirée de la relation

$$B \tang o = A \tang (o - i),$$

elle reviendrait (en faisant $A \cos^2 o + B \sin^2 o = I$) à l'équation trouvée plus haut,

$$G \cos i = I\theta;$$

ce qui peut servir réciproquement à démontrer cette dernière, que j'avais posée directement en observant que $G \cos i$ est le moment total des forces appliquées, estimé autour de OI, et que $I\theta$ est de même, par rapport à cet axe OI, la somme des moments de toutes les forces qui naissent de la rotation θ due au même couple G.

6. Au reste, il est bien évident que, des huit quantités désignées par A, B, G, I, θ, i, o, u, il n'y en a que quatre d'indépendantes. Car, en se donnant, par exemple, A et B, qui sont connues par la nature du corps, et les deux quantités G et u qui déterminent la grandeur et la position du couple d'impulsion, il est clair que le mouvement du corps est entièrement déterminé, et que tout le reste s'ensuit. Ainsi il ne peut y avoir que quatre équations différentes entre les huit quantités dénommées ci-dessus.

J'ai donné d'abord ces différentes relations, parce qu'elles pourront servir, dans chaque problème, à présenter les formules entre les seules données immédiates qu'on y voudra considérer.

QUESTION PROPOSÉE.

7. Pour arriver maintenant d'une manière naturelle à la question précise qu'on se propose ici de résoudre, je remarque en premier lieu que, si le corps frappé par le couple G (*fig.* 1) était abandonné à lui-même, l'axe instantané OI décrirait, dans l'intérieur du corps, un cône droit et circulaire autour de l'axe OA; et, dans l'espace absolu, un autre cône droit et circulaire autour de l'axe OG, qui resterait fixe : et le mouvement du corps serait exactement le même que si le premier cône (IOA) roulait uniformément sans glisser sur la surface du cône fixe (IOG). Tel est donc le mouvement que suivrait le corps s'il était libre de toute action étrangère : c'est la rotation *naturelle* d'un corps qui a reçu l'impulsion d'un couple, et qui reste abandonné à sa propre inertie; et cette rotation simple est à la rotation quelconque d'un corps, ce que le mouvement uniforme d'un point en ligne droite est au mouvement de ce point en ligne courbe.

Mais si le corps, au lieu d'être abandonné à lui-même, est soumis à l'action continuelle d'un couple accélérateur étranger K, ce couple fera naître, à chaque instant dt, un couple infiniment petit $K\,dt$ qui se composera avec le couple d'impulsion G, et fera varier continuellement l'axe et la grandeur de ce couple; de sorte que l'axe instantané OI ne décrira plus le même cône dans l'intérieur du corps, ni le même cône dans l'espace absolu. Or on demande ici quel devrait être ce couple accélérateur K pour que le mouvement du corps fût le même que si le cône droit et circulaire (IOA) roulait uniformément, non plus sur le cône (IOG), mais sur un autre cône fixe (IOV) décrit par OI autour d'un axe OV situé d'une manière quelconque dans le plan des axes OI et OA. Ce serait le cas remarquable du mouvement uniforme de l'axe OA d'un sphéroïde autour d'un axe fixe OV, sans aucune nutation de cet axe OA, ni aucune variation de la vitesse angulaire du corps sur le même axe.

8. Pour résoudre cette question, j'observe que si le couple K est bien choisi, l'axe OA du corps et l'axe OG du couple d'impulsion doivent toujours tomber dans un même plan avec l'axe fixe OV. Il faut donc que le mouvement angulaire du pôle (A) de la figure et

celui du pôle (G) du couple d'impulsion autour du même axe fixe (OV) soient toujours égaux entre eux. Il n'y a donc qu'à chercher ces deux mouvements et à les égaler. Or, soit désignée par α l'inclinaison de l'axe OA du corps à l'axe fixe OV, et concevez la rotation actuelle θ décomposée en deux, l'une autour de OA, l'autre autour de OV. Il est évident que, par la première autour de OA, le pôle (A) du corps reste immobile, et que, par la seconde, il tourne autour de l'axe fixe OV avec une vitesse angulaire exprimée par cette même rotation. Or, suivant le parallélogramme des rotations, cette seconde composante de θ est exprimée par $\theta \frac{\sin o}{\sin \alpha}$. Donc, en désignant par le symbole $\frac{d(\mathrm{A})}{dt}$ le mouvement angulaire du pôle (A) de la figure autour de l'axe OV, on a

$$\frac{d(\mathrm{A})}{dt} = \theta \frac{\sin o}{\sin \alpha}.$$

Cherchons maintenant la vitesse angulaire que prend le pôle (G) du couple d'impulsion, par l'accession du couple accélérateur K. J'observe d'abord que ce couple K doit avoir son axe dans la ligne des nœuds, afin que le couple Kdt, étant composé avec G, ne tende qu'à faire pencher l'axe du couple résultant vers cette ligne des nœuds, sans faire varier ni son inclinaison à l'axe fixe OV, ni la grandeur du couple G. Or maintenant ce couple Kdt, qui a son axe dans la ligne des nœuds, étant composé avec le couple d'impulsion G, donne, au bout d'un instant, la position nouvelle de OG dans la diagonale du rectangle construit sur les deux lignes Kdt et G, qui représenteraient les axes et les grandeurs de ces deux couples. L'extrémité de la ligne G (que je prendrai pour le pôle du couple d'impulsion) est donc portée, au bout d'un instant, suivant une direction parallèle à la ligne des nœuds par un espace Kdt; et cet espace étant divisé par la distance G $\sin(\alpha - u)$ de ce pôle (G) à l'axe fixe OV, donne $\frac{\mathrm{K}\,dt}{\mathrm{G}\sin(\alpha - u)}$ pour l'angle qu'il décrit en un instant autour de cet axe. On a donc, en désignant par le symbole $\frac{d(\mathrm{G})}{dt}$ le mouvement angulaire du pôle (G) autour de l'axe fixe,

$$\frac{d(\mathrm{G})}{dt} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{G}\sin(\alpha - u)}.$$

Donc, si l'on veut qu'au bout d'un instant l'axe OA du corps, l'axe OG du couple, et, par conséquent, l'axe OI de la rotation, se retrouvent dans un même plan et sous les mêmes angles avec l'axe fixe OV, afin que le mouvement soit encore le même dans l'instant suivant, et se perpétue ainsi de la même manière à l'infini, il faut poser la condition

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dG}{dt},$$

et, par conséquent, l'équation

$$\frac{\mathcal{G}\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{K}{G\sin(\alpha - u)},$$

d'où l'on tire, pour la détermination du couple K,

$$K = \frac{G\mathcal{G}\sin\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin(\alpha - u).$$

Ce qu'il fallait trouver.

Corollaire I.

9. On voit d'abord par cette expression que le sens du couple accélérateur K ne dépend point du sens du couple d'impulsion G, ou de celui de la rotation $\mathcal{G}$ à laquelle ce couple G donne naissance. Car, comme le sens de $\mathcal{G}$ change toujours en même temps que celui de G, et que l'expression ne renferme que le produit $G\mathcal{G}$, il en résulte que le couple K, toutes choses d'ailleurs égales, reste toujours de même sens, quel que soit le sens du couple d'impulsion. Il en est de ce couple comme de celui qui provient des forces centrifuges, et dont le sens est toujours le même, dans quelque sens que le corps tourne.

Corollaire II.

10. On voit ensuite que ce couple K (*fig.* 4) est *nul* lorsque l'angle α est *nul*. En effet, si α est nul, l'axe OI se confond avec l'axe OA, le cône roulant se réduit à son axe, et un tel cône, qui n'est plus qu'une droite, peut rouler à l'infini sur la surface du cône fixe sans y avancer d'un pas, et, par conséquent, en restant immobile dans l'espace absolu. Or, c'est ce qui doit naturellement arriver dans le cas dont il

s'agit; car, o étant supposé nul, u est nul aussi, et, par conséquent, l'axe OG du couple d'impulsion se confond avec OA, qui est un axe *principal* du corps, et le seul couple G suffit pour faire tourner le corps à l'infini sur cet axe : d'où il suit que le couple accélérateur étranger K doit être *nul*.

11. Le couple K est encore nul quand on a $\alpha = u$, et c'est ce qui doit être; car si $\alpha = u$, l'axe fixe OV se confond avec OG (*fig.* 5 et 6), et le cône (IOA) roule alors *de lui-même* sur le cône fixe (IOG), sans avoir besoin d'aucun couple étranger K qui l'y oblige.

Corollaire III.

12. Si l'angle α est égal à l'angle o (*fig.* 7), le couple K se réduit à

$$K = G\mathcal{G}(\sin o - u),$$

ou bien (à cause de $u = o - i$), à

$$K = G\mathcal{G}\sin i,$$

ce qui est précisément l'expression d'un couple égal et contraire à celui qui provient des forces centrifuges; et c'est, en effet, ce qui doit être. Car supposez qu'un tel couple accélérateur agisse sans cesse sur le corps autour de la ligne des nœuds, il est clair que ce corps tournera perpétuellement sur la même droite OI, comme si cette droite était un *axe fixe*. Or, dans notre hypothèse de l'angle α égal à l'angle o, l'axe OI se confond avec l'axe OV, et le cône mobile (IOA) peut rouler à l'infini sur un cône fixe qui se réduit à son axe OV, sans que la ligne de contact OI se déplace, ni dans le corps, ni dans l'espace absolu.

Corollaire IV.

D'un cône qui roule sur un plan.

13. Lorsque l'angle $(\alpha - o)$ est égal à un angle droit (*fig.* 9), on a

$$\sin \alpha = \cos o$$

et

$$\sin(\alpha - o) = \sin(\alpha - o - i) = \sin(1^{\text{dr}} - i) = \cos i.$$

et K devient

$$K = G\delta \tang o \cos i = I\delta^2 \tang o.$$

Ce cas particulier de $\alpha - o = 1^{dr}$ est celui où la surface du cône fixe se réduit à un plan. Ainsi, quand le mouvement du corps est le même que si le cône (IOA) roulait sur un plan, le couple accélérateur qui l'anime est égal à la *force vive* $I\delta^2$ du corps, multipliée par la tangente de la demi-ouverture o du cône roulant.

Corollaire V.

D'un plan qui roule sur un cône.

14. Si cette demi-ouverture o du cône roulant est égale à un angle droit (*fig.* 10), ce cône se réduit au plan de son équateur, et c'est le cas particulier d'un *plan qui roule sur la surface d'un cône fixe* IOV.

Dans ce cas, où l'angle o est un droit, l'angle u est aussi un droit comme on le voit par la relation

$$B \tang o = A \tang u,$$

et l'expression du couple accélérateur K devient

$$K = -G\delta \cot \alpha.$$

Corollaire VI.

Si α est égal à un droit (*fig.* 11), K devient $G\delta \sin o . \cos u$, qui peut se ramener à l'expression

$$K = A\delta^2 \sin o \cos o.$$

C'est le cas d'un cône qui roule sur le cône *complémentaire*.

Corollaire VII.

Cas singulier, où le cône roulant se confond avec le cône fixe.

15. Si α est *nul* (*fig.* 8), on trouve $K = -\infty$: et en effet, dans ce cas singulier, le cône mobile se confond avec le cône fixe, et ne peut y rouler sans l'accession d'un couple accélérateur infini ; et il en

est de même dans le cas de α égal à deux droits, lequel donne

$$K = +\infty.$$

Pour bien entendre ceci, concevez que α ne soit pas tout à fait nul, mais positif et très-près de zéro; le cône mobile sera presque confondu avec le cône fixe sur lequel il roule, et la ligne de contact OI aura un mouvement angulaire très-rapide autour de OV. L'axe du couple G tournera donc avec la même rapidité autour du même axe fixe OV: et, par conséquent, il faudra que le couple accélérateur K soit très-grand, afin que le couple $K\,dt$, qu'il produit à chaque instant, étant composé avec G, donne au pôle (G) cette même vitesse angulaire très-rapide que doit avoir le pôle instantané (I), aussi bien que le pôle (A) de la figure. On voit donc qu'en supposant α tout à fait nul, c'est-à-dire les deux cônes confondus, on doit trouver la valeur de K *infinie*.

Et la même chose doit avoir lieu dans le cas de $\alpha = 2$ *droits*, où les deux surfaces coniques se trouvent encore confondues: ce qui donne également pour K une valeur *infinie*.

La seule différence qu'on puisse ici remarquer, c'est que, dans le cas de $\alpha = 0$, on trouve $K = -\infty$; et que, dans le cas de $\alpha = 2$ *droits*, on trouve $K = +\infty$. Cette différence de signe tient à ce que le premier cas de $\alpha = 0$ étant ici considéré comme la limite de ceux où l'axe fixe OV tend à se confondre avec l'axe OA du cône roulant, le pôle fixe (V) est toujours supposé tomber entre les deux pôles (G) et (A): d'où il résulte que les mouvements de ces deux pôles, estimés parallèlement à la ligne des nœuds, doivent être de sens contraires, et qu'ainsi $K\,dt$ doit être de signe contraire à $\theta \sin o\,dt$, et, partant, avoir le signe $-$, si l'on regarde $\theta \sin o\,dt$ comme positif. Mais le cas de $\alpha = 2$ *droits* étant considéré comme la limite de ceux où l'axe OV tend à se confondre avec le *prolongement* de OA, cet axe fixe OV est supposé laisser toujours le pôle (G) et le pôle (A) tous deux d'un même côté, et, partant, les mouvements de ces deux pôles, parallèlement à la ligne des nœuds, se font dans le même sens, et le couple $K\,dt$ doit présenter le même signe que $\theta \sin o\,dt$.

Remarque I.

16. Ce que l'on vient de dire, à l'occasion du cas singulier qui précède, donne en général la raison des changements de signe que subit le couple K dans l'étendue de toutes les valeurs qu'on peut donner à l'inclinaison mutuelle α des axes OV et OA de nos deux cônes; car les angles o et u, étant considérés comme positifs et moindres qu'un droit, on voit par la formule générale

$$K = G\,\mathcal{G}\,\frac{\sin o}{\sin \alpha}\cdot \sin(\alpha - u),$$

que K a le signe $-$ depuis $\alpha = o$ jusqu'à $\alpha = u$, et le signe $+$ depuis $\alpha = u$ jusqu'à $\alpha = 2$ droits $= \pi$; qu'au delà de cette valeur il reprend le signe $-$ jusqu'à l'angle $\pi + u$, et ensuite le signe $+$ jusqu'à la fin de la circonférence 2π. Or c'est ce qui doit être, puisque dans ces intervalles où K a le signe $-$, l'axe fixe OV tombe évidemment entre les deux pôles (A) et (G), tandis que dans les autres intervalles où K a le signe $+$, cet axe fixe laisse les pôles (A) et (G) tous deux d'un même côté.

Remarque II.

17. On vient de voir pourquoi le couple K présente tel ou tel signe, selon que l'axe du cône fixe a telle ou telle position par rapport aux deux axes OA et OG. Mais il est bon de remarquer encore trois autres cas relatifs à la position que peut avoir l'axe instantané OI ou la ligne de contact de nos deux cônes, à l'égard des axes OA et OV de ces deux cônes.

1°. Si OI tombe entre les deux axes OA et OV (*fig.* 1), les deux surfaces coniques se touchent *extérieurement;* de sorte que le cône mobile roule en touchant par sa surface *convexe* la surface *convexe* du cône fixe. Et si l'on regarde cette première figure, on voit que le mouvement angulaire du pôle autour de l'axe fixe OV se fait dans le *même sens* que la rotation du corps estimée autour du même axe OV, sens de mouvement qu'on prend pour terme de comparaison, et qu'on appelle le sens *direct* : de sorte que, dans ce premier cas, on peut dire que la ligne des nœuds a, sur le plan fixe, un *mouvement direct*.

2°. Si OI laisse les deux axes OA et OV tous deux d'un même côté, et dans cet ordre (I), (A), (V) (*fig.* 2), le cône mobile (IOA) tombe alors dans l'intérieur du cône fixe (IOV); de sorte qu'il roule en touchant par sa surface *convexe* la surface *concave* de ce cône fixe: et, dans ce cas, il est visible que le mouvement de la ligne des nœuds se fait dans un sens contraire à celui de la rotation δ, ou qu'il est ce qu'on appelle *rétrograde*.

3°. Si l'axe OI laisse encore d'un même côté les deux axes OA et OV, mais dans l'ordre (I), (V), (A) (*fig.* 3), c'est alors le cône fixe qui tombe dans l'intérieur du cône mobile : de sorte que celui-ci l'enveloppe, et roule en touchant par sa surface *concave* la surface *convexe* du cône fixe dont il s'agit; et, dans ce cas, le mouvement des nœuds se fait dans le même sens que la rotation du corps, c'est-à-dire qu'il est encore *direct*, comme dans le premier cas.

Remarque III.

Où l'on reconnaît le sens suivant lequel agit toujours le couple accélérateur K.

18. Mais il y a encore une chose importante à remarquer; c'est que, dans tous les cas, c'est-à-dire, soit que le cône roulant tombe en *dehors*, ou en *dedans* du cône fixe, soit qu'il *l'enveloppe*, le sens du couple accélérateur K est toujours tel, que si ce couple agissait sur le corps en repos, il tendrait toujours à *détacher* le cône roulant de la surface du cône fixe avec lequel il est en contact, et jamais à l'appuyer contre cette surface. C'est ce qu'il est très-aisé de reconnaître dans les trois cas que l'on vient de parcourir ci-dessus; et de là résulte une conséquence toute nouvelle que nous allons développer dans l'article suivant.

Théorème.

19. Supposons que les surfaces de nos deux cônes, qui ne sont ici que des surfaces fictives, deviennent des surfaces réelles et *résistantes*, de sorte que le cône mobile puisse réellement s'appuyer sur le cône fixe. Je dis que, si l'on vient à supprimer tout à coup le couple accé-

lérateur K, le mouvement du corps restera exactement le même qu'auparavant, mais qu'alors le cône mobile *pressera* continuellement la surface du cône fixe avec la même force que si le corps était animé par un couple accélérateur $-K$, qui tendît sans cesse à l'appuyer ou à le presser contre cette surface.

Soit, en effet, le corps devenu libre de toute action étrangère, et abandonné à la seule impulsion du couple G : si l'on applique, autour de la ligne des nœuds, les deux couples égaux et contraires $K\,dt$ et $-K\,dt$, il est clair que l'état du corps ne sera pas changé. Mais alors, au lieu de voir le corps comme abandonné à la seule impulsion du couple G, je puis le voir comme animé par l'ensemble des trois couples G, $K\,dt$, $-K\,dt$. Or, de ces trois couples, le dernier $-K\,dt$, tendant à presser le cône mobile sur la surface du cône fixe, peut être considéré comme détruit par la résistance de cette surface. Restent donc les deux couples G et $K\,dt$ dont l'ensemble est capable de faire rouler le cône mobile sur le cône fixe, et cela d'une manière libre, je veux dire comme si ce cône fixe n'existait pas, et, par conséquent, sans exercer la moindre pression sur sa surface. Ainsi la surface fixe ne peut ressentir d'autre pression que celle qui provient du couple $-K\,dt$ dont elle détruit l'effort à chaque instant.

On a donc ce théorème :

Si le cône droit et circulaire (IOA) *est posé sur le cône fixe* (IOV) *de même sommet* O, *et qu'on lui imprime tout à coup une rotation* θ *autour de la ligne de contact* OI, *ce cône abandonné à lui-même roulera uniformément sur le cône fixe, et il en pressera à chaque instant la surface avec la même force que si, étant en repos dans cet instant, il se trouvait sollicité par un couple accélérateur étranger* $-K$ *déterminé par l'équation précédente,*

$$K = G\theta\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\cdot\sin(\gamma-\alpha).$$

REMARQUE.

20. Comme le couple G est proportionnel à la rotation θ qu'il imprime, on voit que cette pression du cône roulant sur le cône fixe est en raison du carré de la rotation θ du corps; en sorte que si la

rotation devient double, la pression du cône roulant devient quadruple, etc. Tout ceci est analogue à la pression qu'exerce un point sur le contour d'une courbe fixe où il est forcé de se mouvoir. Le mouvement naturel d'un point libre est d'aller en ligne droite; de manière que, si on l'enferme dans un canal rectiligne, il n'en pressera la surface d'aucun côté. De même, pour le cône IOA, qui tourne actuellement sur sa génératrice OI, son mouvement naturel est de rouler uniformément sur le cône (IOG) décrit autour de l'axe du couple G qui a imprimé cette rotation θ; de sorte que le cône roulant n'exerce aucune pression sur le cône (IOG). Mais si, au lieu de ce cône particulier (IOG), on en présente un autre (IOV) sur lequel le cône mobile trouve un appui, il y roulera encore sans rien perdre de sa rotation imprimée θ, mais il pressera continuellement la surface de ce cône fixe, comme s'il était doué à chaque instant vers ce cône d'une certaine pesanteur proportionnelle au carré de θ.

Lorsqu'un point se meut en ligne courbe, soit en vertu d'une force centrale, soit à cause de la résistance d'un canal curviligne où il est enfermé, si l'on vient à supprimer tout à coup cette force ou cette résistance, le point devenu libre s'échappe par la *tangente* à la courbe, avec la vitesse dont il était animé au moment de la suppression de toutes les forces étrangères. De même ici, quand le cône roulant (IOA) devient libre de toute action étrangère, il s'échappe, pour ainsi dire, de la surface conique sur laquelle il roulait, pour prendre son mouvement sur celle du cône (IOG), qui est comme la tangente de la première.

Solution du cas singulier où l'on trouve $K = \infty$.

21. Dans le cas singulier de $\alpha = o$, où les surfaces des deux cônes se confondent, on trouve K *infini*, comme on l'a déjà remarqué à l'art. **15**. Il en résulterait donc ici que la pression continuelle $-K\,dt$ du cône mobile sur la surface du cône fixe serait infiniment grande, ce qui pourrait être regardé comme une véritable percussion finie qui se renouvellerait à chaque instant contre cette surface. Cette hypothèse d'un cône mobile qui, en vertu d'une rotation primitive θ, autour d'une de ses génératrices OI, pourrait *rouler* continuellement sur la

surface fixe d'un autre cône de même centre, de même axe et de même rayon, n'est donc ici qu'une hypothèse purement mathématique : car, dans la réalité, il est évident que la chose se passerait d'une autre manière. Et, en effet, on pourrait toujours voir la rotation θ comme décomposée en deux : l'une, $\theta \cos o$, autour de l'axe même OA du cône mobile; l'autre, $\theta \sin o$, autour de la perpendiculaire à cet axe. Or il est visible que celle-ci serait détruite par la résistance de la surface fixe, qui recevrait ainsi, au premier instant, une *percussion* mesurée par le couple $B\theta \sin o$; mais la première rotation $\theta \cos o$, autour de l'axe OA, obtiendrait manifestement son effet, et le cône mobile tournerait librement sur son axe sans exercer la moindre action sur la surface du cône fixe. D'où l'on voit que, dans le cas singulier dont il s'agit, le cône ne *roule* plus, mais ne fait que *glisser* sur la surface du cône fixe : mouvement qui ne répond plus à la question proposée, mais à une autre, comme on aurait pu d'ailleurs en être averti par la valeur *infinie* que le calcul donne alors pour la grandeur du couple K.

Transformations diverses de l'équation de condition

$$K = G\theta \frac{\sin o}{\sin \alpha} \cdot \sin(\alpha - u). \tag{1}$$

22. J'ai laissé jusqu'ici à cette équation la forme simple sous laquelle elle s'est présentée dans notre analyse; mais on peut la transformer de plusieurs manières, en éliminant, au moyen des relations données au commencement de ce Mémoire, quelques-unes des quantités G, θ, o, α, u qui entrent dans cette équation, pour y introduire celles qu'on voudra considérer comme les *données immédiates* du problème.

Ainsi, en chassant par exemple θ au moyen de la relation

$$\theta \sqrt{A^2 \cos^2 o + B^2 \sin^2 o} = G,$$

et ensuite l'angle o au moyen de la relation

$$B \operatorname{tang} o = A \operatorname{tang} u,$$

on trouvera

$$K = \frac{G^2}{B} \cdot \frac{\sin u}{\sin \alpha} \cdot \sin(\alpha - u), \tag{2}$$

ou il n'y a plus d'autres données que G, u, α et B, dont les deux pre

mieres G et u répondent à la grandeur du couple d'impulsion et à sa position dans le corps; la troisième α, à l'inclinaison de l'axe OA de ce corps sur l'axe fixe OV; et enfin la dernière B, à la nature du corps dont il s'agit.

23. D'après cette équation, qui ne contient plus le moment d'inertie A du corps autour de son axe, on voit que le couple accélérateur K sera le même pour tout autre corps qui aurait le même moment d'inertie B autour des diamètres de l'équateur. Ainsi dans tous ces corps, qui ne diffèrent que par la valeur A de leur moment d'inertie autour de leur axe de figure, le mouvement angulaire du pôle, ou le mouvement de *précession*, sera le même. Mais il n'en faut pas conclure que tous ces corps se mouvront de la même manière; car, comme dans ces corps le moment A varie de l'un à l'autre, l'angle o, et par conséquent l'angle $(\alpha - o)$, varient en même temps, d'après la relation nécessaire $B \tang o = A \tang u$; et, par conséquent, ce sera pour chaque corps le mouvement d'un cône particulier à la demi-ouverture o qui roulera sur un cône particulier à la demi-ouverture $(\alpha - o)$. La seule chose qui sera commune aux mouvements de tous ces corps, sera la *précession* des pôles (A) et (G).

24. Si, de la formule précédente, on élimine l'angle u, par la relation ci-dessus entre o et u, on trouvera l'équation

$$(3) \qquad K = G^2 \tang o \frac{(A - B \tang o . \cot \alpha)}{A^2 + B^2 \tang^2 o},$$

qui ne contient d'autres angles que o et α.

25. Si, au lieu de α qui marque la distance angulaire des axes OA et OV de nos deux cônes, on veut introduire la demi-ouverture ω du cône fixe, on n'aura qu'à substituer $\omega + o$ au lieu de α; et alors on aura

$$(4) \qquad K = G^2 \tang o \frac{[A - B \tang o \cot(\omega + o)]}{A^2 + B^2 \tang^2 o}.$$

26. Si, au lieu du couple donné G, on veut prendre comme donnée la rotation imprimée θ autour de la ligne de contact OI des deux cônes, on aura $G^2 = \theta^2 \cos^2 o (A^2 + B^2 \tang^2 o)$; et, substituant cette valeur, il viendra

$$(5) \qquad K = \theta^2 \sin o \cos o [A - B \tang o \cot(\omega + o)].$$

C'est une expression très-simple du couple accélérateur K, par la rotation δ qu'on suppose imprimée au cône mobile autour de sa ligne de contact avec le cône fixe, et par les angles o et ω qui marquent les demi-ouvertures de ces deux cônes.

Exemples de ces mouvements, pris dans la nature.

27. Supposons que l'axe OV du cône fixe soit *vertical*, et que le corps mobile soit, comme dans la nature, un corps qui pese de haut en bas suivant VO, en vertu de la gravité g.

Si l'on désigne par m la masse du corps, et par l la distance au point O, de son centre de gravité C que je suppose tomber sur l'axe même de figure OA, on aura évidemment $m \,.\, gl \sin \alpha \,.\, dt$ pour le moment du couple $K\,dt$ que la gravité fait naître en un instant dt autour de la ligne ON *des nœuds*. Si donc, dans l'une ou l'autre des formules qui précèdent, on substitue au lieu de K l'expression $mgl \sin \alpha$, on aura une équation qui déterminera le couple G qu'on doit appliquer au corps, ou bien la rotation δ qu'il faudra lui imprimer autour de OI, pour que le mouvement de ce corps *pesant* soit le même que si le cône (IOA) roulait uniformément sur le cône fixe (ION) : et la condition d'un tel mouvement sera exprimée par l'équation

$$mgl \sin \alpha = \delta^2 \sin o \,.\, \cos o \,(A - B \tang o \,.\, \cot \alpha) \,.$$

ou par toute autre transformée équivalente (**22** ... **26**).

28. On voit donc qu'un cône *pesant* (IOA), ayant reçu autour de sa génératrice OI une rotation primitive δ déterminée par cette équation, roulera librement sur la surface du cône vertical (IOV), ne tendant ni à presser cette surface, ni à s'en détacher, et demeurant ainsi comme suspendu par sa rotation actuelle δ, qui fera sans cesse équilibre au poids du corps, et empêchera ce corps de tomber vers le plan horizontal.

29. Si la gravité cessait d'agir, mais que la surface du cône fixe devînt une surface résistante, le cône mobile continuerait de rouler avec la même vitesse δ : mais il *presserait* alors la surface du cône fixe avec la même force que s'il était doué d'une pesanteur $-g$, égale et contraire à la pesanteur naturelle.

30. Dans cette hypothèse du cône mobile dépourvu de pesanteur, mais pouvant s'appuyer contre le cône fixe, si l'on suppose imprimée à ce cône mobile une rotation *quelconque* θ' autour de la ligne de contact OI, il roulera uniformément sur le cône fixe, et le pressera à chaque instant comme s'il était doué de bas en haut d'une pesanteur $-g'$ déterminée par l'équation

$$mg'l \sin\alpha = \theta'^2 \sin o \,.\, \cos o\,(\mathrm{A} - \mathrm{B}\tang o \,.\, \cot\alpha).$$

Si donc, θ' étant $> \theta$, et, par conséquent, $g' > g$, on rend au corps sa pesanteur naturelle $+g$, il continuera de rouler de la même manière, mais il ne pressera plus le cône fixe qu'en vertu d'une force égale à la *différence* de g' à g.

Si le cône pesant, au lieu de rouler au dehors, roulait dans l'intérieur de la surface du cône fixe, de manière que son poids tendît à l'appuyer sur cette surface, il la presserait alors comme s'il était doué d'une pesanteur $g' + g$ [g' étant ici donné par l'équation $mg\,l \sin\alpha = \theta'^2 \sin o \cos o\,(\mathrm{A} + \mathrm{B}\tang o \,.\, \cot\alpha)$].

31. Si l'ouverture du cône fixe est égale à un angle droit, la surface de ce cône devient un plan, et l'on a le cas particulier d'un cône pesant (IOA) qui roule sur un plan horizontal. L'équation de condition se réduit alors (à cause de $\cot\alpha = -\tang o$), à

$$mgl \cos o = \mathrm{I}\theta^2 \tang o.$$

Si donc le cône pesant (IOA) tangent au plan horizontal, et posé *en dessous*, reçoit tout à coup, autour de la ligne de contact, une vitesse angulaire θ déterminée par cette équation, ce cône roulera en liberté sur la face *inférieure* de ce plan, sans la presser, ni s'en détacher, et comme si ce plan n'existait pas.

Si on lui imprime une vitesse plus grande θ', il roulera de même avec cette nouvelle vitesse; mais alors il pressera le plan de bas en haut, comme si, étant supposé en repos dans l'instant que l'on considère, il était doué d'une pesanteur $g' - g$ de sens contraire à la pesanteur naturelle, g' étant déterminée par l'équation

$$mg'l \cos o = \mathrm{I}\theta'^2 \tang o.$$

Si le cône, au lieu d'être au-dessous du plan horizontal, était posé

au-dessus, on pourrait lui imprimer une rotation θ' de *grandeur quelconque;* il roulerait uniformément avec cette vitesse imprimée θ', et il presserait alors le plan, de haut en bas, avec la même force que s'il était doué d'une pesanteur $g' + g$ de même sens que sa pesanteur naturelle.

Il est facile de multiplier ces exemples : je me contenterai d'en ajouter un nouveau, tiré du mouvement de la Terre autour de son centre de gravité.

32. Considérons la Terre comme un sphéroïde, ou, en général, comme un corps doué de deux moments égaux d'inertie; et soient toujours désignés par A le moment d'inertie autour de l'axe de ce corps, et par B le moment d'inertie autour d'un diamètre quelconque de l'équateur. Si l'on observe le mouvement de la Terre par rapport aux étoiles regardées comme fixes, on trouve que ce sphéroïde tourne en un jour sur son axe OA, tandis que cet axe tourne lui-même en sens contraire autour de l'axe OV de l'écliptique, et avec une moyenne vitesse angulaire φ, qui est d'environ $0'',136795$ sexagésimales par jour, ce qui fait la *précession diurne* des équinoxes.

Si donc, à partir du centre O, on porte sur l'axe OA une ligne $\theta = 360^\circ$ qui marque la rotation *diurne* de la Terre, et sur le prolongement de VO, une ligne $\varphi = 0'',136795$ qui marque sa rotation autour de l'axe de l'écliptique, la diagonale du parallélogramme construit sur ces deux lignes représentera l'axe et la grandeur de la rotation réelle θ dont la Terre est animée dans l'instant que l'on considère. On aura donc, pour déterminer cette rotation θ et l'inclinaison o de son axe OI à l'axe de figure OA, cette suite de rapports égaux :

$$\varphi : \theta : \varphi :: \sin o : \sin \alpha : \sin(\alpha + o),$$

α étant l'inclinaison de OA à OV, ou, ce qui revient au même, l'inclinaison de l'équateur à l'écliptique.

Ainsi, de ces trois seules quantités, qui sont données par l'observation, savoir : la *rotation diurne*, la *précession* des équinoxes et l'*obliquité* de l'écliptique, on peut conclure la rotation réelle θ de la Terre sur son axe instantané OI, et la distance angulaire o de cet axe à l'axe OA

de la figure. Cet angle o est, comme on le voit, très-petit; car de la proportion précédente

$$\varphi : \rho :: \sin\alpha : \sin(\alpha + o)$$

en y mettant, au lieu de φ et ρ leurs valeurs ci-dessus, et au lieu de α, $23^\circ 27' 32''$, on tire

$$\tang o = \frac{0'',136795 . \sin 23^\circ 27' 32''}{360^\circ - 0'',136795 . \cos 23^\circ 27' 32''},$$

ce qui donne un angle o très-petit, et qui, mesuré à la surface de la Terre, répondrait à peine à un arc de 27 centimètres de longueur.

Le pôle instantané I de la rotation est donc très-voisin du pôle A de la figure : et si l'on suppose $A > B$, le pôle G du couple actuel qui anime la Terre, en est encore plus proche; car, en nommant u l'inclinaison de OG sur OA, la relation $B \tang o = A \tang u$ nous donne u plus petit que l'angle o, et, par conséquent, l'axe OG plus voisin que OI de l'axe OA.

Quant à la rotation réelle et instantanée θ, on voit aussi qu'elle diffère extrêmement peu de la rotation apparente ρ sur l'axe de figure OA, puisqu'on a la proportion

$$\theta : \rho :: \sin\alpha : \sin(\alpha + o),$$

et que l'angle o est très-petit par rapport à l'angle α.

33. Tel est donc, d'après l'observation, le mouvement *moyen* du sphéroïde terrestre autour de son centre de gravité : je dis le mouvement *moyen*, parce que, indépendamment de ce petit mouvement *rétrograde* φ, par lequel l'axe terrestre tourne autour des pôles de l'écliptique, et qui fait la *précession* des équinoxes, on en observe encore un autre par lequel cet axe s'abaisse et se relève alternativement sur le plan de l'écliptique, et fait ce qu'on appelle la *nutation* de l'axe terrestre. Mais ce second mouvement étant *périodique*, et comme une simple oscillation de l'axe dans un arc d'une très-petite étendue, s'efface, pour ainsi dire, dans la considération du mouvement général de la Terre, pour ne laisser voir, avec la rotation diurne, que le mouvement de précession, qui est très-petit, mais qui a toujours lieu dans un même sens.

En ne considérant donc que ces deux mouvements, et les supposant tous les deux uniformes, on peut dire que le mouvement de la Terre, autour de son centre de gravité O, est exactement le même que si le cône (IOA) décrit sous l'angle o autour de l'axe OA du sphéroïde, roulait uniformément, sans glisser, sur la surface intérieure du cône fixe (IOV), décrit sous l'angle $(\alpha + o)$ autour de l'axe OV de l'écliptique.

Or on a vu que, pour l'existence d'un tel mouvement, il faut : 1° que la Terre reçoive à chaque instant l'action d'un couple étranger perpendiculaire à la ligne des nœuds; 2° que ce couple agisse toujours dans le *sens* où il tendrait à détacher le cône roulant de la surface du cône fixe, et, par conséquent, à rapprocher l'axe de la Terre de l'axe de l'écliptique, ou, ce qui revient au même, à *coucher* l'équateur sur le plan de l'écliptique; et 3° enfin il faut qu'on ait, pour la grandeur de ce couple accélérateur K, l'équation

$$K = \mathcal{G}^2 \sin o \cos o \,(A + B \operatorname{tang} o \cot \alpha).$$

Ainsi, pour que la Terre suive le mouvement actuel qu'on y observe, il faut nécessairement que de l'attraction des corps étrangers, tels que la Lune et le Soleil, il vienne à chaque instant sur elle un couple accélérateur qui, étant *estimé* autour de la ligne des nœuds, remplisse les conditions qu'on vient de dire. Si cette action étrangère n'existait pas, ou venait tout à coup à cesser, le mouvement de la Terre serait changé, et le cône (IOA), au lieu de rouler sur le cône (IOV) décrit autour de l'axe de l'écliptique, roulerait sur le petit cône (IOG) décrit autour de l'axe OG du couple d'impulsion, axe qui deviendrait fixe dans l'espace absolu. L'axe de la Terre projeté sur le plan de l'écliptique, et par conséquent la ligne des nœuds, qui n'est que la perpendiculaire à cette projection, n'aurait donc plus ce mouvement rétrograde qui fait la précession des équinoxes, mais seulement une oscillation très-rapide, à peu près d'un jour, dans un angle très-petit $2u'$ tel qu'on aurait $\sin u' = \frac{\sin u}{\sin \alpha}$, α étant l'inclinaison moyenne de OA à OV; et pendant ce temps le même axe OA aurait, vers le plan de l'écliptique, une nutation ou balancement alternatif d'une amplitude $2u$. Mais poursuivons notre objet.

34. Nous avons trouvé ailleurs que le *couple moyen* N qui vient du *Soleil* pour faire tourner la Terre sur la ligne des nœuds, est exprimé par

$$N = \frac{3S(A - B)\sin\alpha\cos\alpha}{2r^3},$$

S étant la masse du Soleil, r sa moyenne distance à la Terre, et α l'obliquité de l'écliptique.

Nous avons trouvé ensuite que le couple moyen N′, qui vient de la Lune pour faire tourner la Terre sur la même ligne des nœuds, est exprimé par

$$N' = \frac{3L(A - B)\sin\alpha\cos\alpha}{2r'^3}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\gamma\right).$$

L désignant la masse de la Lune, r' sa moyenne distance à la Terre, et γ l'inclinaison de l'orbe lunaire au plan de l'écliptique.

On a donc, pour le couple moyen K qui provient de l'action de ces deux astres, estimée autour de la ligne des nœuds,

$$K = \frac{3(A - B)\sin\alpha\cos\alpha}{2}\left[\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\gamma\right)\right].$$

Si donc la précession observée des équinoxes est uniquement due à l'action de ce couple K, il faut d'abord que ce couple agisse dans le sens ou il tend à *coucher* l'équateur sur le plan de l'écliptique, et que, par conséquent, on ait, dans le sphéroïde terrestre, $A > B$: sans quoi le mouvement des équinoxes serait *direct*, au lieu d'être *rétrograde*. Cette première condition de $A > B$ est naturellement remplie si la Terre est un sphéroïde homogène *aplati* aux pôles ou *renflé* vers l'équateur, et elle peut encore avoir lieu dans une infinité d'autres cas où ce sphéroïde aplati serait composé de couches de différentes densités, comme tout nous porte à le croire.

Il faut ensuite que la *grandeur* de ce couple K satisfasse à l'équation précédente (n° **33**), et que, par conséquent, on ait l'équation

$$3\left(1 - \frac{B}{A}\right)\sin\alpha\cos\alpha\left[\frac{S}{r^3} + \frac{L}{r'^3}\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2\gamma\right)\right]$$
$$= 2\theta^2\sin\alpha\cos\alpha\left(1 + \frac{B}{A}\tang\alpha\cot\alpha\right),$$

où θ désigne la rotation réelle de la Terre sur son axe instantané OI, laquelle est exprimée par $\theta = \frac{2\pi \sin \alpha}{\sin(\alpha + o)}$.

35. Voilà donc une relation par laquelle on peut vérifier quelque quantité dont la valeur serait encore incertaine, comme la masse de la Lune, ou le rapport des deux moments d'inertie de la Terre, en supposant que toutes les autres nous soient connues par des mesures directes ou par la théorie de la pesanteur universelle.

Les angles α, γ, o, et les distances r, r' de la Terre au Soleil et à la Lune, peuvent se tirer de l'observation, et la loi de l'attraction donne le rapport de la masse du Soleil à celle de la Terre, rapport qui est environ celui de 354 936 à l'unité. Il ne reste donc d'indéterminés que la masse de la Lune et le rapport des moments d'inertie du sphéroïde terrestre; car la masse de la Lune n'est guère connue que par la partie de la force qu'on lui attribue pour soulever, conjointement avec le Soleil, les eaux de l'Océan; et le rapport B : A ne peut l'être par la seule connaissance de la figure de la Terre, à moins de faire quelque hypothèse sur la constitution intérieure de cette planète. Si l'on suppose la Terre homogène, et l'aplatissement de ce sphéroïde égal à $\frac{1}{308,65}$, tel que les mesures géodésiques paraissent l'indiquer, on trouvera facilement ce rapport de B à A; et mettant cette valeur dans l'équation précédente, on pourra voir quelle est la masse L de la Lune, qui doit répondre à cette hypothèse. La théorie du flux et reflux de la mer, et plusieurs phénomènes astronomiques, tels que la *nutation* de l'axe terrestre, etc., donnent, pour cette masse, $L = \frac{1}{88} T$ environ; et de cette valeur supposée exacte on pourrait tirer réciproquement le rapport B : A et voir s'il peut s'accorder avec quelque hypothèse sur la constitution intérieure de la Terre, l'aplatissement étant toujours supposé de $\frac{1}{308,65}$.

Au reste, ce rapport des deux moments d'inertie de la Terre me paraît devoir être presque indépendant de la variation de densité qui peut avoir lieu dans notre planète. Car, en la considérant comme un sphéroïde composé d'une infinité de couches homogènes terminées par des surfaces semblables, on pourrait supposer que la densité variât de l'une à l'autre d'une manière arbitraire, sans que le rapport B : A des moments d'inertie du corps en fût changé. Voilà donc une infinité de

sphéroïdes hétérogènes où les moments d'inertie B et A seront toujours dans le même rapport. Or, en concevant la Terre ainsi partagée en une infinité de couches semblables, il est assez naturel de supposer que la densité est à peu près uniforme dans chaque couche, et ne varie qu'en passant de l'une à l'autre : d'où il suit que, dans toutes les hypothèses qu'on peut faire sur la loi de cette variation, le rapport des moments d'inertie du sphéroïde demeure à très-peu près constant. Ce rapport nous paraît donc dépendre presque uniquement de la figure de la Terre, et très-peu de sa constitution intérieure, et c'est ce que confirme très-bien le calcul que nous avons fait ailleurs pour trouver la précession des équinoxes dans la simple hypothèse de l'homogénéité du sphéroïde terrestre, avec un aplatissement de $\frac{1}{308.65}$ tel que le donnent les mesures géodésiques. L'accord de ce calcul avec l'observation nous prouve que la variation de la densité dans l'intérieur de la Terre n'a aucune influence sensible sur la quantité de cette précession, et que, par conséquent, le rapport des deux moments d'inertie de la Terre est à très-peu près le même que si elle était homogène, ou composée de couches semblables dont chacune serait d'une densité uniforme.

Mais il y a plus : car si l'on cherche par le calcul le couple accélérateur qui vient d'un centre attirant S sur un corps quelconque T dont les dimensions soient très-petites en comparaison de sa distance au point S, on trouve que la valeur de ce couple est, à très-peu près, la même que si le corps T était un simple ellipsoïde homogène qui aurait les mêmes moments d'inertie. D'où l'on peut conclure que la précession et la nutation dépendent très-peu de la figure et de la constitution de la Terre, mais presque uniquement du rapport qu'il y a entre les deux moments d'inertie de cette planète. Si donc, ce rapport étant conservé, la Terre venait à changer de masse, de figure et de constitution intérieure, la précession et la nutation seraient encore très-sensiblement les mêmes qu'aujourd'hui. Ainsi toutes ces considérations ou hypothèses de figure, de densité, etc., de notre globe n'entrent presque pour rien dans la mesure des phénomènes dont il s'agit; ce qui est assurément très-digne d'être remarqué.

36. Mais, pour en revenir à notre théorie des cônes roulants, la-

quelle nous a donné l'équation très-simple

$$K = \theta^2 \sin o \cos o \,[A - B \operatorname{tang} o \cot \omega + o\,].$$

où les lettres o et ω sont les demi-ouvertures de nos deux cônes, je veux montrer qu'on pouvait parvenir à cette équation par une autre analyse assez délicate, et qui me paraît très-propre à éclaircir et à confirmer la première.

Seconde manière de parvenir à l'expression du couple accélérateur K *dont le cône roulant est animé.*

Soit, en conservant toutes les dénominations précédentes, le cône mobile (IOA), à la demi-ouverture o, qui roule actuellement sans glisser sur le cône fixe (IOV), à la demi-ouverture ω, en tournant sur la ligne de contact OI avec la vitesse angulaire θ.

Supposons que, du centre O et d'un rayon OI $= 1$, on décrive la surface de la sphère qui coupe celles des deux cônes suivant les deux circonférences s et σ. Soit ds l'arc décrit en un instant dt par le pôle I, et qui viendra se coucher au bout de cet instant sur l'arc égal $d\sigma$ de l'orbe fixe σ. Si l'on nomme de et $d\varepsilon$ les angles de contingence des deux surfaces coniques (IOA), (IOV) avec leur commun plan tangent suivant OI, on aura

$$de = \frac{ds}{r}, \quad d\varepsilon = \frac{d\sigma}{\rho},$$

r et ρ étant les rayons de courbure de ces deux surfaces au point I.

Or, θ étant la rotation autour de OI, il est visible qu'on a

$$\theta\, dt = de + d\varepsilon,$$

ce qui donne, en mettant pour de et $d\varepsilon$ leurs valeurs, et observant qu'on a toujours $ds = d\sigma$,

$$\theta\, dt = d\sigma \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho}\right).$$

Mais il est clair qu'on a ici

$$r = \operatorname{tang} o \quad \text{et} \quad \rho = \operatorname{tang} \omega.$$

On a donc

$$\theta\, dt = d\sigma \frac{\tang o + \tang \omega}{\tang o . \tang \omega}.$$

d'où l'on tire

$$d\sigma = \theta\, dt . \frac{\tang o . \tang \omega}{\tang o + \tang \omega}.$$

Telle est donc, par la rotation actuelle θ, l'expression du mouvement $d\sigma$ du pôle instantané I le long du cercle σ qui sert de base à la surface du cône fixe.

Mais, d'un autre côté, si vous nommez π la rotation accélératrice qui a lieu autour de la ligne des nœuds, de sorte que $\pi\, dt$ marque la rotation infiniment petite que le corps tend à prendre en un instant autour de cette ligne, il est visible que l'axe de la rotation θ doit, au bout d'un instant, passer de sa position actuelle OI à celle de la diagonale du parallélogramme rectangle construit sur les deux lignes θ et $\pi\, dt$. On doit donc avoir aussi, pour le mouvement $d\sigma$ du pôle I,

$$d\sigma = \frac{\pi\, dt}{\theta},$$

d'où, en égalant cette expression à la précédente, on tire

$$\pi = \theta^2 . \frac{\tang o . \tang \omega}{\tang o + \tang \omega};$$

c'est l'expression de la rotation accélératrice π qu'il faut supposer autour de la ligne des nœuds, pour que le mouvement du corps soit le même que si le cône (IOA) roulait sur le cône fixe (IOV) avec la vitesse angulaire θ.

Or cette rotation π est évidemment composée de deux autres : l'une γ due aux forces centrifuges, l'autre $\varkappa$ due aux forces étrangères. Et comme γ a son axe dans la ligne des nœuds, ainsi que π, il s'ensuit que la rotation $\varkappa$, due aux forces étrangères, a aussi son axe dans la même ligne, et que, par conséquent, on a

$$\pi = \varkappa + \gamma.$$

Or la rotation γ, due au couple $g = G\theta \sin i$, qui vient des forces

centrifuges, est exprimée par

$$\gamma = \frac{G\theta \sin i}{B},$$

B étant le moment d'inertie du corps autour du diametre qui fait actuellement la ligne des nœuds. On aura donc, pour la rotation $\varkappa$ due au couple accélérateur K qui vient des forces étrangères,

$$\varkappa = \theta^2 \cdot \frac{\tang o \cdot \tang \omega}{\tang o + \tang \omega} - \frac{G\theta \sin i}{B};$$

mais, d'après les relations précédentes, on a

$$G\theta \sin i = \theta^2 (B - A) \sin o \cos o.$$

Substituant donc cette valeur à la place de $G\theta \sin i$, et réduisant ensuite toute l'expression, on trouvera

$$\varkappa = \theta^2 \sin o \cos o \left[\frac{A}{B} - \tang o \cot (\omega + o) \right];$$

d'où, en multipliant de part et d'autre par B, afin d'avoir dans le premier membre le produit $B\varkappa$ qui fait la mesure du couple cherché K, on tire, pour l'expression de ce couple accélérateur,

$$K = \theta^2 \sin o \cos [A - B \tang o \cot o (\omega + o)],$$

ce qui s'accorde parfaitement avec l'expression trouvée (8) par notre première analyse.

37. On peut remarquer que celle-ci est applicable au mouvement d'un cône à base quelconque s, qui roulerait sur un cône fixe à base quelconque σ.

Considérez, en effet, suivant la ligne de contact OI, les deux cônes circulaires *osculateurs* des deux proposés, et nommez r et ρ les deux rayons de courbure de leurs surfaces au pôle I. Vous trouverez de même, en nommant π la rotation accélératrice qui doit avoir lieu autour de Oπ, menée perpendiculaire à OI dans le plan tangent des deux cônes,

$$\pi = \theta^2 \frac{r'}{\rho},$$

θ désignant de même la rotation actuelle du corps autour de la ligne OI.

Cette rotation accélératrice π, qui doit donner à chaque instant au corps la rotation infiniment petite πdt, est la composée de deux autres : l'une γ, qui vient des forces centrifuges; l'autre $\varkappa$, qui vient des forces étrangères. Mais ici γ et $\varkappa$ ne seront point des rotations autour de la même droite $O\pi$, et la composition ne s'en fera point par une simple addition comme dans le cas précédent.

Si l'on conçoit, décrit autour du point O comme centre, l'*ellipsoïde central* du corps mobile, la rotation γ, due aux forces centrifuges, se fera autour du diamètre conjugué au plan GOI de l'axe du couple d'impulsion et de l'axe instantané de la rotation θ, à laquelle ce couple donne naissance.

La rotation π se fait autour d'un axe $O\pi$ parallèle à l'élément ds de l'orbe sphérique s, actuellement décrit par le pôle I : de sorte qu'en prenant deux lignes $O\pi$ et $O\gamma$, qui représentent ces deux rotations, et achevant le parallélogramme, la diagonale représentera l'axe et la grandeur de la rotation $\varkappa$ qui doit venir des forces étrangères. On aura donc, en nommant φ l'inclinaison de γ à π,

$$\varkappa = \sqrt{\gamma^2 + \pi^2 - 2\gamma\pi\cos\varphi}.$$

On pourrait tirer de là l'expression du couple accélérateur K, dont le corps mobile doit être animé pour l'existence du mouvement que l'on suppose; car ce couple K doit être tel, que si on le compose avec le couple $G\theta \sin i$, qui vient des forces centrifuges, le couple résultant soit capable de faire tourner sur $O\pi$, parallèle à l'arc ds, et avec une vitesse angulaire,

$$\pi = \theta^2 \frac{r\rho}{r+\rho}.$$

Par l'accession continuelle d'un tel couple variable K, le cône mobile roulera sur le cône fixe en tournant sur la ligne de contact OI avec la vitesse angulaire θ.

38. Mais, pour nous borner ici à un cas plus simple, ne considérons, comme dans ce qui précède, qu'un corps dont l'ellipsoïde central, relatif au point fixe O, soit de révolution. Supposons que le

cône mobile soit droit et circulaire autour de l'axe OA de ce sphéroïde, et que la surface du cône fixe reste d'ailleurs à base quelconque σ. Il est clair que les axes des rotations γ et π tomberont dans une même droite parallèle à l'arc ds ou $d\sigma$, et qu'on aura simplement

$$\varkappa = \pi + \gamma,$$

comme dans les cas déjà traités, où les deux cônes sont également droits et circulaires.

Si donc on nomme de même o la demi-ouverture *constante* du cône circulaire (IOA), et ω la demi-ouverture *variable* du cône osculateur de la surface conique à base quelconque σ, on aura

$$r = \operatorname{tang} o \quad \text{et} \quad \rho = \operatorname{tang} \omega;$$

et, par les mêmes calculs que ci-dessus, on arrivera à l'expression

$$\mathrm{B}\varkappa = \mathrm{K} = \theta^2 \sin o \cos o \left[\mathrm{A} - \mathrm{B} \operatorname{tang} o . \cot(\omega + o)\right],$$

toute semblable à la précédente, mais où l'angle ω, au lieu d'être constant, sera une variable dépendante de l'orbe sphérique donné σ.

39. Concevez que, du centre O, on mène l'infinité des droites parallèles aux tangentes successives de cet orbe σ; toutes ces droites formeront une surface conique qui pourra tenir lieu du plan fixe auquel on rapportait plus haut le mouvement du corps; et l'on pourra nommer de même *ligne des nœuds*, la droite suivant laquelle l'équateur vient couper à chaque instant cette surface conique. C'est autour de cette ligne que le couple variable K doit agir sans cesse pour que le mouvement du corps soit le même que si le cône (IOA) roulait sans glisser sur le cône fixe donné, en tournant sur la ligne de contact OI avec une vitesse angulaire constante θ.

40. Supposons maintenant, comme dans les art. **19** et suivants, qu'on supprime tout à coup ce couple accélérateur K, mais que, d'un autre côté, les surfaces de nos deux cônes, qui n'étaient que fictives, deviennent des surfaces réelles et capables de résistance. Je dis que le mouvement continuera exactement de la même manière, c'est-à-dire que le cône mobile roulera perpétuellement sur le cône fixe avec la

même vitesse angulaire ζ, mais qu'il exercera sur la surface de ce cône une pression continuelle, comme s'il ressentait à chaque instant dt l'action $-Kdt$ d'un couple accélérateur $-K$ qui tendit à l'appuyer contre cette surface, et dont la valeur variable K serait exprimée par l'équation précédente.

Et, en effet, soit G le couple capable de la rotation ζ autour de OI : si vous concevez qu'on applique à chaque instant sur la ligne des nœuds, les deux couples égaux et contraires Kdt et $-Kdt$, ce qui ne change rien à l'état du mouvement, vous pourrez considérer que les deux couples G et Kdt combinés ensemble font rouler le cône mobile sur le cône fixe d'une manière libre, je veux dire sans qu'il y ait la moindre action de l'un sur l'autre. Reste donc le couple $-Kdt$, qui tend à rapprocher le cône mobile du cône fixe, et d'où résulte la pression dont il s'agit.

41. Désignons par m la masse du corps, et regardons le couple K comme composé de deux forces mp et $-mp$: l'une mp, appliquée au centre de gravité C de ce corps, et perpendiculaire au plan tangent des deux cônes, l'autre $-mp$, égale, parallèle et de sens contraire, et appliquée au point O. Si l'on fait $CO = l$, on aura $l \cos o$ pour le bras de levier de ce couple, et $mpl \cos o$ pour l'expression de son moment K. On aura donc

$$mpl \cos o = K,$$

et, partant,

$$p = \frac{\zeta}{ml} \sin o \left[A - B \operatorname{tang} o . \cot (\omega + o) \right].$$

pour l'expression de la force accélératrice p, qui donnerait lieu au mouvement proposé si elle agissait sans cesse sur toutes les molécules suivant la perpendiculaire au plan de contact des deux cônes, et dans le *sens* qui tend, non pas à presser le cône mobile sur le cône fixe, mais bien à l'en détacher. Par une telle force accélératrice p, combinée avec le couple d'impulsion G, le corps prendra de lui-même le mouvement qu'on suppose, et le point fixe O sera seul chargé d'une pression continuelle $-mpdt$, variable de grandeur et de direction suivant les lois que l'on vient de dire.

Si l'on supprime tout à coup cette force accélératrice p, et que

le corps reste abandonné à son inertie, le mouvement continuera exactement de la même manière; mais alors le cône mobile *pressera* le cône fixe comme si le corps était doué d'une pesanteur $-p$ dirigée vers le plan tangent; et le point fixe O sera chargé d'une pression continuelle $+ mp\,dt$, etc., etc.

Mais je reviendrai ailleurs sur quelques-uns de ces théorèmes dynamiques, et j'en développerai d'autres qui se présentent naturellement comme autant de corollaires de notre *Théorie nouvelle de la Rotation des corps*.

SUR L'ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES

$$\frac{d^2 \log \lambda}{du\, dv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0;$$

PAR J. LIOUVILLE.

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XXXVI. — Séance du 28 février 1853.)

En m'occupant (dans une des Notes de l'*Application de l'analyse à la Géométrie*, par Monge, 5e édition, page 597) de la recherche des surfaces pour lesquelles la mesure de courbure en chaque point est constante, j'ai été conduit à l'équation aux différences partielles

$$(1) \qquad \frac{d^2 \log \lambda}{du\, dv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0,$$

et j'en ai donné l'intégrale complète avec deux fonctions arbitraires

$$(2) \qquad \lambda = \frac{4a^2 \varphi'(u)\, \psi'(v)\, e^{\varphi(u) + \psi(v)}}{\left[1 \pm e^{\varphi(u) + \psi(v)}\right]^2},$$

ou

$$\varphi'(u) = \frac{d\varphi(u)}{du}, \quad \psi'(v) = \frac{d\psi(v)}{dv}.$$

C'est par des considérations géométriques, tirées naturellement des propriétés de la sphère, que je suis arrivé à ce résultat. Toutefois, dans l'ouvrage cité, je me suis borné à vérifier que l'intégrale (2) satisfait en effet à l'équation (1). Ici même mon but n'est pas d'entrer dans le détail de la méthode un peu indirecte à laquelle je viens de faire allusion, et que je pourrai développer ailleurs, si l'occasion s'en présente. Un autre procédé, purement analytique, plus direct et pour le moins aussi simple, s'est depuis offert à moi pour la recherche de l'intégrale de l'équation (1), et va faire l'objet de cette Note.

Mais d'abord observons qu'en remplaçant $\varphi(u)$ et $\psi(v)$ par $\log \varphi(u)$, $\log \psi(v)$, l'équation (2) se réduit à

$$(3) \qquad \lambda = \frac{4a^2 \varphi'(u)\, \psi'(v)}{\left[1 \pm \varphi(u)\, \psi(v)\right]^2}.$$

En remplaçant ensuite $\varphi(u)$ par $-\frac{1}{\varphi(u)}$, on a encore

$$(4) \qquad \lambda = \frac{4a^2 \varphi'(u)\, \psi'(v)}{\left[\varphi(u) \mp \psi(v)\right]^2}.$$

C'est à cette dernière forme de l'intégrale, parfaitement équivalente aux deux autres, que l'analyse suivante va très-rapidement nous amener.

Regardons λ comme la dérivée, par rapport à u, d'une certaine fonction θ de u et v, c'est-à-dire posons

$$\lambda = \frac{d\theta}{du}.$$

L'équation (1) pourra s'écrire

$$\frac{d^2 \log \lambda}{du\, dv} = \mp \frac{2}{a^2} \frac{d\theta}{du},$$

d'où, en intégrant par rapport à u,

$$\frac{d \log \lambda}{dv} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\lambda} \frac{d\theta}{du} = \mp \frac{2}{a^2} \theta + f(v).$$

Multipliant par λ ou $\frac{d\theta}{du}$, et intégrant de nouveau par rapport à u, on a ensuite

$$\frac{d\theta}{dv} = \mp \frac{1}{a^2} \theta^2 + \theta f(v) + F(v).$$

Soit

$$\theta = \varpi(v)$$

une valeur particulière de θ satisfaisant à cette équation, en sorte que

$$\varpi'(v) = \mp \frac{1}{a^2} \varpi(v)^2 + \varpi(v) f(v) + F(v);$$

et posons, pour la valeur générale de θ,

$$\theta = \varpi(v) - \frac{1}{z}.$$

Nous en conclurons sur-le-champ

$$\frac{dz}{dv} + z \left[f(v) \pm \frac{2}{a^2} \varpi(v) \right] = \mp \frac{1}{a^2}.$$

L'intégration de cette équation linéaire, dans laquelle u n'entre pas, introduira une fonction arbitraire de u, constante par rapport à v, et, en faisant

$$\frac{1}{a^2} \int e^{\int \left[f(v) \pm \frac{2}{a^2} \varpi(v) \right] dv} . dv = \psi(v),$$

on trouvera

$$z = \frac{1}{a^2 \psi'(v)} \left[\varphi(u) \mp \psi(v) \right].$$

D'où

$$\theta = \varpi(v) - \frac{a^2 \psi'(v)}{\varphi(u) \mp \psi(v)},$$

et, par conséquent,

$$\frac{d\theta}{du} \quad \text{ou} \quad \lambda = \frac{a^2 \varphi'(u) \psi'(v)}{\left[\varphi(u) \mp \psi(v) \right]^2},$$

ce qu'il fallait démontrer.

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS BIQUADRATIQUES

(1)(2) $z^2 = x^4 \pm 2^m y^4$, (3) $z^2 = 2^m x^4 - y^4$, (4)(5) $2^m z^2 = x^4 \pm y^4$;

Par M. LEBESGUE,
Professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux

I.

Euler a examiné ces équations dans le chapitre IX du 2e volume de son *Algèbre*, pages 175-189. Comme on peut faire

$$m = 4\mu + r,$$

il suffit d'examiner les cas de

$$m = 0,\ 1,\ 2,\ 3;$$

alors y est remplacé par $2^\mu y$.

Les seules équations non examinées par Euler sont

$$z^2 = x^4 + 8y^4, \quad z^2 = x^4 - 8y^4, \quad z^2 = 8x^4 - y^4.$$

La seule trouvée possible par Euler, et dont il a donné une solution incomplète, est

$$z^2 = x^4 - 2y^4.$$

Quant à l'équation

$$z^2 = 2y^4 - x^4,$$

elle est aussi possible. Le chapitre VII de l'*Algèbre* d'Euler en donne une solution incomplète. L'équation

$$z^2 = x^4 + 8y^4$$

se ramène toujours à

$$z^2 = 2x^4 - y^4,$$

aussi bien que

$$z^2 = x^4 - 2y^4.$$

Euler a montré que si l'on pose

$$f^4 + 8g^4 = h^2,$$

on peut résoudre

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

par les formules

$$\begin{aligned} x &= f^3 + 2f^2g - gh, \\ y &= f^3 - 4fg^2 + gh, \\ z &= f^6 + f^4g^2 + 24f^2g^4 - 8g^6 - 6f^3gh. \end{aligned}$$

J'exposerai plus bas cette solution qui m'a été communiquée par M. Tchebichef, et qui se trouve dans les Œuvres posthumes d'Euler. Il resterait donc à donner toutes les solutions de

$$x^4 + 8y^4 = z^2,$$

ce qu'Euler n'a pas fait. J'ai suivi une autre marche. J'ai donné la solution complète, ou plutôt le moyen de trouver toutes les solutions de

$$2x^4 - y^4 = z^2,$$

à laquelle toutes les autres se ramènent.

Il est à remarquer que la méthode de Fermat, pour rendre rationnelle la quantité $\sqrt{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)}$, appliquée à $\sqrt{2\left(\frac{x}{y}\right)^4 - 1}$, ne donnerait pas toutes les solutions. Ainsi Euler a trouvé par cette méthode (chapitre IX)

$$\frac{x}{y} = 1, \quad 13, \quad \frac{4242452969}{9788425919}.$$

La solution $\frac{x}{y} = \frac{1525}{1343}$ n'y est pas comprise.

On peut voir, par une Note de M. Jacobi (*De l'Usage des Intégrales elliptiques et abéliennes dans l'Analyse de Diophante*, Journal de M. Crelle, tome XIII, page 353), qu'Euler, dans plusieurs Mémoires publiés en 1830 par l'Académie de Saint-Pétersbourg, a traité, pour ainsi dire d'une manière complète, un problème dont il s'est occupé à plusieurs reprises : *Étant donné un nombre x qui rende*

rationnelle l'expression $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$, *trouver un nombre infini d'autres valeurs qui remplissent la même condition.* Ignorant si cette méthode donne la solution complète de l'équation

$$z^2 = 2x^4 - y^4,$$

j'en vais donner une ici.

II.

Théorème I. *L'équation*

$$z^2 = x^4 + 2^m y^4$$

n'est possible que pour $m = 4n + 3$; *elle se ramène alors à*

$$z^2 = 2x^4 - y^4,$$

où x, y, z *sont impairs.*

Démonstration. On supposera toujours y impair, en remplaçant, s'il est nécessaire, 2^m par 2^{4n+m}. Il se présente deux cas : celui de z et x impairs et celui de z et x pairs.

Premier cas. z et x impairs. On posera

$$z^2 - x^4 = (z \pm x^2)(z \mp x^2) = 2^m p^4 q^4.$$

en faisant $y = pq$; comme on peut toujours faire disparaître par la division les facteurs communs à x, y, z, et les facteurs impairs communs à z et x, $z \pm x^2$, $z \mp x^2$ n'auront que le facteur commun 2, et l'on pourra poser

$$z \pm x^2 = 2p^4, \quad z \mp x^2 = 2^{m-4} q^4, \quad \text{d'ou} \quad \pm x^2 = p^4 - 2^{m-2} q^4.$$

Avec le signe supérieur, m doit égaler au moins 5, ce qui est admissible puisque m peut toujours être augmenté d'un multiple de 4.

L'équation

$$p^4 - x^2 = 2^{m-2} q^4$$

donne, en posant $q = rs$,

$$p^2 \pm x = r^4, \quad p^2 \mp x = 2^{m-3} s^4, \quad p^2 = r^4 + 2^{m-4} s^4,$$

équation semblable à la primitive où m a été diminué de 4.

Avec le signe inférieur, comme $p^4 + x^2$ est divisible seulement

par 2, il faut poser $m = 3$, d'où

$$(a) \qquad x^2 = 2q^4 - p^4,$$

qui est résoluble.

On voit donc qu'en supposant z et x impairs, l'équation

$$z^2 = x^6 + 2^m y^4$$

pourra se ramener à l'équation (a) ou à l'équation semblable où m est réduit à 0, 1, 2 ou 3 par la suppression du multiple de 4. Or, comme $z^2 - x^4$ est nécessairement divisible par 8, il faut admettre $m = 3$, les autres cas sont impossibles. Soit donc

$$z^2 = x^4 + 8y^4;$$

z, x, y impairs, on en tire

$$z \pm x^2 = 2p^4, \quad z \mp x^2 = 4q^4, \quad y = pq,$$

et de là

$$\pm x^2 = p^4 - 2q^4;$$

x, p, q impairs, on ne peut admettre que le signe inférieur, et l'on retombe sur l'équation (a).

Second cas. Si z et x sont pairs, soit 2^n la plus haute puissance de 2 qui les divise; on fera

$$z = 2^n Z, \quad x = 2^n X,$$

et l'on aura

$$Z^2 = 2^{2n} X^4 + 2^{m-2n} y^4.$$

Pour X impair $m = 2n$, on rentre dans le premier cas. Pour Z pair, qui exige X impair, on rentre encore dans le premier cas si $2n < m - 2n$. Pour $2n = m - 2n$ et $2n > m - 2n$ impair, l'impossibilité est manifeste. Pour $2n > m - 2n$ pair, on rentre dans le premier cas.

Théorème II. *L'équation*

$$z^2 = x^4 - 2^m y^4,$$

où l'on suppose y impair, n'est possible que pour $m = 4n + 1$, et elle se réduit encore à l'équation

$$z^2 = 2x^4 - y^4.$$

Premier cas. z et x impairs, $m > 2$; on fera

$$y = pq, \quad x^2 \pm z = 2p^4, \quad x^2 \mp z = 2^{m-4} q^4,$$

d'où

$$x^2 = p^4 + 2^{m-2} q^4;$$

il faut donc avoir

$$m - 2 = 4\mu + 3 \quad \text{ou} \quad m = 4\mu + 5 = 4\nu + 1.$$

Second cas. z et x pairs. Même démonstration d'impossibilité que dans le premier cas.

Théorème III. *L'équation*

$$z^2 = 2^m x^4 - y^4$$

n'est possible que pour $m = 4n + 1$; *elle se ramène à l'équation*

$$z^2 = 2x^4 - y^4.$$

Premier cas. z et y impairs; il faut poser forcément

$$m = 1, \quad \text{d'où} \quad z^2 = 2x^4 - y^4.$$

Second cas. z et y pairs. Comme plus haut.

Théorème IV. *L'équation*

$$2^m z^2 = x^4 - y^4$$

est toujours impossible.

Démonstration. Cela est prouvé par m pair. Soit m impair $= 2n + 1$

Premier cas. x, y impairs. On posera

$$x^2 + y^2 = 2f^2, \quad x^2 - y^2 = 4g^2, \quad 2^n z = 2fg:$$

de là, l'équation

$$x^2 y^2 = f^4 - 4g^4,$$

qui est impossible.

Second cas. x, y pairs. Le facteur 2 disparaît par la division, et l'on retombe sur le premier cas.

THÉORÈME V. *L'équation*

$$2^m z^2 = x^4 + y^4$$

est toujours impossible.

Démonstration. Il faut supposer m impair; alors le diviseur 2, qui serait commun à x et y, disparaît, et il suffit de supposer x, y, z impairs et $m = 1$. Soit donc

$$2z^2 = x^4 + y^4;$$

on en tire, comme le dit Euler,

$$2(z^2 + x^2y^2) = (x^2 + y^2)^2, \quad 2(z^2 - x^2y^2) = (x^2 - y^2)^2,$$

d'où

$$z^4 - x^4y^4 = \left(\frac{x^4 - y^4}{2}\right)^2,$$

qui est impossible.

III.

THÉORÈME VI. *Si l'on a*

$$2f^4 - g^4 = h^2,$$

et que l'on pose

$$A = 2f^2 + g^2, \quad B = fg + h,$$

les signes de f, g, h étant arbitraires, on satisfera à l'équation

$$z^2 = 2x^4 - y^4$$

en posant

$$x = f^2A^2 + g^2B^2,$$
$$y = g^2A^2 - 2f^2B^2,$$
$$z = (g^2A^2 + 2f^2B^2)^2 - 2(f^2A^2 - g^2B^2)^2,$$

les signes de x, y, z étant arbitraires.

Démonstration. On vérifie de suite la relation

$$B^2 = (f^2 - g^2)A + 2fgB,$$

car

$$2f^4 - g^4 = (B - fg)^2 = B^2 - 2fgB + f^2g^2$$

et

$$2f^4 - g^4 - f^2g^2 = (f^2 - g^2)(2f^2 + g^2) = (f^2 - g^2)A$$

Comme

$$z^2 = 2x^4 - y^4$$

revient à

$$\left(\frac{y^2+z}{2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{y^2-z}{2}\right)\left(x^2 - \frac{y^2-z}{2}\right).$$

on a, réduction faite,

$$[(g^2 - f^4)A^4 + 2f^2g^2A^2B^2 + (4f^4 - g^4)B^4]^2$$
$$= 16f^2g^2A^2B^2(f^2A^2 - g^2B^2)^2,$$

et comme la racine carrée du premier membre revient à

$$[(g^2 + f^2)A^2 + (2f^2 + g^2)B^2][(g^2 - f^2)A^2 + (2f^2 - g^2)B^2],$$

on satisfait à l'équation en posant

$$2fA(fA + gB) = (g^2 + f^2)A^2 + (2f^2 + g^2)B^2.$$
$$2gB(fA - gB) = (g^2 - f^2)A^2 + (2f^2 - g^2)B^2.$$

qui toutes deux se réduisent à

$$B^2 = (f^2 - g^2)A + 2fgB.$$

Voici l'analyse qui conduit à ces valeurs de x, y, z,

L'équation étant mise sous la forme

$$\left(\frac{y^2+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{y^2-z}{2}\right)^2 = x^4,$$

on doit poser forcément

$$x^2 = p^2 + q^2, \quad \frac{y^2+z}{2} = 2pq, \quad \frac{y^2-z}{2} = p^2 - q^2.$$

ou bien

$$x^2 = p^2 + q^2, \quad y^2 = p^2 + 2pq - q^2, \quad z = -p^2 + 2pq + q^2.$$

où il faut supposer q pair pour que y^2 ait la forme d'un carré.

La première équation donne nécessairement

$$x = r^2 + s^2, \quad q = 2rs, \quad p = r^2 - s^2,$$

d'où

$$y^2 = (p+q)^2 - 2q^2 = (r^2 + 2rs - s^2)^2 - 8r^2s^2,$$
$$z = (p+q)^2 - 2p^2 = (r^2 + 2rs - s^2)^2 - 2(r^2 - s^2)^2$$

L'équation

$$(r^2 + 2rs - s^2)^2 - y^2 = 8r^2s^2,$$

vu que l'un des nombres r, s est pair et l'autre impair, est telle, que l'un des facteurs $r^2 + 2rs - s^3 + y$, $r^2 + 2rs - s^2 - y$ est divisible par 2 seulement : on peut supposer que ce soit le premier en laissant le signe de y indéterminé. On fera donc pour r impair,

$$r^2 + 2rs - s^2 + y = 2\frac{t}{u}r^2, \quad r^2 + 2rs - s^2 - y = 4\frac{u}{t}s^2.$$

u, t étant nécessairement impairs et premiers entre eux ; de là

$$(b) \qquad r^2(t^2 - ut) - 2rsut + s^2(2u^2 + ut) = 0.$$

Si s était impair, on poserait

$$r^2 + 2rs - s^2 + y = 2\frac{t}{u}s^2, \quad r^2 + 2rs - s^2 - y = 4\frac{u}{t}r^2,$$

$$(c) \qquad s^2(t^2 + ut) - 2rsut + r^2(2u^2 - ut) = 0.$$

Les nombres t, u peuvent être tous deux positifs, ou l'un positif et l'autre négatif; de sorte que les équations (b), (c) ne diffèrent que par le changement de $\frac{r}{s}$ en $-\frac{s}{r}$.

L'équation (b) donne

$$\frac{r}{s} = \frac{ut + \sqrt{ut(2u^2 - t^2)}}{t^2 - ut}.$$

Pour u et t positifs, il faudra faire

$$u = f^2, \quad t = g^2, \quad 2f^4 - g^4 = h^2, \quad \text{d'où} \quad \frac{r}{s} = \frac{fg + h}{g^2 - f^2} \cdot \frac{f}{g}.$$

Pour ut négatif, $t^2 - 2u^2$ devrait être positif; mais comme t, u sont impairs, $t^2 - 2u^2$ serait de forme $8k - 1$ qui n'appartient pas à un carré.

L'équation (c) donne

$$\frac{s}{r} = \frac{ut + \sqrt{ut(t^2 - 2u^2)}}{t^2 + ut}.$$

Ici il faut prendre ut négatif,

$$t = g^2, \quad u = -f^2, \quad 2f^4 - g^4 = h^2,$$

d'où

$$\frac{s}{r} = \frac{-fg+h}{g^2-f^2} \cdot \frac{f}{g}.$$

Dans l'équation (b), on a trouvé

$$\frac{r}{s} = \frac{fg+h}{g^2-f^2} \cdot \frac{f}{g}, \quad \text{d'où} \quad \frac{r}{s} = \frac{2f^2+g^2}{fg-h} \cdot \frac{f}{g}.$$

On peut donc poser

$$s = (fg-h).g, \quad r = (2f^2+g^2).f;$$

de sorte que $x^2 = r^2 + s^2$ prend la valeur $f^2 A^2 + g^2 B^2$, donnée plus haut. D'ailleurs

$$y = \frac{t}{u} r^2 - 2\frac{u}{t} s^2 = \frac{t^2 r^2 - 2u^2 s^2}{ut},$$

ou bien

$$y = g^2 A^2 - 2f^2 B^2.$$

Si r et s avaient un diviseur commun, il en serait de même de x, y, et on le ferait disparaître par la division.

Dans le cas de l'équation (c), on a trouvé

$$\frac{s}{r} = \frac{-fg+h}{g^2-f^2} \cdot \frac{f}{g},$$

d'où

$$-\frac{r}{s} = \frac{fg+h}{2f^2+g^2} \cdot \frac{g}{f};$$

on retrouvera donc encore les mêmes valeurs de x et y, seulement le signe de h sera changé.

Les équations (b), (c) ne peuvent perdre un carré qu'en supposant ou $t = 0$, ou $u = 0$, ou $t = u$, ou $t = -u$, ou $t = -2u$, ou $t = 2u$.

1°. $t = 0$ ou $u = 0$ donnent r ou s nul; par suite q nul, $x = y$; c'est la solution

$$x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1.$$

2°. $t = u$, à cause de t premier à u, donne

$$t = 1, \quad u = 1,$$

de là

$$2rs = 3s^2, \quad 2r = 3s;$$

pour avoir r, s premiers entre eux, on fera

$$r = 3, \quad s = 2. \quad \text{d'où} \quad x = 13, \quad y = 1, \quad z = 239.$$

3°. $t = -u$; ici on aura

$$s = 3, \quad s = -2;$$

mais, d'ailleurs, la même solution.

Comme t et u ont été supposés impairs, on ne peut pas avoir

$$t = \pm 2u, \quad \text{qui suppose} \quad u = 1, \quad t = \pm 2.$$

Bien que l'équation (b) ou l'équation (c) aient perdu un terme, la solution

$$x = 13, \quad y = 1$$

n'en résulte pas moins des formules du théoreme V ; il faut y faire

$$f = g = 1, \quad h = 1.$$

On voit donc, par ce qui précède, qu'une solution de l'équation

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

dépend d'une solution en nombres plus petits (sauf $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$); car u et t étant diviseurs de r^2 et s^2, puisque r et s sont $< \sqrt{x}$, les nombres f, g seront $< \sqrt{x}$: comme $\sqrt{13}$ est < 4, la solution en moindres nombres après $x = 1$, $y = 1$, sera

$$x = 13, \quad y = 1, \quad z = 239,$$

car $f = 3$ est inadmissible.

Si dans les formules du théorème VI on pose

$$f = 13, \quad g = 1, \quad h = -239.$$

A et B prennent le diviseur comme 113, qu'on peut supprimer, et

l'on a la solution

$$x = 1525, \quad y = 1343, \quad z = 2750257,$$

indiquée plus haut comme n'étant pas donnée par la méthode de Fermat,

$$A = 2f^2 + g^2 = 339 = 3 . 113,$$

$$B = fg \pm h = 13 \pm 239 = \begin{cases} 252 = 2^2 . 3^2 . 7 . \\ -226 = 2 . 113. \end{cases}$$

Avec le signe supérieur, les nombres seraient bien plus grands.

On peut donc ainsi obtenir toutes les solutions; mais ces calculs sont impraticables, vu leur longueur.

IV.

A la page 221 des *OEuvres posthumes* d'Euler, tome I, dans la section intitulée : *Fragmenta ex Adversariis deprompta,* n° 57, il est prouvé que les équations

$$2x^4 - y^4 = z^2, \quad 8p^4 + q^4 = r^2$$

peuvent être ramenées l'une à l'autre.

Voici le théorème d'Euler :

Théorème. *Si l'on a*

$$f^4 + 8g^4 = h^2,$$

l'équation

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

sera résolue par

$$x = f^3 + 2fg^2 - gh,$$
$$y = f^3 - 4fg^2 + gh,$$
$$z = f^6 + f^4 g^2 + 24 f^2 g^4 - 8g^6 - 6f^3 gh.$$

Euler satisfait à l'équation

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

par

$$x^2 = p^2 + q^2, \quad y^2 = p^2 + 2pq - q^2, \quad z = q^2 + 2pq - p^2,$$

de là

$$y^2 - x^2 = 2q(p - q);$$

il pose ensuite

$$y + x = \frac{2a}{b}q, \quad y - x = \frac{b}{a}(p - q),$$

d'où

$$(b^4 - 4a^2b^2)p^2 - 2(b^4 + 2a^2b^2)pq + (b^4 + 4a^4)q^2 = 0.$$

et, par suite, $\frac{p}{q} = \cdots$.

Euler s'arrête là; le calcul est très-aisé à finir.

$$\frac{p}{q} = \frac{b^4 + 2a^2b^2 + 2ab\sqrt{2(b^4 + 2a^4)}}{b^4 - 4a^2b^2}.$$

Il faut poser

$$2(b^4 + 2a^4) = 4h^2,$$

ainsi

$$b^4 + 2a^4 = 2h^2;$$

b doit être pair, $b = 2g$. On a

$$a^4 + 8g^4 = h^2;$$

d'où les formules de l'énoncé, en posant $a = f$.

Avant de connaître ce procédé d'Euler, j'avais résolu par le même moyen quelques équations biquadratiques, dont

$$2x^4 - y^4 = z^2$$

est la plus simple.

Il est toujours facile, étant donnée une solution de l'équation

$$p^2 = r^4 + ar^2s^2 + bs^4,$$

d'en trouver une infinité d'autres. Ainsi, on satisfait à l'équation

$$z^2 = x^4 + ax^2y^2 + by^4$$

en posant

$$x = r^4 - bs^4, \quad y = 2prs, \quad z = p^4 - (a^2 - 4b)r^4s^4;$$

mais le but important n'est pas atteint, celui d'obtenir toutes les solutions.

Il y a plusieurs manières d'obtenir les formules précédentes :

1°. On peut employer la méthode de Fermat;

2°. On peut les vérifier directement;

3°. Le moyen le plus simple paraît être le suivant :

Prenez

$$y = 2y_1,$$

$$z^2 = x^4 + 4ax^2y_1^2 + 16by_1^4 = (x^2 + 2ay_1^2)^2 + 4(4b - a^2)y_1^4,$$

ou

$$(x^2 + 2ay_1^2 + z)(x^2 + 2ay_1^2 - z) = 4(a^2 - 4b)y_1^4 = 4cp^4q^4,$$

en posant

$$a^2 - 4b = c, \quad y_1 = pq.$$

Soit maintenant

$$x^2 + 2ay_1^2 + z = 2p^4, \quad x^2 + 2ay_1^2 - z = 2cq^4,$$

d'où

$$z = p^4 - cq^4, \quad x^2 + 2ay_1^2 = p^4 + cq^4.$$

La dernière revient à

$$x^2 = p^4 - 2ap^2q^2 + cq^4 = (p^2 - aq_2)^2 + (c - a^2)q^4,$$

ou

$$x^2 = (p^2 - aq^2)^2 - 4bq^4.$$

On fera

$$q = rs,$$

et l'on posera

$$[(p^2 - ar^2s^2)^2 + x](p^2 - ar^2s^2 - x) = 4br^4s^4,$$

qu'on peut décomposer en

$$p^2 - ar^2s^2 + x = 2r^4, \quad p^2 - ar^2s^2 - x = 2bs^4,$$

d'où

$$x = r^4 - bs^4$$

et

$$p^2 = r^4 + ar^2s^2 + bs^4.$$

Cette dernière équation est semblable à la proposée, et il en résulte une solution x, y, z, au moyen d'une première r, s, p.

Il faut bien remarquer que, quand les décompositions faites ici peuvent être faites autrement, on ne peut être assuré que l'on obtient ainsi toutes les solutions.

Ce procédé, d'ailleurs, est commode pour démontrer l'impossibilité de certaines équations;

$$x^3 + y^3 = z^3, \quad x^5 + y^5 = z^5, \quad x^7 + y^7 = z^7$$

tombent dans ce cas.

SUR

L'INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES IRRATIONNELLES;

PAR M. P. TCHEBICHEF.

§ I.

Si la différentielle $\frac{f_0 x}{F_0 x}\frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$, composée d'une fraction rationnelle $\frac{f_0 x}{F_0 x}$ et d'une racine d'une fonction entière θx, s'intègre à l'aide des signes algébriques et logarithmiques, nous savons, d'après les recherches ingénieuses de M. Abel et de M. Liouville, que l'intégrale $\int \frac{F_0 x}{f_0 x}\frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$ se présentera sous la forme suivante:

$$U + A^0 \log V^0 + A' \log V' + A'' \log V'' + \ldots,$$

où U, V^0, V', V'',..., sont des fonctions rationnelles de x et $\sqrt[m]{\theta x}$; A^0, A', A'',..., sont des quantités constantes.

Le terme algébrique U peut se déterminer facilement. On sait qu'il est de la forme $\frac{P}{Q}(\theta x)^{\frac{m-1}{m}}$, où P et Q sont des fonctions entières, que l'on trouvera à l'aide des procédés suivants [*]:

1°. On cherchera le plus grand commun diviseur entre les fonctions $F_0 x \theta x$ et $\frac{d[F_0 x \theta x]}{dx}$: ce diviseur est le dénominateur Q du terme algébrique.

2°. Si les degrés des fonctions

$$\frac{Q f_0 x}{F x \theta x}, \qquad \frac{Q}{x[\theta x]^{\frac{m-1}{m}}},$$

[*] Nous supposons que la differentielle $\frac{f_0 x}{F_0 x}\frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$ est reduite de maniere que θx ne contient pas des facteurs d'un degré plus élevé que $m - 1$.

sont inférieurs à -1, le terme algébrique est o. Dans le cas contraire, en désignant par n le plus petit nombre supérieur au degré de ces fonctions, on trouvera le numérateur P d'après la formule

$$P = B_0 + B_1 + x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n,$$

ou $B_0, B_1, B_2, \ldots, B_n$ sont des coefficients constants, dont la valeur se déterminera en cherchant à rendre le polynôme

$$fx - \frac{F_0 x \theta x}{Q}\left[B_1 + 2B_2 x + \ldots + nB_n x^{n-1}\right]$$

$$-\left[\frac{m-1}{m}\frac{F_0 x \theta' x}{Q} - \frac{F_0 x \theta x \frac{dQ}{dx}}{Q^2}\right]\left[B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \ldots + B_n x^n\right]$$

divisible par $\frac{Q}{D}$, et avec cette condition que le quotient ne soit pas d'un degré plus élevé que $\frac{Fx\sqrt[m]{\theta x}.D}{xQ}$, D étant le plus grand commun diviseur entre les fonctions θx et $\theta' x$.

Si ces conditions ne peuvent être remplies, on en conclura que l'intégration de $\frac{f_0 x}{F_0 x}\frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$, à l'aide des signes algébriques et logarithmiques, est impossible. Dans le cas contraire, on trouvera le terme algébrique, et si l'on ôte sa différentielle de $\frac{f_0 x}{F_0 x}\frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$, le reste doit pouvoir être intégré à l'aide des seuls termes logarithmiques. C'est de cette intégration que nous allons maintenant nous occuper.

Voici les questions dont nous donnerons les solutions dans ce Mémoire :

1°. Déterminer le nombre de termes logarithmiques dans la valeur de l'intégrale donnée.

La solution de cette question, dans un cas particulier, donne la démonstration du théorème énoncé par M. Abel en ces termes :

« ... Le théorème suivant très remarquable a lieu :

« *Lorsqu'une intégrale de la forme* $\int \frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$, *où* ρ *et* R *sont des fonc-*

tions entières de x, est exprimable par des logarithmes, on peut toujours l'exprimer de la manière suivante :

$$\int \frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}} = A \log \frac{p + q\sqrt{R}}{p - q\sqrt{R}},$$

où A est constant, et p et q des fonctions entières de x. » (Œuvres compl., tome I, page 65.)

2°. Trouver les conditions analytiques qui déterminent chaque terme séparément.

On verra, en outre, d'après la solution de ces questions, que les cas connus d'intégrabilité des différentielles binômes de la forme

$$x^s (a + bx^{s'})^{s''} dx,$$

sont les seuls où l'intégration de ces différentielles est possible par les signes algébriques et logarithmiques, s, s', s'' étant rationnels.

§ II.

Nous avons vu que les termes logarithmiques, dans la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$, sont de la forme

$$A \log V,$$

où V est une fonction rationnelle de x et $\sqrt[m]{\theta x}$. Donc en faisant, pour abréger,

$$\sqrt[m]{\theta x} = \Delta,$$

et en désignant par

$$\varphi_0(\Delta), \quad \varphi_1(\Delta), \quad \varphi_2(\Delta), \quad \varphi_3(\Delta), \ldots,$$

des fonctions rationnelles de x et Δ, nous aurons l'équation suivante :

$$\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\Delta} = A^0 \log \varphi_0(\Delta) + A' \log \varphi_1(\Delta) + A'' \log \varphi_2(\Delta) + \ldots$$

lorsque la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\Delta}$ ne contient plus de termes algébriques.

Si nous remplaçons, dans cette équation, Δ par $\alpha\Delta$, $\alpha^2\Delta, \ldots, \alpha^{m-1}\Delta$,

et si nous la multiplions respectivement par $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{m-1}$, α étant racine primitive de l'équation

$$x^m - 1 = 0,$$

nous trouvons une série d'équations, dont la somme donne

$$\begin{aligned} m\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta} = {} & A^0 \log\left[\varphi_0(\Delta)\cdot\varphi_0^{\alpha}(\alpha\Delta)\cdot\varphi_0^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi_0^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)\right] \\ & + A' \log\left[\varphi_1(\Delta)\cdot\varphi_1^{\alpha}(\alpha\Delta)\cdot\psi_1^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi_1^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$(1) \qquad \int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots,$$

où $W_0, W_1, W_2, \ldots$, sont des fonctions de la forme

$$\varphi(\Delta)\varphi^{\alpha}(\alpha\Delta)\varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta),$$

$A_0, A_1, A_2, \ldots$, des constantes.

C'est sous cette forme que nous allons examiner la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$.

Nous commencerons par prouver que la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$ étant réduite au minimum de termes, les coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots$, ne peuvent vérifier l'équation

$$N_0 A_0 + N_1 A_1 + N_2 A_2 + \ldots = 0,$$

dans laquelle $N_0, N_1, N_2, \ldots$, sont des nombres complexes de α.

En effet, si cette équation a lieu, nous trouvons

$$A_0 = -\frac{N_1}{N_0}A_1 - \frac{N_2}{N_0}A_2 - \ldots;$$

et, en substituant cette valeur de A_0 dans l'expression de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$, nous la transformons dans celle-ci :

$$A_1 \log W_1 W_0^{-\frac{N_1}{N_0}} + A_2 \log W_2 W_0^{-\frac{N_2}{N}} + \ldots,$$

qui contient moins de termes que l'équation (1); et chacun de ces termes, comme nous allons le démontrer, peut se réduire aussi à la forme

$$A \log \left[\psi(\Delta) . \psi^{\alpha}(\alpha\Delta) . \psi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \ldots \psi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta) \right],$$

où $\psi(\Delta)$ est une fonction rationnelle de x et Δ.

Pour réduire ainsi le terme

$$A_1 \log W_1 W_0^{-\frac{N_1}{N_0}},$$

nous mettons $\frac{N_1}{N_0}$ sous la forme

$$\frac{n^0 + n'\alpha + n''\alpha^2 + \ldots}{n},$$

où n, n^0, n', n'',..., sont des nombres entiers réels (ce qui est toujours possible). D'après cela, le terme

$$A_1 \log W_1 W_0^{-\frac{N_1}{N_0}}$$

peut s'écrire ainsi :

$$\frac{A_1}{n} \log \left[W_1^n . W_0^{-n^0} . W_0^{-n'\alpha} . W_0^{-n''\alpha^2} \ldots \right],$$

où la quantité mise sous le signe log se décompose en facteurs et diviseurs de la forme

$$W^{\alpha^l} = \varphi^{\alpha^l}(\Delta) . \varphi^{\alpha^{l+1}}(\alpha\Delta) . \varphi^{\alpha^{l+2}}(\alpha^2\Delta) \ldots,$$

et que l'on réduit à celle-ci :

$$\varphi(\Delta)\varphi^{\alpha}(\alpha\Delta)\varphi \quad (\alpha^2\Delta) \ldots,$$

en remplaçant $\varphi(\Delta)$ par $\varphi(\alpha^l\Delta)$.

La même forme subsiste également après la multiplication et la division de ces quantités.

Donc, à l'aide de l'équation

$$N_0 A_0 + N_1 A_1 + N_2 A_2 + \ldots = 0,$$

on peut diminuer le nombre de termes dans la valeur de l'intégrale

$\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$ sans altérer leur forme principale, et, par conséquent, cette équation ne peut avoir lieu dès que la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$ est réduite au minimum de termes, ce que nous supposerons toujours dans nos recherches.

§ III.

Soit x' une valeur de x qui rende W_0 égale à o ou ∞. Il n'est pas difficile de s'assurer qu'on trouvera une puissance de $x - x'$, dont le rapport à W_0 sera fini pour $x = x'$, et que l'exposant de cette puissance sera en général un nombre complexe de α. En effet, la fonction W_0, comme nous l'avons vu, est égale au produit

$$\varphi_0(\Delta).\varphi(\alpha\Delta).\varphi^2(\alpha^2\Delta)\ldots,$$

où φ_0 est une fonction algébrique. Or, si l'on développe les facteurs

$$\varphi_0(\Delta),\quad \varphi_0(\alpha\Delta),\quad \varphi_0(\alpha^2\Delta),\ldots$$

selon les puissances de $x - x'$, et qu'on désigne par n^0, n', n'',..., les exposants de $x - x'$ dans les premiers termes, les nombres n^0, n', n'',..., sont rationnels, et la somme

$$n^0 + n'\alpha + n''\alpha^2 + \ldots$$

est l'exposant de $x - x'$ dans le premier terme du développement de W_0. D'où il suit que, N'_0 étant égal au nombre complexe

$$n^0 + n'\alpha + n''\alpha^2 + \ldots,$$

le rapport $\frac{W_0}{(x - x')^{N'_0}}$ reste fini pour $x = x'$.

Soient N'_1, N'_2,... les nombres complexes qui jouent le même rôle par rapport à W_1, W_2,.... En prenant

$$\int \frac{A_0 N'_0 + A_1 N'_1 + A_2 N'_2 + \ldots}{x - x'}\,dx$$

$$= A_0 \log(x - x')^{N'_0} + A_1 \log(x - x')^{N'_1} + A_2 \log(x - x')^{N'_2} + \ldots.$$

et retranchant terme à terme de celle-ci,

$$\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots.$$

nous trouvons

$$\int \left[\frac{fx}{Fx\,\Delta} - \frac{A_0 N'_0 + A_1 N'_1 + A_2 N'_2 + \ldots}{x - x'}\right] dx$$

$$= A_0 \log \frac{W_0}{(x-x')^{N'_0}} + A_1 \log \frac{W_1}{(x-x')^{N'_1}} + A_2 \log \frac{W_2}{(x-x')^{N'_2}} + \ldots.$$

La seconde partie de cette équation étant finie pour $x = x'$, nous concluons que cette valeur de x ne rend pas infinie l'intégrale

$$\int \left[\frac{fx}{Fx\,\Delta} - \frac{A_0 N'_0 + A_1 N'_1 + A_2 N'_2 + \ldots}{x - x'}\right] dx,$$

ce qui suppose que la limite de

$$(x - x')\left[\frac{fx}{Fx\,\Delta} - \frac{A_0 N'_0 + A_1 N'_1 + A_2 N'_2 + \ldots}{x - x'}\right],$$

pour $x = x'$, est égale à zéro, et, par conséquent,

$$N'_0 A_0 + N'_1 A_1 + N'_2 A_2 + \ldots = \lim \left[\frac{(x-x')fx}{Fx\,\Delta}\right]_{x=x'}.$$

Cette équation nous prouve que les termes de la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$ ne peuvent devenir infinis que pour une valeur de x égale à l'une des racines de l'équation

$$Fx = 0;$$

car, d'après le § II, la somme

$$N'_0 A_0 + N'_1 A_1 + N'_2 A_2 + \ldots = 0$$

sera différente de zéro, tandis que $\lim \left[\frac{(x-x')fx}{Fx\,\Delta}\right]_{x=x'}$ ne reste fini que dans le cas où Fx contient le facteur $x - x'$, le facteur Δ ne pouvant contenir $x - x'$ qu'à un degré inférieur à 1 (§ I, note).

Cette équation nous prouve aussi que la limite de $\frac{(x-x')fx}{Fx\,\Delta}$, pour $x = x'$, ne peut être infinie.

Supposons maintenant qu'on désigne par x', x'', x''', ..., $x^{(l)}$ toutes les racines de l'équation

$$Fx = 0,$$

et par K', K'', K''',..., $K^{(l)}$ la valeur de

$$\lim \left[\frac{(x-z)fx}{Fx\,\Delta}\right]_{x=z}$$

pour $z = x'$, x'', x''',..., $x^{(l)}$.

L'équation que nous venons de trouver et celles qu'on obtient de la même manière en examinant les cas où $x = x''$, x''',..., $x^{(l)}$, pourront s'écrire ainsi :

$$(2)\quad \sum_{i=0}^{i=t} N'_i A_i = K', \quad \sum_{i=0}^{i=t} N''_i A_i = K'', \ldots, \quad \sum_{i=0}^{i=t} N^{(l)}_i A_i = K^{(l)},$$

ou t est le nombre de termes de la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$; N'_0, N''_0,..., $N^{(l)}_0$, N'_1, N''_1,..., $N^{(l)}_1$, etc., sont les nombres complexes choisis de manière que les rapports

$$\frac{W_0}{(x-x')^{N'_0}(x-x'')^{N''_0}\ldots(x-x^{(l)})^{N^{(l)}_0}},$$

$$\frac{W_1}{(x-x')^{N'_1}(x-x'')^{N''_1}\ldots(x-x^{(l)})^{N^{(l)}_1}},\ldots,$$

restent finis pour $x = x'$, x'', x''',..., $x^{(l)}$, et, par conséquent, pour toutes les valeurs finies de x; car, comme nous l'avons remarqué, les racines de l'équation

$$Fx = 0$$

sont les seules valeurs finies de x qui peuvent rendre les fonctions

$$W_0,\ W_1,\ W_2,\ldots,$$

infinies ou 0.

En changeant, dans l'équation

$$\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots,$$

x en $\frac{1}{z}$, et en traitant le cas de $z = 0$, nous trouvons de la même manière l'équation

$$(3) \qquad \sum_{i=0}^{i=t} \mu_i A_i = K^{(0)},$$

où $K^{(0)}$ est la limite de $\frac{xfx}{Fx\Delta}$ pour $x = \infty$, et $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$, les degrés des fonctions $W_0, W_1, W_2, \ldots$.

Cette équation nous prouve, en outre, que la fonction $\frac{fx}{Fx\Delta}$ ne peut être d'un degré plus élevé que -1; car, autrement,

$$K^{(0)} = \lim \left[\frac{xfx}{Fx\Delta}\right]_{x=\infty}$$

serait infinie, ce qui ne peut avoir lieu d'après l'équation trouvée.

§ IV.

Supposons, maintenant, qu'en désignant par $M^0, M', M'', \ldots$, les nombres complexes de α, on cherche à vérifier l'équation

$$M^0 K^0 + M' K' + M'' K'' + \ldots = 0,$$

et que l'on ne trouve que λ équations de cette forme qui ne soient pas identiques entre elles par rapport à $K^0, K', K'', \ldots, K^{(l)}$.

D'après ces équations, on pourra évidemment exprimer λ quantités de la série

$$K^0, K', K'', \ldots, K^{(l)}$$

en fonctions linéaires des autres, et ces fonctions auront pour coefficients des nombres complexes de α. Supposons donc qu'on parvienne

a trouver

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} K^0 = \sum\limits_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^0 K^{(\lambda+i)}, \quad K' = \sum\limits_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i' K^{(\lambda+i)}, \ldots, \\ K^{(l-1)} = \sum\limits_{i=0}^{i=l-\lambda} M_i^{(l-1)} K^{(\lambda+i)}. \end{array}\right.$$

Comme les quantités $K^0, K', K'', \ldots, K^{(l)}$ ne peuvent vérifier plus de λ équations différentes de la forme

$$(5)\qquad M^0 K^0 + M' K' + M'' K'' + \ldots = 0,$$

les quantités

$$K^{(\lambda)}, \quad K^{(\lambda+1)}, \ldots, \quad K^{(l)},$$

prises séparément de

$$K^0, \quad K', \quad K'', \ldots, \quad K^{(\lambda-1)},$$

ne pourront vérifier une équation de cette forme; car, autrement, cette équation et les λ équations (4), évidemment non identiques entre elles, donneraient $\lambda + 1$ équations de la forme (5), ce qui est contraire à la supposition.

D'après cela, il est facile de s'assurer que le nombre de termes dans la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$, ne peut être au-dessous de $l - \lambda + 1$, car, dans ce cas, le nombre des coefficients

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \ldots,$$

serait aussi moindre que $l - \lambda + 1$; et alors les $l - \lambda + 1$ équations dernières de la série (2), après élimination de ces coefficients, donneraient au moins une équation entre $K^{(\lambda)}, K^{(\lambda+1)}, \ldots, K^{(l)}$ qui serait de la forme (5), ce qui est impossible.

Le même résultat aurait lieu si l'une de $l - \lambda + 1$ dernières équations (2) était identique aux autres par rapport à toutes les quantités $A_0, A_1, A_2, \ldots$. Donc, au moyen de ces équations, il est possible de

trouver $l-\lambda+1$ quantités de la série

$$A_0,\ A_1,\ A_2,\ldots$$

en fonction des autres et des quantités K^{λ}, $K^{\lambda+1}$,..., K^{l} ; ces fonctions seront linéaires et auront pour coefficients des nombres complexes de α.

Supposons qu'on parvienne ainsi à trouver les quantités

$$A_0,\ A_1,\ldots,\ A_{l-\lambda+1},$$

et qu'on porte leur valeur dans l'équation

$$\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots.$$

Après cette substitution, la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$ contiendra plusieurs termes avec les coefficients

$$K^{\lambda},\ K^{\lambda+1},\ldots,\ K^{l},$$
$$A_{l-\lambda+1},\ A_{l-\lambda+2},\ldots,\ A_l.$$

Mais si l'on rassemble dans un seul terme tout ce qui contient le même coefficient, on n'aura que t termes, dont la forme générale sera

$$K^t \log Z \quad \text{ou} \quad A_t \log Z,$$

et dans lesquels

$$Z = W_0^{\frac{P_0}{Q_0}} . W_1^{\frac{P_1}{Q_1}} . W_2^{\frac{P_2}{Q_2}} \ldots.$$

P_0, P_1, P_2,..., Q_0, Q_1, Q_2,... étant des nombres complexes de α. Or, d'après ce que nous avons montré § II, il est certain que, quelque compliquée que soit la forme de ces termes, ils pourront être réduits à une forme telle que celle-ci :

$$\frac{R^{\alpha}}{n} \log W \quad \text{ou} \quad \frac{A_{\alpha}}{n} \log W,$$

où n est un nombre entier réel, et W une fonction de la forme

$$\psi(\Delta) . \psi^{\gamma}(\alpha\Delta) . \psi^{\gamma^2}(\alpha^2\Delta) \ldots \psi^{\gamma^m}(\alpha^{m-1}\Delta).$$

Donc, après la substitution dont nous venons de parler, la forme principale des termes n'est pas altérée; mais les $l-\lambda+1$ coefficients

$$A_0, A_1, \ldots, A_{l-\lambda}$$

sont remplacés par

$$\frac{K^{(\lambda)}}{n_0}, \quad \frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1}, \quad \frac{K^{(\lambda+2)}}{n_2}, \ldots, \frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}},$$

où $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{l-\lambda}$ sont des nombres entiers réels.

Dans la suite, nous supposerons toujours que cette transformation a été faite; et par conséquent, dans l'équation

$$\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots.$$

nous prendrons

$$(6) \qquad A_0 = \frac{K^{(\lambda)}}{n_0}, \quad A_1 = \frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1}, \quad A_2 = \frac{K^{(\lambda+2)}}{n_2}, \ldots, A_{l-\lambda} = \frac{K^{(l)}}{n_{l-\lambda}}.$$

où $n_0, n_1, n_2, \ldots, n_{l-\lambda}$ sont des nombres entiers réels.

Jusqu'à présent nous n'avons rien dit sur la forme des fonctions $\varphi_0(\Delta), \varphi_1(\Delta), \ldots$, qui entrent dans la composition de $W_0, W_1, \ldots$, et qui sont rationnelles par rapport à x et Δ; dans ce qui suit, nous les supposerons réduites à la forme la plus simple, c'est-à-dire

$$\frac{X_0 + X_1\Delta + X_2\Delta^2 + \ldots + X_{m-1}\Delta^{m-1}}{Y},$$

où $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_{m-1}$, Y sont des fonctions entières de x. De plus, le dénominateur Y se détruit dans la valeur de

$$W = \varphi(\Delta).\varphi^{\alpha}(\alpha\Delta).\varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta);$$

à cause de l'égalité

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-1} = 0,$$

nous pouvons prendre $Y = 1$.

§ V.

Les équations (2), (3), (4) et (6), par l'élimination de

$$K^0, K', K'', \ldots, K^{(l)},$$

nous donnent

$$\sum_{i=0}^{i=l-1} M_i^0 n_i A_i = \sum_{i=0}^{i=t} \mu_i A_i,$$

$$\sum_{i=0}^{i=l-1} M_i^1 n_i A_i = \sum_{i=0}^{i=t} N_i^1 A_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=0}^{i=l-1} M_i^{(\lambda-1)} n_i A_i = \sum_{i=0}^{i=t} N_i^{(\lambda-1)} A_i,$$

$$n_0 A_0 = \sum_{i=0}^{i=t} N_i^{(\lambda)} A_i,$$

$$n_1 A_1 = \sum_{i=0}^{i=t} N_i^{(\lambda+1)} A_i,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n_{l-1} A_{l-1} = \sum_{i=0}^{i=t} N_i^{(l)} A_i,$$

où les nombres complexes désignés par $M_i^{(\lambda)}$ sont déterminés par les équations (4), qui donnent $K^0, K', K'', \ldots, K^{(\lambda-1)}$ en fonction de $K^{(\lambda)}, K^{(\lambda+1)}, \ldots, K^{(l)}$; les nombres complexes désignés par $N_i^{(\lambda)}$ sont inconnus et jouissent, comme nous l'avons vu, de cette propriété que

le rapport

$$\frac{W_i}{(x-x')^{N'_i}(x-x'')^{N''_i}\ldots}$$

reste fini pour toutes les valeurs finies de x; le nombre désigné par μ_i détermine le degré de la fonction W_i. Quant aux quantités $n_0, n_1, \ldots, n_{l-\lambda}$, ce sont des nombres entiers réels, également inconnus.

Or, comme les coefficients

$$A_0, A_1, A_2, \ldots,$$

ne peuvent vérifier aucune équation de la forme

$$N_0 A_0 + N_1 A_1 + N_2 A_2 + \ldots = 0;$$

$N_0, N_1, N_2, \ldots$, étant des nombres complexes de α, les équations que nous venons de trouver doivent être identiques par rapport à $A_0, A_1, A_2, \ldots$, ce qui suppose les égalités suivantes :

$$\mu_i = M_i^0 n_i, \quad N'_i = M'_i n_i, \quad N''_i = M''_i n_i, \ldots, \quad N_i^{l-\lambda} = M_i^{l-\lambda} n_i,$$

$$N_i^{\lambda} = 0, \quad N_i^{\lambda+1} = 0, \ldots, \quad N_i^{\lambda+i-1} = 0, \quad N_i^{\lambda+i} = n_i,$$

$$N_i^{\lambda+i+1} = 0, \ldots, \quad N_i^{l} = 0$$

pour $i = 0, 1, 2, \ldots, l-\lambda$, et

$$\mu_i = 0, \quad N'_i = 0, \quad N''_i = 0, \quad N'''_i = 0, \ldots$$

pour $i > l-\lambda$.

D'après cela, en ayant égard au rapport qui existe entre la fonction W_i et les nombres $\mu_i, N'_i, N''_i, \ldots$, nous concluons :

1°. Toutes les fonctions $W_{l-\lambda+1}, W_{l-\lambda+2}, W_{l-\lambda+3}, \ldots$ sont du degré 0, et aucune valeur de x ne peut les rendre ni nulles, ni infinies.

2°. Pour $i = 0, 1, 2, \ldots, l-\lambda$, le degré de W_i est $M_i^0 n_i$; et la fonction dont le rapport à W_i reste fini, tant que x n'est pas infini, se

présente sous cette forme :

$$\left[(x-x^{i})^{M'_i}\cdot(x-x^{ii})^{M''_i}\cdot(x-x^{iii})^{M'''_i}\ldots(x-x^{(i-1)})^{M^{(i-1)}_i}\cdot(x-x^{(i-1)})\right],$$

expression où il ne reste d'inconnu que le nombre entier et réel n_i.

Telles sont les propriétés des fonctions

$$W_0,\ W_1,\ W_2,\ W_3,\ldots,$$

qui entrent dans l'équation

$$\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots,$$

quand cette équation se trouve transformée par la méthode que nous avons donnée § IV. De plus, les équations (6) nous donnent l'égalité

$$A_i = \frac{K^{(i+1)}}{n_i},$$

i étant égal à $0, 1, 2, \ldots, l-\lambda$.

§ VI.

D'après ce que nous venons de trouver par rapport aux fonctions

$$W_{l-\lambda+1},\quad W_{l-\lambda+2},\quad W_{l-\lambda+3},\ldots,$$

il n'est pas difficile de s'assurer qu'elles se réduisent à des quantités constantes.

En effet, si la fonction W ne devient ni 0 ni ∞ pour $x=a$, l'exposant de $x-a$ dans le premier terme du développement de W, selon les puissances de $x-a$, doit être zéro. Or, pour

$$W = \varphi(\Delta)\cdot\varphi^{\alpha}(\alpha\Delta)\cdot\varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta)\ldots\varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta),$$

cet exposant (§ II) est égal à la somme

$$n^0 + n'\alpha + n''\alpha^2 + \ldots + n^{m-1}\cdot\alpha^{m-1},$$

où $n^0, n', n'', \ldots, n^{(m-1)}$ sont des nombres réels rationnels, désignant le degré de $x-a$ dans les premiers termes du développement de

$$\varphi(\Delta),\quad \varphi(\alpha\Delta),\quad \varphi(\alpha^2\Delta),\ldots\quad \varphi(\alpha^{m-1}\Delta),$$

et α une racine primitive de l'équation

$$x^m - 1 = 0.$$

Or cette somme ne peut se réduire à zéro, à moins qu'on n'ait

$$n^0 = n' = n'' = \ldots = n^{m-1};$$

c'est-à-dire à moins que le développement de

$$\varphi(\Delta), \quad \varphi(\alpha\Delta), \quad \varphi(\alpha^2\Delta), \ldots, \quad \varphi(\alpha^{m-1}\Delta)$$

ne contienne dans ses premiers termes la même puissance de $x - a$; et alors nous trouvons que pour $x = a$, q et p étant des nombres entiers, le rapport $\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha^q\Delta)}$ reste fini.

Donc, si la fonction W reste finie pour toutes les valeurs finies de x, la même chose doit avoir lieu pour la fraction $\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha^q\Delta)}$.

De la même manière, on parvient à conclure que le degré de la fonction $\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha^q\Delta)}$ est o, et, par conséquent, qu'elle reste finie pour $x = \infty$.

D'après cela, nous trouvons que le produit

$$\frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\Delta)} \cdot \frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha\Delta)} \cdot \frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha^2\Delta)} \cdots \frac{\varphi(\alpha^p\Delta)}{\varphi(\alpha^{m-1}\Delta)}$$

reste fini pour toutes les valeurs de x.

Mais ce produit se réduit à $\frac{\varphi^m(\alpha^p\Delta)}{S}$, où S, indépendante de α^p, est une fonction entière de x; car

$$S = \varphi(\Delta) \cdot \varphi(\alpha\Delta) \cdot \varphi(\alpha^2\Delta) \ldots \varphi(\alpha^{m-1}\Delta)$$

est une fonction symétrique des racines de l'équation

$$\Delta^m = \text{à une fonction entière},$$

et $\varphi(\Delta)$, comme nous avons vu, est une fonction entière de x et Δ. Quant à $\varphi^m(\alpha^p\Delta)$, cette fonction sera évidemment de même forme que $\varphi(\Delta)$. (*Voir* § IV.)

Donc, en faisant

$$7 \qquad \frac{\varphi^m(\alpha^p\Delta)}{S} = \psi(\alpha^p\Delta),$$

nous trouvons que $\psi(\alpha^p\Delta)$ est une fonction déterminée par l'équation

$$\psi(\alpha^p\Delta) = \frac{X_0}{S} + \frac{X_1}{S}\Delta + \frac{X_2}{S}\Delta^2 + \ldots + \frac{X_{m-1}}{S}\Delta^{m-1},$$

où S, X_0, X_1, X_2,..., X_{m-1} sont des fonctions entières de x, et qui reste finie pour toutes les valeurs de x. Or nous allons prouver que cela ne peut avoir lieu, à moins que tous les termes de la valeur de $\psi(\alpha^p\Delta)$ ne soient constants.

En effet, d'après la valeur de $\psi(\alpha^p\Delta)$, pour $i < m$, nous trouvons

$$\psi(\alpha^p\Delta) + \alpha^{-i}\psi(\alpha^{p+1}\Delta) + \alpha^{-2i}\psi(\alpha^{p+2}\Delta) + \ldots$$
$$+ \alpha^{-(m-1)i}\psi(\alpha^{p+m-1}\Delta) = m\frac{X_i}{S}\Delta^i,$$

et, par conséquent,

$$\left[\psi(\alpha^p\Delta) + \alpha^{-i}\psi(\alpha^{p+1}\Delta) + \alpha^{-2i}\psi(\alpha^{p+2}\Delta) + \ldots + \alpha^{-(m-1)i}\psi(\alpha^{p+m-1}\Delta)\right]^m = m^m\left(\frac{X_i}{S}\right)^m\Delta^{mi}$$

La première partie de cette équation étant composée de la fonction ψ reste finie pour toutes les valeurs de x; mais la seconde $m^m\left(\frac{X_i}{S}\right)^m\Delta^{mi}$, tant qu'on ne la suppose pas constante, sera infinie ou pour certaines valeurs de x, ou bien pour $x = \infty$, selon que la fonction rationnelle $m^m\left(\frac{X_i}{S}\right)^m\Delta^{mi}$ se réduira à une fraction simple ou à une fonction entière.

Donc on ne pourra supposer aucun terme de la fonction $\psi(\alpha^p\Delta)$ variable, et par conséquent, d'après (7), on aura

$$\varphi(\alpha^p\Delta) = C_p\sqrt[m]{S},$$

où C_p est une constante et S une fonction indépendante de α^p. Or, si l'on prend, d'après cette équation, la valeur des fonctions

$$\varphi(\Delta),\quad \varphi(\alpha\Delta),\quad \varphi(\alpha^2\Delta),\ldots,\quad \varphi(\alpha^{m-1}\Delta),$$

et qu'on les porte dans la formule

$$W = \varphi(\Delta) \cdot \varphi^{\alpha}(\alpha\Delta) \cdot \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \ldots \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta),$$

on trouve

$$W = C_0 \cdot C_1^{\alpha} \cdot C_2^{\alpha^2} \ldots C_{m-1}^{\alpha^{m-1}} \cdot S^{\frac{1+\alpha^2+\alpha^2+\ldots+\alpha^{m-1}}{m}}.$$

Mais la somme

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots + \alpha^{m-1}$$

se réduit à 0; donc W a une valeur constante

§ VII.

Ayant démontré que dans la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$, toutes les fonctions

$$W_{l-j+1}, \quad W_{l-j+2}, \ldots,$$

ne peuvent être que constantes, nous en déduisons que les seuls termes variables sont

$$A_0 \log W_0, \quad A_1 \log W_1, \ldots, \quad A_{l-j} \log W_{l-j},$$

et comme, d'après (6), les coefficients de ces termes sont de la forme

$$\frac{K^{(j+1)}}{n_i},$$

où n_i est un nombre entier, nous concluons que leur nombre ne peut surpasser celui des termes de la série

$$K^0, \quad K', \quad K'', \ldots, \quad K^l,$$

différents de zéro.

En remarquant que l est le nombre des racines de l'équation

$$Fx = 0,$$

et que

$$K^0 = \lim \left(\frac{xfx}{Fx\,\Delta}\right)_{x=\infty}$$

se réduit à 0, si le degré de $\frac{fx}{Fx}$ est inférieur à -1, nous parvenons à établir les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Soient $\frac{fx}{Fx}$ une fraction rationnelle, θx un polynôme dont les facteurs sont d'un degré moins élevé que m. Si la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$ ne contient que les termes logarithmiques, l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$ est égale à une somme de termes de la forme suivante :*

$$A \log \left[\varphi(\sqrt[m]{\theta x}) . \varphi^{\alpha}(\alpha^2 \sqrt[m]{\theta x}) . \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2 \sqrt[m]{\theta x}) \ldots \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1} \sqrt[m]{\theta x}) \right],$$

où $\varphi(\sqrt[m]{\theta x})$ est une fonction entière de x et $\sqrt[m]{\theta x}$; α est une racine primitive de l'équation

$$\alpha^m - 1 = 0,$$

et le nombre de ces termes, suffisants pour donner la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt[m]{\theta x}}$, ne surpassera pas le degré de Fx, la fonction $\frac{fx}{Fx\sqrt[m]{\theta x}}$ étant d'un degré moindre que -1; dans le cas contraire, le nombre de ces termes ne surpassera le degré de Fx que d'une unité.

Dans le cas où $Fx = 1$, le théorème précédent se réduit à celui-ci :

THÉORÈME II. — *Si fx, θx étant des fonctions entières, θx ne contient que des facteurs de degrés inférieurs à m, l'intégrale $\int \frac{fx}{\sqrt[m]{\theta x}} dx$ s'exprimant d'ailleurs par les seuls termes logarithmiques, sera réductible à la formule*

$$A \log \left[\varphi(\sqrt[m]{\theta x}) . \varphi^{\alpha}(\alpha \sqrt[m]{\theta x}) . \varphi^{\alpha^2}(\alpha^2 \sqrt[m]{\theta x}) \ldots \varphi^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1} \sqrt[m]{\theta x}) \right],$$

où $\varphi(\sqrt[m]{\theta x})$ est une fonction entière de x et $\sqrt[m]{\theta x}$, et α est une racine primitive de l'équation

$$x^m - 1 = 0.$$

Dans le cas de $m = 2$, nous obtenons le théorème de M. Abel, cité dans le § I.

THÉORÈME III. — *L'intégrale* $\int \frac{fx}{\sqrt[m]{\varphi x}} dx$ *n'est pas réductible aux fonctions algébrique et logarithmique, si* φx *n'a pas de facteur multiple d'un degré plus élevé que* $m - 1$, *et si la fonction* fx *est d'un degré moins élevé que* $\frac{\sqrt[m]{\varphi x}}{r}$.

En effet, si l'on suppose que $\int \frac{fx}{\sqrt[m]{\varphi x}} dx$ est réductible aux fonctions algébrique et logarithmique, d'après le § I, on parvient à conclure que sa valeur n'a point de terme algébrique. La même chose a lieu par rapport aux termes logarithmiques; car la différentielle $\frac{fx}{\sqrt[m]{\varphi x}} dx$ n'a pour dénominateur que $\sqrt{\varphi x}$, et le degré de $\frac{fx}{\sqrt[m]{\varphi x}}$ est moins élevé que -1; mais dans ce cas, d'après le théorème I, le nombre de termes logarithmiques suffisant pour donner la valeur de $\int \frac{fx}{\sqrt[m]{\varphi x}}$ est 0. Donc, si l'on suppose que l'intégrale $\int \frac{fx}{\sqrt[m]{\varphi x}} dx$ est réductible aux fonctions algébrique et logarithmique, on sera forcé de conclure que sa valeur est une constante.

Dans le cas de $m = 2$, cela se réduit au théorème donné par M. Liouville.

§ VIII

A l'aide des théorèmes que nous venons de donner, on peut résoudre entièrement la question de l'intégration en signes algébriques et logarithmiques des différentielles binômes

$$x^{s}(a + bx^{s'})^{s''} dx,$$

où s, s', s'' sont des nombres rationnels.

L'intégrale de ces différentielles se réduit facilement à la forme

$$\int x^{p-1}(1 + x^{q})^{m} dx,$$

où p, q, m, m' sont des nombres entiers et $q > 0$, et l'on trouve, par les méthodes connues, la valeur de cette intégrale, si l'une des deux quantités $\frac{p}{q}$, $\frac{p}{q} + \frac{m'}{m}$ est un nombre entier. Dans le cas contraire, cette intégrale se réduit à la forme

$$U_0 + \int \frac{x^{p'}}{(1 + x^q)^{\frac{m''}{m}}} dx,$$

où U_0 est une fonction algébrique, p' est le plus petit nombre positif congru à p selon le module q, et m'' le plus petit nombre congru à $-m'$ selon le module m, ce qui suppose

$$p' < q, \quad m'' < m.$$

Pour trouver le terme algébrique dans la valeur de l'intégrale $\int \frac{x^{p'}}{(1 + x^q)^{\frac{m''}{m}}} dx$, d'après le § I, on cherche le plus grand commun diviseur entre les fonctions $(1 - x^q)^{m'}$ et $\frac{d(1 + x^q)^{m''}}{dx}$. Ce diviseur étant $(1 + x^q)^{m''-1}$, on conclut que le terme algébrique doit avoir pour dénominateur la fonction $(1 + x^q)^{m''-1}$.

Mais, en examinant les fonctions

$$\frac{x^{p'-1}(1 + x^q)^{m''-1}}{(1 + x^q)^{m'}}, \qquad \frac{1 + x^q)^{m''-1}}{x(1 + x^q)^{m'' \cdot \frac{m-1}{m}}},$$

où, comme nous avons vu, $p' < q$, $m'' < m$, $q < 0$, on trouve que leur degré est au-dessous de -1; ce qui, d'après le § I, prouve qu'il n'y a pas de terme algébrique dans la valeur de l'intégrale $\int \frac{x^{p'-1}}{(1 + x^q)^{\frac{m''}{m}}} dx$.

Donc il ne reste plus qu'à chercher l'expression de sa valeur à l'aide des seuls termes logarithmiques. Mais une telle expression, d'après le

§ III, n'est possible que dans le cas où le degré de $\frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}$ ne se trouve pas au-dessus de -1, et, par suite, du dernier théorème que nous venons de montrer, ce degré ne doit pas être au dessous de -1. Par conséquent, l'intégration de $\frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}dx$, à l'aide des signes algébriques et logarithmiques, n'est pas possible, à moins que la fonction $\frac{x^{p'-1}}{(1+x^q)^{\frac{m''}{m}}}$ ne soit précisément du degré -1; ce qui entraîne cette équation entre les exposants p', q, $\frac{m''}{m}$:

$$\frac{p'}{q} - \frac{m''}{m} = 0.$$

Mais en passant au nombre p et m', dont le premier est congru à p' selon le module q, et le second à $-m'$ selon le module m, nous trouvons que l'équation précédente suppose que $\frac{p}{q} + \frac{m'}{m}$ est un nombre entier. Donc, outre ce cas et celui où p est divisible par q, l'intégrale

$$\int x^{p-1}(1+x^q)^{\frac{m'}{m}}dx$$

présente une transcendante particulière; c'est ce qu'il s'agissait de démontrer pour être sûr que les méthodes ordinaires de l'intégration des différentielles binômes avec les exposants rationnels, comprennent tous les cas où cette intégration est possible en signes algébriques et logarithmiques.

§ IX.

D'après ce que nous avons trouvé dans les §§ IV, V et VI, on conclut qu'en général le nombre de termes logarithmiques suffisant pour donner la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$ est $l - \lambda + 1$, où l indique le

degré de Fx, et λ le nombre des équations (4). De plus, nous avons vu que l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$ peut être réduite de manière que, dans l'équation

$$\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta} = A_0 \log W_0 + A_1 \log W_1 + A_2 \log W_2 + \ldots,$$

tous les termes soient de la forme

$$\frac{K^{(\lambda+i)}}{n_i} \log W_i,$$

où n_i est un nombre entier non complexe;

$$W_i = \varphi_i(\Delta) . \varphi_i^{\alpha}(\alpha\Delta) . \varphi_i^{\alpha^2}(\alpha^2\Delta) \ldots \varphi_i^{\alpha^{m-1}}(\alpha^{m-1}\Delta)$$

est du degré $M_i^0 . n_i$, et, pour toutes les valeurs finies de x, reste en rapport fini avec la fonction

$$\left[(x-x')^{M_i'} . (x-x'')^{M_i''} . (x-x''')^{M_i'''} \ldots (x-x^{(l-1)})^{M_i^{(l-1)}} . (x-x^{(l)})\right]^{n_i}.$$

Quant aux nombres $M_i^0, M_i', M_i'', M_i''', \ldots, M_i^{(l-1)}$, ils sont connus d'après les équations (4).

Il n'est pas difficile de s'assurer que, d'après cela, chaque terme de la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$ est complètement déterminé, c'est-à-dire que, si l'on trouve les nombres

$$n_0, \quad n_1, \quad n_2, \ldots, n_{l-1}$$

et les fonctions

$$W_0, \quad W_1, \quad W_2, \ldots, \quad W_{l-1}$$

qui puissent remplir les conditions mentionnées, la somme

$$\frac{K^{(\lambda)}}{n_0} \log W_0 + \frac{K^{(\lambda+1)}}{n_1} \log W_1 + \frac{K^{(\lambda+2)}}{n_2} \log W_2 + \ldots + \frac{K^{(l)}}{n_{l-1}} \log W_{l-1}$$

sera la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$, lorsqu'elle peut être exprimée à l'aide des termes logarithmiques.

En effet, si cette somme n'est pas la valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$, supposons que

$$B_0 \log W^0, \quad B_1 \log W', \quad B_2 \log W'', \ldots, \quad B_s \log W^s$$

soient les termes qu'il faut y ajouter pour la rendre égale à $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$.

On aura

$$\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta} =$$

$$\frac{K^{l}}{n^{l}} \log W_0 + \frac{K^{l-1}}{n_1} \log W_1 + \frac{K^{l-2}}{n_2} \log W_2 + \ldots + \frac{K^{l}}{n_{l-1}} \log W_{l-1}$$

$$+ B_0 \log W^0 + B_1 \log W' + B_2 \log W'' + \ldots + B_s \log W^s.$$

Pour cette valeur de l'intégrale $\int \frac{fx}{Fx}\frac{dx}{\Delta}$, les équations (2) et (3) donnent

$$K^{l} = \sum_{i=0}^{i=l-1} \nu_i \frac{K^{l-i}}{n_i} + \sum_{i=1}^{i=s} \nu_i B_i.$$

$$K' = \sum_{i=0}^{i=l-1} N'_i \frac{K^{l-i}}{n} + \sum_{i=1}^{i=s} P'_i B_i.$$

$$K'' = \sum_{i=0}^{i=l-1} N''_i \frac{K^{l-i}}{n_i} + \sum_{i=0}^{i=s} P''_i B_i.$$

. . . . . .

$$K^{l} = \sum_{i=0}^{i=l-1} N^{l}_i \frac{K^{l-i}}{n_i} + \sum_{i=1}^{i=s} P^{l}_i B_i.$$

où ν_i, P'_i, P''_i, P'''_i, ..., $P^{(l)}_i$ sont les nombres complexes de α qui jouent le même rôle par rapport à la fonction W^i, que les nombres ν_i, N'_i, N''_i, N'''_i, ..., N^{l}_i par rapport à la fonction W_i.

Mais pour les valeurs trouvées de μ_i, N'_i, N''_i, N'''_i, ..., N'^{l}_i (§ V), on a, comme il n'est pas difficile de s'en assurer, les égalités suivantes :

$$K^0 = \sum_{i=0}^{i=l-1} \mu_i \frac{K^{l+i}}{n_i}.$$

$$K^1 = \sum_{i=0}^{i=l-1} N'_i \frac{K^{l+i}}{n_i}.$$

$$K^2 = \sum_{i=0}^{i=l-1} N''_i \frac{K^{l+i}}{n_i}.$$

. . . . . .

$$K^l = \sum_{i=0}^{i=l-1} N'^{l}_i \frac{K^{l+i}}{n_i}.$$

Par conséquent, les équations précédentes donnent

$$\sum_{i=0}^{i=s} \nu_i B_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{i=s} P'_i B_i = 0,$$

$$\sum_{i=0}^{i=s} P''_i B_i = 0, \ldots, \qquad \sum_{i=0}^{i=s} P'^{l}_i B_i = 0,$$

qui doivent être identiques par rapport à B_0, B_1, B_2, ..., B_s, lorsque la somme

$$B_0 \log W^0 + B_1 \log W' + B_2 \log W'' + \ldots + B_s \log W$$

est réduite au plus petit nombre de termes (§ II). Donc on aura

$$\nu_i = 0, \quad P'_i = 0, \quad P''_i = 0, \ldots, \quad P'^{l}_i = 0,$$

ce qui, d'après le § VI, nous fait conclure que chacun des termes

$$B_0 \log W_0, \quad B_1 \log W_1, \quad B_2 \log W_2, \ldots, \quad B_s \log W_s$$

ne peut être que constant.

Sur une transformation d'intégrales définies;

PAR M. BESGE.

Les deux intégrales définies

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin 2u) \cos u\, du, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 u) \cos u\, du,$$

peuvent se transformer l'une dans l'autre, ou plutôt elles sont égales entre elles, et l'on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin 2u) \cos u\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 u) \cos u\, du,$$

la fonction φ n'étant assujettie qu'aux conditions ordinaires qui font qu'on peut regarder les intégrales comme des sommes d'éléments.

On vérifiera aisément la formule que nous venons d'écrire, dans le cas où $\varphi(x)$ est développable en série suivant les puissances de x : il suffira de se rappeler l'équation connue

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \cos^{n+1} u\, du = \frac{1}{2^n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} u\, du.$$

Je pourrais ajouter une démonstration plus rigoureuse; mais toutes ces transformations d'intégrales définies n'offrent aujourd'hui que peu d'intérêt, et je crois devoir me borner au peu de mots qui précèdent.

MÉMOIRE

SUR LES SURFACES DONT TOUTES LES LIGNES DE COURBURE SONT PLANES OU SPHÉRIQUES;

PAR M. J.-A. SERRET.

M. Bonnet a présenté à l'Académie des Sciences, dans la séance du 10 janvier 1853, un Mémoire ayant pour objet la recherche des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes. La méthode suivie par M. Bonnet consiste à former d'abord l'équation aux différentielles partielles du deuxième ordre, qui représente les surfaces dont il s'agit; il obtient ensuite l'équation sous forme finie au moyen des méthodes d'intégration développées par l'illustre Monge dans son *Application de l'Analyse à la Géométrie*.

Dès que j'eus pris connaissance de l'extrait du Mémoire de M. Bonnet, imprimé dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, je pensai que la solution de la question qu'il avait traitée, devait découler sans effort d'un théorème remarquable découvert par M. Joachimsthal et publié dans le tome XXX du Journal de M. Crelle. Effectivement, le théorème de M. Joachimsthal, dans la recherche dont il s'agit ici, donne immédiatement les intégrales du problème et joue un rôle analogue à celui des principes des forces vives et des aires dans les questions de Mécanique. Je cherchai donc à étudier, à ce nouveau point de vue, les détails du problème posé par M. Bonnet, et je communiquai à l'Académie le résultat de mes recherches, dans la séance du 24 janvier 1853.

Quelque temps après, mon ami M. Liouville m'engagea à essayer la recherche des surfaces à lignes de courbure sphériques, d'après la méthode que j'avais suivie pour les surfaces à lignes de courbure

planes, en y ajoutant les considérations que peut fournir ici naturellement la *transformation par rayons vecteurs réciproques*. La solution de ce nouveau problème est effectivement identique à celle du premier; je la communiquai à l'Académie dans la séance du 21 février; j'ajoutai ensuite quelques détails à la séance suivante [*].

Je me propose de réunir dans ce Mémoire, avec quelques développements, les résultats divers que j'ai successivement présentés à l'Académie.

PREMIÈRE PARTIE.

DES SURFACES DONT TOUTES LES LIGNES DE COURBURE SONT PLANES.

§ Ier.

Le théorème de M. Joachimsthal, cité plus haut, consiste en ce que :

Si une surface a une ligne de courbure plane, le plan de cette ligne coupe la surface partout sous le même angle; réciproquement, si un plan coupe une surface partout sous le même angle, l'intersection est une ligne de courbure de la surface.

D'après ce théorème, si une surface est telle, que les lignes de courbure de l'un des systèmes soient planes, on aura

$$ax + by + cz = u, \tag{1}$$

$$-ap - bq + c = l\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \tag{2}$$

Dans ces équations, x, y, z désignent les coordonnées rectangulaires de la surface; p et q sont mis au lieu de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$. Enfin, les quantités a, b, c, u et l sont constantes pour une même ligne de cour-

[*] Dans le même temps, M. Bonnet s'occupait de la même question qu'il traitait également par la méthode que j'avais fait connaître après la publication de son premier Mémoire. On trouvera dans le tome XXXVI des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, les Notes de M. Bonnet et les observations que j'ai cru devoir présenter à l'occasion de ces Notes.

bure; mais comme elles varient d'une ligne à une autre, il faut les considérer comme des fonctions d'un paramètre t.

Si l'on imagine que t soit éliminé des équations (1) et (2), on aura une équation différentielle partielle du premier ordre, qui sera celle des surfaces dont les lignes de courbure de l'un des systèmes sont planes. Cette équation ne renfermera que trois fonctions arbitraires, car on peut égaler l'une des cinq quantités a, b, c, u, l à l'unité, et l'une des quatre autres au paramètre t : il s'ensuit que l'équation intégrale renfermera quatre fonctions arbitraires. L'élimination de t n'est possible que si l'on a fixé les fonctions arbitraires; mais si l'on suppose que x et t soient prises pour variables indépendantes, on déduira facilement des équations (1) et (2) une équation différentielle partielle entre y, x et t. L'équation intégrale de celles-ci et l'équation (1) serviront à représenter les surfaces dont les lignes de courbure de l'un des systèmes sont planes.

Mais si l'on ajoute la condition que les lignes de courbure du second système soient planes, on aura, outre les équations (1) et (2),

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \upsilon, \tag{3}$$

$$-\alpha p - \beta q + \gamma = \lambda\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \tag{4}$$

α, β, γ, υ et λ étant des fonctions d'un second paramètre θ, qui restent constantes, avec ce paramètre, sur une même ligne de courbure, mais qui varient d'une ligne à une autre.

Il s'agit maintenant d'exprimer que les équations (1) et (3) appartiennent à deux lignes de courbure de systèmes différents. Désignons par dx, dy, dz les variations infiniment petites de x, y, z sur la première ligne de courbure; par δx, δy, δz les variations sur la seconde, on aura

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0.$$

On peut éliminer les six variations que renferme cette équation au moyen des suivantes :

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0, \quad dz = p\,dx + q\,dy,$$

$$\alpha\,\delta x + \beta\,\delta y + \gamma\,\delta z = 0, \quad \delta z = p\,\delta x + q\,\delta y;$$

il vient alors

$$(bp - aq)(\beta p - \alpha q) + (a + cp)(\alpha + \gamma p) + (b + cq)(\beta + \gamma q) = 0;$$

enfin, si l'on ajoute à cette équation celle que l'on obtient en multipliant membre à membre les équations (2) et (4), il vient simplement

$$(5) \qquad a\alpha + b\beta + c\gamma = l\lambda,$$

équation qui doit être satisfaite en prenant pour a, b, c et l des fonctions du paramètre t, et pour α, β, γ, λ des fonctions du paramètre θ.

On peut satisfaire à l'équation (5) en supposant a, b, c constantes ou α, β, γ constantes. Ce cas est celui des surfaces dont les lignes de courbure de l'un des systèmes sont dans des plans parallèles à un plan fixe. S'il s'agit, par exemple, du premier système, et si l'on prend le plan fixe pour celui des xz, on pourra faire

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 0;$$

alors l'équation (5) se réduit à

$$\beta = l\lambda,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\beta = 0, \quad \lambda = 0,$$

ou bien

$$-l = \text{une constante } m, \quad \beta = -m\lambda.$$

Si c'est la première hypothèse qui a lieu, comme α, β, γ ne peuvent être nuls tous trois, on peut prendre, en outre,

$$\alpha = 1.$$

Laissons de côté le cas où les plans des lignes de l'une des courbures sont parallèles. Parmi les trois quantités a, b, c ou α, β, γ, deux au moins sont différentes de zéro; on peut donc supposer a et β différents de zéro; par conséquent, on peut poser

$$a = 1, \quad \beta = 1;$$

l'équation (5) devient alors

$$(6) \qquad \alpha + b + c\gamma = l\lambda.$$

Désignons les dérivées par des accents à la manière de Lagrange : il viendra, en différentiant l'équation (6) par rapport au paramètre t, puis celle obtenue ainsi par rapport à θ,

$$(7)\qquad \begin{cases} b' + c'\gamma = l'\lambda, \\ c'\gamma = l'\lambda'. \end{cases}$$

Si c' et γ' sont différents de zéro, la deuxième équation (7) donne

$$l' = \frac{\gamma'}{\lambda'}c',$$

et la première devient alors

$$b' = \left(\frac{\lambda\gamma'}{\lambda'} - \gamma\right)c';$$

à cause de l'hypothèse $c' \neq 0$, cette équation ne peut subsister que si $\frac{\lambda\gamma'}{\lambda'} - \gamma$ se réduit à zéro ou au moins à une constante ; par conséquent, le rapport des quantités b' et c' est constant, et il existe une relation linéaire entre b et c. L'équation (6) exige donc en premier lieu que l'on ait

$$c = \text{constante} \quad \text{ou} \quad \gamma = \text{constante},$$

ou que b et c soient liées par une équation linéaire. D'où il suit que les plans des lignes de l'une des courbures sont parallèles à une droite fixe. Supposons qu'il s'agisse des lignes de la première courbure, et prenons la droite fixe pour axe des y ; on aura

$$b = 0;$$

l'équation (6) devient alors

$$\alpha + c\gamma = l\lambda,$$

et sa dérivée relative à t,

$$c'\gamma = l'\lambda.$$

c' ne peut être nul, car alors c serait constant, et l'on rentrerait dans le cas où les plans des lignes de l'une des courbures sont parallèles. Alors on tire des équations précédentes

$$\gamma = \frac{l'}{c'}\lambda, \quad \alpha = \left(l - \frac{cl'}{c'}\right)\lambda;$$

λ ne peut être nul, car on aurait $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, et les plans des lignes

de la deuxième courbure seraient parallèles; il faut donc que $\frac{l'}{c'}$ et $l - \frac{cl'}{c'}$ soient constantes, et, par suite, que le rapport des quantités α et γ soit constant. Cela prouve que les plans des lignes de la deuxième courbure sont parallèles à une droite fixe qui est située dans le plan des xz. On peut prendre cette droite pour axe des x, et l'on aura

$$\alpha = 0.$$

L'équation de condition (6) devient alors

$$c\gamma = l\lambda.$$

On ne peut avoir $c = 0$ ni $\gamma = 0$, puisqu'on rentrerait dans le cas des plans parallèles. On a donc, en désignant par m une constante,

$$l = mc, \quad \lambda = \frac{\gamma}{m}.$$

Il résulte de cette discussion que les solutions de l'équation (5) se réduisent, pour notre objet, à trois seulement, et qui sont :

$$\begin{array}{llllll}
1^{\circ}. & a = 0, & b = 1, & c = 0, & \alpha = 1, & \beta = 0, \quad \lambda = 0; \\
2^{\circ}. & a = 0, & b = 1, & c = 0, & l = -m, & \beta = -m\lambda; \\
3^{\circ}. & a = 1, & b = 0, & l = mc, & \alpha = 0, & \beta = 1, \quad \lambda = \frac{\gamma}{m};
\end{array}$$

m désigne partout une constante; les quantités dont la valeur n'est pas fixée, demeurent des fonctions arbitraires du paramètre t ou θ. Nous allons examiner successivement les trois cas auxquels on est ici conduit.

§ II.

Premier cas.

On a

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 0, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \lambda = 0;$$

si l'on fait, en outre,

$$l = -t, \quad u = f(t),$$
$$\gamma = \theta, \quad v = \varphi(\theta).$$

f et φ désignant deux fonctions arbitraires, les équations (1), (2), (3), (4) du § Ier deviennent

$$(1)\quad \begin{cases} y = f(t), \\ q = t\sqrt{1+p^2+q^2}; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x + \theta z = \varphi(\theta), \\ p = \theta. \end{cases}$$

L'élimination de t entre les équations (1), celle de θ entre les équations (2), donnent

$$(3)\quad \begin{cases} y = f\left(\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right), \\ x + pz = \varphi(p). \end{cases}$$

Chacune de ces équations aux différentielles premières renferme une fonction arbitraire et représente la surface cherchée. Elles constituent les deux intégrales intermédiaires d'une même équation différentielle partielle du deuxième ordre débarrassée d'arbitraires, et, par conséquent, en intégrant l'une quelconque d'entre elles, on obtiendra l'équation de la surface sous forme finie. Mais la connaissance des deux intégrales premières peut conduire, comme on sait, d'une manière plus rapide au résultat. Effectivement, la question se trouve alors ramenée à l'intégration de la seule équation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

qui est aux différentielles ordinaires. Prenons t et θ pour variables indépendantes; les équations (1) et (2) donnent

$$p = \theta, \quad q = \frac{t\sqrt{1+\theta^2}}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$dy = f'(t)\,dt, \quad dx = -\theta\,dz - z\,d\theta + \varphi'(\theta)\,d\theta.$$

En portant ces valeurs de p, q, dx et dy dans l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

celle-ci devient

$$(4)\quad dz\sqrt{1-\theta^2} + z\frac{\theta\,d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}} = \frac{t f'(t)\,dt}{\sqrt{1-t^2}} + \frac{\theta\varphi'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}},$$

équations dont les deux membres sont séparément intégrables. Pour éviter les signes d'intégration, nous prendrons, au lieu de $f(t)$ et $\varphi(\theta)$, deux autres fonctions arbitraires $F(t)$ et $\Phi(\theta)$ dont les dérivées $F'(t)$ et $\Phi'(\theta)$ soient telles que l'on ait

$$f(t) = (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} F'(t), \quad \varphi(\theta) = (1 + \theta^2)^{\frac{3}{2}} \Phi'(\theta).$$

Intégrant alors l'équation (4), il vient

$$(5) \quad z\sqrt{1 + \theta^2} = [t(1 - t^2) F'(t) - F(t)] + [\theta(1 + \theta^2) \Phi'(\theta) - \Phi(\theta)];$$

d'ailleurs la première équation (1) et la première équation (2) peuvent s'écrire

$$(6) \qquad y = (1 - t^2)^{\frac{3}{2}} F'(t),$$

$$(7) \qquad x + \theta z = (1 + \theta^2)^{\frac{3}{2}} \Phi'(\theta),$$

et il est clair que l'équation de la surface cherchée sera le résultat de l'élimination de t et θ entre les équations (5), (6) et (7). On peut donner au résultat une forme plus élégante; en effet, si l'on élimine entre les équations (5), (6) et (7), les dérivées F' et Φ' des fonctions arbitraires, il vient

$$\frac{z - \theta x}{\sqrt{1 + \theta^2}} - \frac{ty}{\sqrt{1 - t^2}} + F(t) - \Phi(\theta) = 0;$$

cette équation peut remplacer l'équation (5), et il est aisé de voir qu'on reproduit les équations (6) et (7) en la différentiant d'abord par rapport à t, puis par rapport à θ. Si donc on fait

$$V = \frac{z - \theta x}{\sqrt{1 + \theta^2}} - \frac{ty}{\sqrt{1 - t^2}} + F(t) - \Phi(\theta),$$

l'équation de la surface cherchée sera le résultat de l'élimination de t et θ entre les trois

$$(8) \qquad V = 0, \quad \frac{dV}{dt} = 0, \quad \frac{dV}{d\theta} = 0.$$

On peut introduire p et q comme variables auxiliaires au lieu de t et θ. Si l'on désigne par U le produit de V par $\sqrt{1 + \theta^2}$, que l'on remplace t et θ par leurs valeurs en fonction de p et q, et, enfin, qu'on

mette simplement $\Phi(\theta)$ au lieu de $\sqrt{1+\theta^2}\,\Phi(\theta)$, on aura

$$U = z - px - qy + \sqrt{1+p^2}\,F\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right) + \Phi(p),$$

et il est évident qu'on peut prendre

$$(9) \qquad U = 0, \quad \frac{dU}{dp} = 0, \quad \frac{dU}{dq} = 0,$$

à la place des équations (8).

Les surfaces représentées par les équations (8) ou (9) constituent un premier genre parmi celles dont toutes les lignes de courbure sont planes. Elles ont été étudiées par Monge, avec détail, dans son *Application de l'Analyse à la Géométrie* (cinquième édition, page 161). On trouvera dans cet ouvrage plusieurs générations élégantes de ces surfaces.

Dans l'analyse qui précède, nous avons pris la quantité $-l$ pour le paramètre t; nous avons donc exclu le cas de $-l =$ une constante m. Dans ce cas, les équations qui doivent remplacer les équations (3) aux différentielles premières, sont évidemment

$$q = m\sqrt{1+p^2+q^2},$$
$$x + pz = \varphi(p);$$

φ désignant une fonction arbitraire. La première équation a lieu entre p et q, d'où il suit que la surface dont il s'agit est développable. La valeur de q en fonction de p est

$$q = \frac{m}{\sqrt{1-m^2}}\sqrt{1+p^2};$$

si donc Φ désigne une fonction arbitraire, et que l'on fasse

$$U = z - px - \frac{m\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1-m^2}}\,y + \Phi(p),$$

l'équation de la surface sera le résultat de l'élimination de p entre les deux

$$U = 0, \quad \frac{dU}{dp} = 0.$$

Il est aisé de vérifier que ces deux équations entraîneront

$$x + pz = \varphi(p),$$

si l'on détermine la fonction arbitraire Φ de manière que l'on ait

$$(1 + p^2)\Phi'(p) - p\Phi(p) = \varphi(p).$$

Nous avons encore exclu le cas de $\gamma =$ constante, puisque nous avons pris γ pour le paramètre θ. Mais comme l'équation (4) du § Ier donne $p = \gamma$, on voit que le cas de γ constante est celui des surfaces cylindriques, qui peuvent être considérées comme un cas particulier des surfaces développables dont il vient d'être question.

§ III.

Deuxième cas.

La deuxième solution de l'équation (5) du § Ier est

$$a = 0, \quad b = 1, \quad c = 0, \quad l = -m, \quad \xi = -m\lambda,$$

m désignant une constante. Les équations relatives aux lignes de la première courbure ne renferment que la seule quantité arbitraire u qui peut être prise égale au paramètre t; la seconde de ces équations, qui est

$$q = m\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

ne renferme aucune trace du paramètre t; par suite, elle appartient à tous les points de la surface, qui n'est autre, comme on voit, que la surface développable considérée au § II.

Les deux équations relatives aux lignes de la deuxième courbure renferment *trois* arbitraires, fonctions du paramètre θ. Cela provient de ce que les plans des lignes de la deuxième courbure sont essentiellement indéterminés; effectivement, ces lignes de courbure sont les génératrices rectilignes de la surface, et, par suite, leurs plans ne sont pas complètement déterminés. On peut faire cesser cette indétermination en convenant que les plans dont il s'agit soient parallèles à une droite fixe prise à volonté; c'est ainsi que la surface dé-

veloppable, dont il est ici question, s'est présentée naturellement comme un cas particulier de l'hypothèse discutée au § II.

La deuxième des trois solutions de l'équation (5) du § Ier ne peut donc donner aucune surface nouvelle.

§ IV.

Troisième cas.

On a ici

$$a = 1, \quad b = 0, \quad l = mc, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \lambda = \frac{\gamma}{m},$$

m désignant une constante. Les quantités c et γ ne peuvent être supposées constantes ni l'une ni l'autre, car alors on rentrerait dans le cas du § II; nous ferons, en conséquence,

$$c = -t, \quad u = f(t),$$
$$\gamma = -\theta, \quad v = \varphi(\theta),$$

f et φ désignant deux fonctions arbitraires; les équations (1), (2), (3), (4) du § Ier deviennent alors

$$(1) \qquad \begin{cases} x = tz + f(t), \\ p + t = mt\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \end{cases}$$

$$(2) \qquad \begin{cases} y = \theta z + \varphi(\theta), \\ q + \theta = \frac{\theta}{m}\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \end{cases}$$

On aura les deux équations de la surface aux différentielles premières en éliminant t entre les équations (1) et θ entre les équations (2); on trouve ainsi

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{pz}{-1 + m\sqrt{1 + p^2 + q^2}} + f\left(\dfrac{p}{-1 + m\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right), \\ y = \dfrac{mqz}{-m + \sqrt{1 + p^2 + q^2}} + \varphi\left(\dfrac{mq}{-m + \sqrt{1 + p^2 + q^2}}\right); \end{cases}$$

mais il vaut mieux, pour obtenir l'équation sous forme finie, se servir des équations (1) et (2), en opérant comme au § II. Les équations (1)

et (2) donnent, en prenant t et θ pour variables indépendantes,

$$p = \frac{(m^2-1)\,t\sqrt{m^2+(m^2-1)\,\theta^2}}{\sqrt{m^2+(m^2-1)\,\theta^2}-m^2\sqrt{1-(m^2-1)\,t^2}},$$

$$q = \frac{(m^2-1)\,\theta\sqrt{1-(m^2-1)\,t^2}}{\sqrt{m^2+(m^2-1)\,\theta^2}-m^2\sqrt{1-(m^2-1)\,t^2}},$$

$$dx = t\,dz + z\,dt + f'(t)\,dt,$$

$$dy = \theta\,dz + z\,d\theta + \varphi'(\theta)\,d\theta.$$

Portant ces valeurs de p, q, dx et dy dans l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

celle-ci devient

$$\frac{1}{m^2-1}\left[\sqrt{m^2+(m^2-1)\,\theta^2}-\sqrt{1-(m^2-1)\,t^2}\right]dz$$
$$+\left(\frac{t\,dt}{\sqrt{1-(m^2-1)\,t^2}}+\frac{\theta\,d\theta}{\sqrt{m^2+(m^2-1)\,\theta^2}}\right)z$$
$$+\frac{t f'(t)\,dt}{\sqrt{1-(m^2-1)\,t^2}}+\frac{\theta\varphi'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{m^2+(m^2-1)\,\theta^2}}=0.$$

Intégrant, il vient

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{m^2+(m^2-1)\,\theta^2}-\sqrt{1-(m^2-1)\,t^2}}{m^2-1}\,z \\ +\displaystyle\int\frac{t f'(t)\,dt}{\sqrt{1-(m^2-1)\,t^2}}+\int\frac{\theta\varphi'(\theta)\,d\theta}{\sqrt{m^2+(m^2-1)\,\theta^2}}=0. \end{array}\right.$$

La surface cherchée sera donc représentée par le système formé de la première équation (1), de la première équation (2) et de l'équation (4). On peut débarrasser le résultat des signes d'intégration qu'il renferme. Désignons, en effet, par $F(t)$ et $\Phi(\theta)$ deux nouvelles fonctions arbitraires, par $F'(t)$ et $\Phi'(\theta)$ les dérivées de ces fonctions, et posons

$$f'(t) = \left[1-(m^2-1)\,t^2\right]^{\frac{1}{2}} F'(t),$$

$$\varphi'(\theta) = \frac{1}{m}\left[m^2+(m^2-1)\,\theta^2\right]^{\frac{1}{2}} \Phi'(\theta);$$

l'équation (4) devient

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\sqrt{m^2+(m^2-1)\theta^2}-\sqrt{1-(m^2-1)t^2}}{m^2-1}\,z+t\left[1-(m^2-1)t^2\right]F'(t)-F(t)\\ &+\frac{1}{m^2}\theta\left[m^2+(m^2-1)\theta^2\right]\Phi'(\theta)-\Phi(\theta)=0. \end{aligned}\right.$$

D'ailleurs la première équation (1) et la première équation (2) peuvent s'écrire ainsi :

$$(6)\qquad x=tz+\left[1-(m^2-1)t^2\right]^{\frac{1}{2}}F'(t),$$

$$(7)\qquad y=\theta z+\frac{1}{m^2}\left[m^2+(m^2-1)\theta^2\right]^{\frac{1}{2}}\Phi'(\theta).$$

Si l'on élimine F′ et Φ′ entre les équations (5), (6) et (7), il vient

$$\frac{1}{m^2-1}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(m^2-1)t^2}}-\frac{m^2}{\sqrt{m^2+(m^2-1)\theta^2}}\right]z$$
$$-\frac{tx}{\sqrt{1-(m^2-1)t^2}}-\frac{\theta y}{\sqrt{m^2+(m^2-1)\theta^2}}+\left[F(t)+\Phi(\theta)\right]=0.$$

Cette équation peut remplacer l'équation (5), et il est aisé de voir qu'en la différentiant par rapport à t et par rapport à θ, on reproduira les équations (6) et (7). Si donc on pose

$$V=\frac{1}{m^2-1}\left[\frac{1}{\sqrt{1-(m^2-1)t^2}}-\frac{m^2}{\sqrt{m^2+(m^2-1)\theta^2}}\right]z$$
$$-\frac{t}{\sqrt{1-(m^2-1)t^2}}x-\frac{\theta}{\sqrt{m^2+(m^2-1)\theta^2}}y+\left[F(t)+\Phi(\theta)\right].$$

l'équation de la surface cherchée sera le résultat de l'élimination de t et θ entre les trois équations

$$(8)\qquad V=0,\quad \frac{dV}{dt}=0,\quad \frac{dV}{d\theta}=0.$$

Les surfaces représentées par ces équations (8) constituent un second genre de surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes. Il faut cependant remarquer qu'on pourrait en déduire les surfaces qui composent le premier genre en supposant $m=0$ ou $m=\infty$, et en opérant préalablement quelques transformations indispensables.

§ V.

Il est bon de remarquer que :

Si dans une surface les lignes de courbure de l'un des systèmes sont planes, la même chose a lieu pour toutes les surfaces parallèles à la première, c'est-à-dire pour toutes les surfaces qui ont les mêmes normales.

Considérons, en effet, une surface qui ait une ligne de courbure plane, et soit

$$ax + by + cz = u$$

l'équation du plan de cette ligne. On aura, pour tous les points de la ligne de courbure dont il s'agit, les deux équations

$$(1)\quad \begin{cases} ax + by + cz = u, \\ -ap - bq + c = l\sqrt{1 + p^2 + q^2}, \end{cases}$$

où a, b, c, u et l sont des constantes.

Cela posé, si l'on prend une longueur constante k sur chacune des normales de la surface donnée et à partir de cette surface, l'extrémité de la longueur k sera sur une surface parallèle. Les valeurs de p et q sont les mêmes pour un point de la surface donnée et pour le point correspondant de la surface parallèle; en outre, on passe du premier point au second en remplaçant x, y, z par

$$x - \frac{kp}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad y - \frac{kq}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad z + \frac{k}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

en faisant cette substitution dans les équations (1), il vient

$$(2)\quad \begin{cases} ax + by + cz = u - kl, \\ -ap - bq + c = l\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \end{cases}$$

Ces équations (2) appartiennent à une ligne tracée sur la surface parallèle à la surface donnée. Il est évident que cette ligne est plane et qu'elle est une ligne de courbure.

La série des normales à une surface, menées par les différents points d'une ligne de courbure plane, détermine donc des lignes de cour-

bure planes sur toutes les surfaces parallèles. Donc, en particulier, si dans une surface les lignes de courbure de l'un des systèmes sont planes, la même chose a lieu pour toutes les surfaces parallèles.

DEUXIÈME PARTIE.

DES SURFACES DONT LES LIGNES DE COURBURE SONT PLANES DANS UN SYSTÈME ET SPHÉRIQUES DANS L'AUTRE.

§ Ier.

Il est nécessaire de rappeler ici, avant d'entrer en matière, en quoi consiste la transformation dite *par rayons vecteurs réciproques*.

Étant donné un système de points M, M′, M″,..., si l'on joint ces points à un point quelconque O, et que sur les directions des rayons vecteurs OM, OM′, OM″,... on prenne des longueurs OM_1, OM'_1, OM''_1,... telles que l'on ait

$$OM_1 = \frac{k}{OM}, \quad OM'_1 = \frac{k}{OM'}, \quad OM''_1 = \frac{k}{OM''}, \ldots,$$

k désignant une constante, les points M_1, M'_1, M''_1,... formeront une figure déduite de celle qui est formée par les points M, M′, M″,... au moyen d'une *transformation par rayons vecteurs réciproques*. Le point O est dit le centre de la transformation.

En appliquant cette transformation par rayons vecteurs réciproques à un plan ou à une sphère, on obtient une sphère, à moins que le centre de la transformation ne soit sur le plan donné ou sur la sphère donnée, auquel cas la figure transformée est un plan. Il s'ensuit que la même transformation change une ligne droite ou une circonférence en une circonférence, à moins que la droite donnée ou la circonférence donnée ne passe par le centre de transformation, auquel cas la ligne transformée est droite.

La propriété la plus remarquable de la transformation par rayons vecteurs réciproques consiste dans la conservation des angles; en d'autres termes, si deux lignes se coupent, dans une figure, sous un certain

angle, les lignes correspondantes d'une autre figure, déduite de la première au moyen de notre transformation, se couperont sous le même angle. Et il résulte de là que :

Si deux surfaces sont déduites l'une de l'autre, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, les lignes de courbure de l'une des surfaces sont les transformées des lignes de courbure de l'autre [*].

De ce qui précède, on déduit immédiatement que :

Si une surface a une ligne de courbure sphérique, la sphère sur laquelle se trouve cette ligne de courbure coupe la surface partout sous le même angle ; réciproquement, si une sphère coupe une surface partout sous le même angle, l'intersection est une ligne de courbure de la surface.

En effet, si l'on effectue une transformation par rayons vecteurs réciproques, en plaçant le centre de transformation en un point de la ligne qu'il faut considérer sur la surface, cette ligne devient plane, les angles sont conservés et l'on rentre dans les conditions du théorème de M. Joachimsthal, théorème qui reçoit ainsi, comme on voit, une extension remarquable.

Il résulte de ce dernier théorème que :

Si dans une surface les lignes de courbure de l'un des systèmes sont sphériques, la même chose a lieu pour toutes les surfaces parallèles à la première.

§ II.

Ces préliminaires posés, nous allons procéder à la recherche des surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans un système et sphériques dans l'autre.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires de la surface cherchée ;

[*] *Voir* un Mémoire de M. Liouville, inséré au tome XII de ce Journal, page 265.

p et q les dérivées partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, on aura les quatre équations

$$(1) \qquad ax + by + cz = u,$$

$$(2) \qquad -ap - bq + c = l\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

$$(3) \qquad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\upsilon.$$

$$(4) \qquad -(x - \alpha)p - (y - \beta)q + (z - \gamma) = \lambda\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Dans les équations (1) et (2), qui appartiennent aux lignes de courbure planes, a, b, c, u et l sont des fonctions d'un paramètre t dont l'une peut être prise égale à 1 et une autre à t. Dans les équations (3) et (4), qui appartiennent aux lignes de courbure sphériques, α, β, γ, υ et λ sont des fonctions d'un second paramètre θ dont l'une peut être prise égale à θ.

Pour avoir l'équation qui exprime que les équations (1) et (3) appartiennent à des lignes de courbure de systèmes différents, soient dx, dy, dz les variations de x, y, z sur la première ligne de courbure, δx, δy, δz les variations sur la seconde; on aura

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z = 0.$$

On peut chasser les six variations que renferme cette équation au moyen des suivantes :

$$a\,dx + b\,dy + c\,dz = 0, \quad dz = p\,dx + q\,dy;$$
$$(x - \alpha)\,\delta x + (y - \beta)\,\delta y + (z - \gamma)\,\delta z = 0, \quad \delta z = p\,\delta x + q\,\delta y;$$

il vient ainsi

$$(bp - aq)[(y - \beta)p - (x - \alpha)q] + (a + cp)[(x - \alpha) + (z - \gamma)p]$$
$$+ (b + cq)[(y - \beta) + (z - \gamma)q] = 0;$$

en ajoutant à cette équation celle que l'on obtient en multipliant, membre à membre, les équations (2) et (4), il vient

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) + c(z - \gamma) = l\lambda;$$

enfin, à cause de l'équation (1), celle-ci se réduit à

$$(5) \qquad u = a\alpha + b\beta + c\gamma + l\lambda.$$

Pour mettre plus de clarté dans la discussion de l'équation (5) et pour n'omettre aucune de ses solutions, nous distinguerons quatre hypothèses qui sont les seules possibles et que nous allons examiner successivement.

1°. *Les quantités* α, ξ, γ *sont liées par trois équations linéaires.* Dans cette hypothèse, α, ξ, γ sont déterminées; les sphères qui contiennent les lignes de la seconde courbure sont concentriques, et en prenant leur centre commun pour origine des coordonnées, on aura

$$\alpha = 0, \quad \xi = 0, \quad \gamma = 0;$$

l'équation (5) se réduit alors à

$$u = l\lambda,$$

et elle exige que l'on ait

$$u = 0, \quad l = 0,$$

ou bien

$$\lambda = \text{une constante } m, \quad u = ml.$$

On a donc ces deux solutions de l'équation (5),

$$\alpha = 0, \quad \xi = 0, \quad \gamma = 0, \quad u = 0, \quad l = 0,$$

et

$$\alpha = 0, \quad \xi = 0, \quad \gamma = 0, \quad \lambda = m, \quad u = ml.$$

2°. *Les quantités* α, ξ, γ *sont liées par deux équations linéaires.* Dans cette deuxième hypothèse, les centres des sphères qui contiennent les lignes de la seconde courbure sont sur une droite fixe; en prenant cette droite pour axe des z, on aura

$$\alpha = 0, \quad \xi = 0;$$

l'équation (5) se réduit alors à

$$u = c\gamma + l\lambda;$$

différentiant par rapport au paramètre θ dont γ et λ dépendent seules, il vient

$$0 = c\gamma' + l\lambda'.$$

γ' ne peut être nul, car autrement γ serait constant et l'on rentrerait dans la première hypothèse; on tire alors, des équations précédentes,

ces valeurs de c et u,

$$c = -\frac{\lambda'}{\gamma'}l, \quad u = \left(\lambda - \frac{\gamma\lambda'}{\gamma'}\right)l.$$

D'où il suit qu'on doit avoir

$$c = -\frac{1}{m}l, \quad u = nl, \quad \frac{\lambda'}{\gamma'} = \frac{1}{m}, \quad \lambda - \frac{\gamma\lambda'}{\gamma'} = n,$$

c'est-à-dire

$$c = -\frac{1}{m}l, \quad u = nl, \quad \lambda = \frac{1}{m}\gamma + n,$$

$\frac{1}{m}$ et n étant des constantes; à moins que l'on n'ait

$$c = 0, \quad u = 0, \quad l = 0.$$

Si c'est le premier cas qui a lieu, le résultat est susceptible de simplification. On peut effectivement supposer que l'une des constantes $\frac{1}{m}$ et n est nulle. En effet, si $\frac{1}{m}$ n'est pas nul, à cause de

$$c = -\frac{1}{m}l, \quad u = nl,$$

les plans des lignes de la première courbure passent par un point fixe de l'axe des z, axe qui contient les centres des sphères des lignes de l'autre courbure; on peut prendre ce point fixe pour origine des coordonnées, et alors on aura

$$u = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad n = 0.$$

La deuxième hypothèse que nous examinons fournit donc ces trois solutions de l'équation (5):

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = m\lambda, \quad c = -\frac{1}{m}l, \quad u = 0;$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \lambda = m, \quad c = 0, \quad u = ml;$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad c = 0, \quad u = 0, \quad l = 0;$$

m désignant une constante dans les deux premières solutions.

3°. *Les quantités α, β, γ sont liées par une seule équation linéaire.* Dans cette troisième hypothèse, les centres des sphères qui contiennent

les lignes de la deuxième courbure sont dans un plan fixe. Si l'on prend ce plan fixe pour celui des xz, on aura

$$\varepsilon = 0,$$

et l'équation (5) se réduit à

$$u = a\alpha + c\gamma + l\lambda;$$

en la différentiant deux fois par rapport à θ, on trouve

$$0 = a\alpha' + c\gamma' + l\lambda',$$
$$0 = a\alpha'' + c\gamma'' + l\lambda'';$$

on ne peut avoir

$$\alpha'\gamma'' - \gamma'\alpha'' = 0,$$

car il en résulterait une relation linéaire entre α et γ, et l'on rentrerait dans l'une des deux premières hypothèses; il s'ensuit que les trois équations précédentes donneront pour a, c et u des valeurs de la forme

$$a = \mathrm{A}l, \quad c = \mathrm{C}l, \quad u = \mathrm{U}l,$$

A, C et U étant indépendants du paramètre t. Si l est nul, a, c et u le sont aussi; on obtient ainsi une solution de l'équation (5), savoir,

$$\varepsilon = 0, \quad a = 0, \quad c = 0, \quad u = 0, \quad l = 0;$$

cette solution est insignifiante et nous n'en tiendrons pas compte, car elle ne donne évidemment d'autre surface que le plan $y = 0$. Ce cas mis de côté, on voit que A, C et U sont des constantes; l'équation des plans des lignes de la première courbure devient

$$l(\mathrm{A}x + \mathrm{C}z - \mathrm{U}) + by = 0;$$

elle ne renferme qu'un seul paramètre variable, savoir le rapport des quantités b et l; il s'ensuit que les plans des lignes de la première courbure sont parallèles au plan des xz si A et C sont nuls tous deux; et que, dans le cas contraire, ces plans passent par une droite fixe située dans le plan xz.

Si les plans des lignes de la première courbure sont parallèles au

plan xz, on a

$$a = 0, \quad c = 0;$$

l'équation (5) se réduit à

$$u = l\lambda,$$

ce qui exige que l'on ait

$$\lambda = \text{une constante } m, \quad u = ml.$$

Si, au contraire, les plans des lignes de la première courbure passent par une droite fixe située dans le plan xz, on peut prendre cette droite pour axe des z, et l'on a

$$c = 0, \quad u = 0;$$

l'équation (5) se réduit à

$$a\alpha + l\lambda = 0.$$

On ne peut supposer ni $a = 0$ ni $\alpha = 0$; on a donc

$$l = m\alpha, \quad \lambda = -\frac{1}{m}\alpha,$$

m désignant une constante. On obtient ainsi ces deux solutions de l'équation (5), savoir,

$$\xi = 0, \quad \lambda = m, \qquad a = 0, \quad c = 0, \quad u = ml;$$

$$\xi = 0, \quad \lambda = -\frac{1}{m}\alpha, \quad c = 0, \quad u = 0, \quad l = m\alpha.$$

4°. *Les quantités α, ξ, γ ne sont liées entre elles par aucune équation linéaire.* En différentiant trois fois, par rapport au paramètre ξ, l'équation de condition

$$u = a\alpha + b\beta + c\gamma + l\lambda,$$

il vient

$$0 = a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + l\lambda',$$
$$0 = a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' + l\lambda''$$
$$0 = a\alpha''' + b\beta''' + c\gamma''' + l\lambda'''.$$

Le déterminant

$$\begin{cases} \alpha', & \beta', & \gamma', \\ \alpha'', & \beta'', & \gamma'', \\ \alpha''', & \beta''', & \gamma''', \end{cases}$$

ne peut être nul, car autrement il y aurait une relation linéaire entre α, β, γ. On pourra donc tirer, des quatre équations précédentes, les valeurs de a, b, c et u, qui auront la forme

$$a = \mathrm{A}l, \quad b = \mathrm{B}l, \quad c = \mathrm{C}l, \quad u = \mathrm{U}l,$$

A, B, C et U étant indépendants de t. L'hypothèse $l = 0$ donnerait $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $u = 0$, solution insignifiante. En la rejetant, on voit que A, B, C et U sont constantes; l'équation des plans qui contiennent les lignes de première courbure devient

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = \mathrm{U};$$

elle ne renferme plus de traces du paramètre t; par suite, notre quatrième hypothèse ne peut donner aucune surface autre que le plan.

Il résulte de cette discussion que l'équation (5) n'offre que sept solutions distinctes et utiles pour notre objet; savoir :

1°.	$\alpha = 0$,	$\beta = 0$,	$\gamma = 0$,	$u = 0$,	$l = 0$;
2°.	$\alpha = 0$,	$\beta = 0$,	$\gamma = 0$,	$\lambda = m$,	$u = ml$;
3°.	$\alpha = 0$,	$\beta = 0$,	$\gamma = m\lambda$,	$c = -\frac{1}{m}l$,	$u = 0$;
4°.	$\alpha = 0$,	$\beta = 0$,	$\lambda = m$,	$c = 0$,	$u = ml$;
5°.	$\alpha = 0$,	$\beta = 0$,	$c = 0$,	$u = 0$,	$l = 0$;
6°.	$\beta = 0$,	$\lambda = m$,	$a = 0$,	$c = 0$,	$u = ml$;
7°.	$\beta = 0$,	$\lambda = -\frac{1}{m}\alpha$,	$c = 0$,	$u = 0$,	$l = ma$.

Nous allons étudier les surfaces qui correspondent à ces divers cas.

§ III.

Premier cas.

On a

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad u = 0, \quad l = 0;$$

si l'on fait, en outre,

$$a = t, \quad b = f(t), \quad c = -1, \quad 2v = \theta, \quad \lambda = \varphi(\theta),$$

f et φ désignant deux fonctions arbitraires, les équations (1), (2),

(3), (4) du § II deviennent :

$$(1)\qquad \begin{cases} z = tx + yf(t), \\ pt + qf(t) + 1 = 0; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \theta, \\ z - px - qy = \varphi(\theta)\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \end{cases}$$

Si l'on résout les équations (1) par rapport à t et $f(t)$, on trouve

$$\frac{y + qz}{qx - py} = t, \quad \frac{x + pz}{qx - py} = -f(t);$$

éliminant t, il vient

$$(3)\qquad \frac{x + pz}{qx - py} + f\left(\frac{y + qz}{qx - py}\right) = 0.$$

Cette équation est l'une des deux équations aux différentielles premières de la surface. On aura l'autre équation aux différentielles premières en éliminant θ entre les équations (2); il vient ainsi

$$(4)\qquad z - px - qy = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\varphi(x^2 + y^2 + z^2).$$

On obtiendrait l'équation de la surface sous forme finie en intégrant l'une ou l'autre des équations (3) et (4); mais il vaut mieux faire usage des quatre équations (1) et (2). Nous mettrons a et b au lieu de t et $f(t)$ dans les équations (1), et nous considérerons a et b comme des fonctions quelconques du paramètre t. Nous déterminerons ultérieurement ces deux quantités qui ne doivent contenir qu'une fonction arbitraire, de manière à présenter le résultat sous la forme la plus simple possible. Les équations dont nous ferons usage sont donc

$$(5)\qquad \begin{cases} z = ax + by, \\ ap + bq + 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \theta, \\ z - px - qy = \varphi(\theta)\sqrt{1 + p^2 + q^2}. \end{cases}$$

La deuxième équation (5) et l'équation

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

donnent les valeurs suivantes de p et q,

$$p = -\frac{dy + b\,dz}{a\,dy - b\,dx}, \quad q = \frac{dx + a\,dz}{a\,dy - b\,dx};$$

en portant ces valeurs dans la quatrième équation (5), il vient

$$a(z\,dy - y\,dz) + b(x\,dz - z\,dx) - (y\,dx - x\,dy)$$
$$= \varrho\,\delta\sqrt{a^2 + b^2 + 1}\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (dz - a\,dx - b\,dy)^2}$$

Cette équation est l'équation différentielle ordinaire de la surface cherchée; dx, dy, dz y désignent les variations infiniment petites des coordonnées x, y, z d'un point qui se déplace sur la surface en suivant une direction arbitraire. Si le déplacement dont il s'agit se fait sur la ligne de première courbure, on a

$$dz - a\,dx - b\,dy = 0,$$

et l'équation précédente devient

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{a}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}(z\,dy - y\,dz) + \frac{b}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}(x\,dz - z\,dx) \\ &+ \frac{-1}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}(y\,dx - x\,dy) = \varrho\,\delta\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \end{aligned}\right.$$

$z\,dy - y\,dz$, $x\,dz - z\,dx$ et $y\,dx - x\,dy$ sont les projections, sur les trois plans coordonnés, du double de l'aire infiniment petite décrite par le rayon vecteur de la ligne de première courbure; le premier membre de l'équation précédente représente donc le double de cette aire elle-même, et il aura pour valeur $y'\,dx' - x'\,dy'$, si l'on désigne par x', y' des coordonnées rectangulaires situées dans le plan de la ligne de courbure et ayant même origine que les coordonnées x, y, z. Alors on a évidemment

$$\delta = x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2, \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx'^2 + dy'^2,$$

par conséquent, l'équation (6) se réduit à

$$(7)\qquad y'\,dx' - x'\,dy' = \varrho\,\delta\sqrt{dx'^2 + dy'^2},$$

et on a, nous le répétons,

$$\delta = x'^2 + y'^2$$

Nous prendrons pour fonction arbitraire, au lieu de $\varphi(\theta)$, une fonction $\Phi(\theta)$, telle que

$$(8) \qquad \varphi = \frac{\Phi - 2\theta\Phi'}{\sqrt{1 - 4\Phi\Phi' + 4\theta\Phi'^2}},$$

Φ' étant la dérivée de Φ; on trouve alors aisément que l'intégrale de l'équation (7) est

$$(9) \qquad x' \cos g - y' \sin g = \Phi(\theta).$$

g désigne la constante arbitraire introduite par l'intégration; mais il faut remarquer que cette constante peut varier avec le paramètre t. Quoi qu'il en soit, l'équation (9) exprime que les lignes de courbure planes sont égales entre elles; effectivement, chacune de ces lignes est définie par cette propriété, que *la projection du rayon vecteur sur une droite fixe est égale à une même fonction* Φ *du carré de ce rayon vecteur*. Nous supposerons que la droite fixe dont il s'agit fasse avec les axes des x, des y et des z des angles dont les cosinus soient proportionnels à t, $f(t)$ et 1; la fonction arbitraire du paramètre t, qui doit entrer dans l'équation finale, est ainsi fixée. Revenant aux coordonnées x, y, z, l'équation (9) devient

$$z + tx + fy = \sqrt{1 + t^2 + f^2}\,\Phi(\theta).$$

Nous la représenterons simplement par

$$(10) \qquad V = 0,$$

en posant

$$(11) \qquad V = z + tx + fy - \sqrt{1 + t^2 + f^2}\,\Phi(x^2 + y^2 + z^2).$$

Il s'agit maintenant de déterminer a et b en fonction de t et f; cela fait, l'équation (10) et la première équation (5) feront connaître la surface cherchée.

Remarquons d'abord que la droite qui fait avec les axes des angles dont les cosinus sont proportionnels à t, $f(t)$ et 1, est située dans le plan représenté par la première équation (5); on a donc

$$(12) \qquad at + bf = 1.$$

En second lieu, différentions l'équation (10) et la première équation (5); il vient

$$dz + t\,dx - f\,dy - 2(x\,dx + y\,dy + z\,dz)\sqrt{1+t^2+f^2}\,\Phi' + \frac{dV}{dt}\,dt = 0,$$

$$dz - a\,dx - b\,dy = (a'x + b'y)\,dt;$$

d'où, en éliminant dt,

$$(13)\quad \left\{\begin{array}{l} dz + t\,dx + f\,dy - 2(x\,dx + y\,dy + z\,dz)\sqrt{1+t^2+f^2}\,\Phi' \\ \qquad - \dfrac{dz - a\,dx - b\,dy}{a'x + b'y}\,\dfrac{dV}{dt} = 0. \end{array}\right.$$

Cette équation, qui ne renferme que les différentielles des coordonnées x, y, z, doit être identique avec

$$dz = p\,dx + q\,dy;$$

on doit donc trouver une équation identique en vertu de celles déja formées, en portant dans la deuxième équation (5) les valeurs de p et q tirées de l'équation (13) : or, il est aisé de voir qu'on obtiendra le même résultat en remplaçant, dans l'équation (13), dx, dy et dz par a, b et -1 respectivement. On trouve ainsi, en ayant égard à l'équation (12) et à la première équation (5),

$$(14)\qquad \frac{dV}{dt} = 0.$$

Ainsi les valeurs de a et b en fonction de t et f doivent être telles, que la première équation (5), l'équation (10) et l'équation (14) appartiennent toutes trois à la surface. Mais les deux dernières équations ne renferment ni a ni b; il est dès lors inutile de déterminer leurs valeurs, et l'équation de la surface cherchée s'obtiendra en éliminant t entre les équations

$$(15)\qquad V = 0, \quad \frac{dV}{dt} = 0.$$

La surface dont nous venons de former les équations est celle dont toutes les normales sont tangentes à la surface d'un cône à base arbitraire. Elle a été étudiée par Monge, qui en a fait connaître diverses

propriétés dans son *Application de l'Analyse à la Géométrie* (cinquième édition, page 286); elle constitue un premier genre parmi les surfaces que nous examinons dans cette deuxième partie de notre Mémoire.

§ IV.

Deuxième cas.

On a

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0, \quad \lambda = m, \quad u = ml;$$

les équations relatives aux lignes de première courbure sont

$$ax + by + cz = ml,$$
$$-ap - bq + c = l\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

On peut faire l'une des quantités a, b, c, l égale à 1, et l'une des trois autres égale à t; les deux autres demeurent des fonctions indéterminées du paramètre t. Au contraire, les équations qui se rapportent aux lignes de courbure sphériques ne renferment que la seule arbitraire $2v$, qui peut être prise pour le paramètre des lignes de seconde courbure. Ces équations sont, en effet,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2v,$$
$$z - px - qy = m\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

La dernière de ces équations ne renferme pas le paramètre θ; la surface dont il s'agit a donc l'équation

$$(1) \qquad z - px - qy = m\sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

cette surface est développable, les lignes de la première courbure sont les génératrices droites, et, par suite, les plans de ces lignes sont essentiellement indéterminés.

Si l'on désigne par t un paramètre, par $f(t)$ une fonction arbitraire, et qu'on fasse

$$V = z + tx + fy - m\sqrt{1 + t^2 + f^2},$$

l'équation de la surface cherchée sera le résultat de l'élimination de t

entre les deux équations

$$V = 0, \quad \frac{dV}{dt} = 0.$$

Il est ainsi aisé de voir que l'arête de rebroussement de cette surface développable est située sur la sphère de rayon m. Dans le cas particulier de $m = 0$, on obtient les surfaces coniques à base arbitraire.

La surface dont nous nous occupons est comprise dans celles qui forment le premier genre et que nous avons étudiées au paragraphe précédent. On l'obtient en supposant $\Phi = m$ dans les équations (15) de ce paragraphe.

Il faut remarquer que l'analyse ne peut ici déterminer les plans des lignes de la première courbure, mais on est le maître d'assujettir ces plans à passer par un point fixe. Tout devient alors déterminé et l'on rentre dans l'analyse du § III.

§ V.

Troisième cas.

$$\alpha = 0, \quad \xi = 0, \quad \gamma = m\lambda, \quad c = -\frac{1}{m}l, \quad u = 0;$$

si l'on fait, en outre,

$$a = t, \quad b = f(t), \quad c = -1, \quad 2v = \theta, \quad \lambda = \varphi(\theta).$$

f et φ désignant deux fonctions arbitraires, les équations (1), (2), (3), (4) du § II deviennent :

$$(1) \quad \begin{cases} z = tx + yf(t), \\ pt + qf(t) + 1 = -m\sqrt{1 + p^2 + q^2}; \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2mz\varphi(\theta) = \theta, \\ z - px - qy = (m + \sqrt{1 + p^2 + q^2})\varphi(\theta). \end{cases}$$

Si l'on élimine t entre les équations (1), θ entre les équations (2), on aura les deux équations aux différentielles premières de la surface

dont nous nous occupons; savoir,

$$(3)\quad pz + x\frac{(1 + m\sqrt{1+p^2+q^2})}{qx - py} + f\left[qz + y\frac{1 + m\sqrt{1+p^2+q^2}}{qx - py}\right] = 0,$$

$$(4)\quad \frac{z - px - qy}{m + \sqrt{1+p^2+q^2}} = \varphi\left(x^2 + y^2 + z^2 - 2mz\frac{z - px - qy}{m + \sqrt{1+p^2+q^2}}\right).$$

Ces équations sont trop compliquées pour servir utilement à la recherche de l'équation sous forme finie. Il vaut mieux conserver les équations (1) et (2); mais ici, comme au § III, nous remettrons a et b au lieu de t et $f(t)$, nous réservant de déterminer ultérieurement la fonction arbitraire du paramètre t qui doit entrer dans le résultat final. Les équations que nous emploierons sont donc

$$(5)\quad \begin{cases} z = ax + by, \\ ap + bq + 1 = -m\sqrt{1+p^2+q^2}, \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2mz\varphi = \theta, \\ z - px - qy = (m + \sqrt{1+p^2+q^2})\varphi. \end{cases}$$

Différentiant la dernière équation (5), il vient

$$-x\,dp - y\,dq = (m + \sqrt{1+p^2+q^2})\varphi'\,d\theta + \frac{p\,dp + q\,dq}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\varphi;$$

si donc on prend p et q pour variables indépendantes, on aura

$$(6)\quad x = -(m + \sqrt{1+p^2+q^2})\varphi'\frac{d\theta}{dp} - \varphi\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$(7)\quad y = -(m + \sqrt{1+p^2+q^2})\varphi'\frac{d\theta}{dq} - \varphi\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

portant ces valeurs de x et y dans la dernière équation (5), il vient

$$(8)\quad z = -(m + \sqrt{1+p^2+q^2})\varphi'\left(p\frac{d\theta}{dp} + q\frac{d\theta}{dq}\right) + \varphi\frac{1 + m\sqrt{1+p^2+q^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Substituons à x, y et z les valeurs précédentes dans la premiere équation (5) et dans la troisième, il viendra, en ayant égard à la deuxieme

équation (5),

$$(9)\qquad (a-p)\frac{d\zeta}{dp}+(b-q)\frac{d\zeta}{dq}=0,$$

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}&(m^2-1)\varphi^2+\zeta\\ &=(m+\sqrt{1+p^2+q^2})^2\varphi'^2\left[\left(\frac{d\zeta}{dp}\right)^2+\left(\frac{d\zeta}{dq}\right)^2+\left(p\frac{d\zeta}{dp}+q\frac{d\zeta}{dq}\right)^2\right].\end{aligned}\right.$$

Des équations (9) et (10) on tire, en ayant égard à la deuxième équation (5),

$$\frac{d\zeta}{dp}=(b-q)\frac{\sqrt{(m^2-1)\varphi^2+\zeta}}{\varphi'(m+\sqrt{1+p^2+q^2})\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{a^2+b^2+1-m}},$$

$$\frac{d\zeta}{dq}=-(a-p)\frac{\sqrt{(m^2-1)\varphi^2+\zeta}}{\varphi'(m+\sqrt{1+p^2+q^2})\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{a^2+b^2+1-m}}.$$

Si l'on porte ces valeurs de $\frac{d\zeta}{dp}$ et $\frac{d\zeta}{dq}$ dans l'équation

$$d\zeta=\frac{d\zeta}{dp}dp+\frac{d\zeta}{dq}dq,$$

il vient

$$(11)\qquad \frac{\varphi' d\zeta}{\sqrt{(m^2-1)\varphi^2+\zeta}}=\frac{(b-q)dp-(a-p)dq}{(m+\sqrt{1+p^2+q^2})\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{a^2+b^2+1-m}}.$$

Au moyen de la deuxième équation (5), on peut ramener le second membre de l'équation (11) à ne plus contenir que deux variables, et, par suite, à être une différentielle exacte, puisque le premier membre en est une. Voici, je crois, le moyen le plus simple de faire le calcul. Soit ζ une nouvelle variable, telle que

$$(12)\qquad \sin\zeta=\frac{\sqrt{a^2+b^2+1-m}}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{1+m\sqrt{1+p^2+q^2}}{m+\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

De l'équation (12) jointe à la deuxième équation (5), on peut tirer les valeurs de p et q en fonction des deux variables ζ et t; on aura ensuite aisément leurs différentielles, et en substituant dans l'équation (11), il viendra

$$(13)\qquad \frac{\sqrt{1-m^2}\,\varphi' d\zeta}{\sqrt{(m^2-1)\varphi^2+\zeta}}+\frac{\sqrt{1-m^2}\,(ba-ab')\,dt}{(a^2+b^2+1-m)}+d\zeta=0.$$

équation où les variables sont séparées, et qui est, par conséquent, immédiatement intégrable.

Pour avoir un résultat débarrassé de signes d'intégration, nous prendrons, au lieu de $\varphi(\theta)$, une autre fonction arbitraire $\Phi(\theta)$, telle que l'on ait

$$(14)\qquad \varphi = \frac{\Phi - 2\theta\Phi'}{\sqrt{1-4(1-m^2)\Phi\Phi' + 4(1-m^2)\theta\Phi'^2}}.$$

et, par suite,

$$\sqrt{(m^2-1)\varphi^2+\theta} = \frac{\sqrt{(m^2-1)\Phi^2+\theta}}{\sqrt{1-4(1-m^2)\Phi\Phi' + 4(1-m^2)\theta\Phi'^2}}.$$

$$\frac{\varphi}{\sqrt{(m^2-1)\varphi^2+\theta}} = \frac{\Phi - 2\theta\Phi'}{\sqrt{(m^2-1)\Phi^2+\theta}}.$$

Nous ferons aussi, pour abréger,

$$(15)\qquad \begin{cases} \dfrac{\varphi\sqrt{1-m^2}}{\sqrt{\theta}} = \sin\Theta_0, & \dfrac{\sqrt{(m^2-1)\varphi^2+\theta}}{\sqrt{\theta}} = \cos\Theta_0, \\[2ex] \dfrac{\Phi\sqrt{1-m^2}}{\sqrt{\theta}} = \sin\Theta, & \dfrac{\sqrt{(m^2-1)\Phi^2+\theta}}{\sqrt{\theta}} = \cos\Theta, \end{cases}$$

équations d'où l'on déduit immédiatement, par la différentiation,

$$(16)\qquad d\Theta_0 - d\Theta = \frac{\sqrt{1-m^2}\,\varphi'\,d\theta}{\sqrt{(m^2-1)\varphi^2+\theta}}.$$

Il reste encore à indiquer quelle sera la fonction arbitraire f du paramètre t qui doit entrer dans le résultat; nous la définirons en posant

$$(17)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{1+t^2+f^2+m\sqrt{1+t^2+f^2}}{t+ff'} - t, \\[2ex] b = \dfrac{1+t^2+f^2+m\sqrt{1+t^2+f^2}}{t+ff'} f' - f; \end{cases}$$

équations d'où l'on tire aisément

$$(18)\qquad a^2+b^2+1-m^2 = \frac{(m+\sqrt{1+t^2+f^2})^2[1+f'^2+(tf'-f)^2]}{(t+ff')^2}.$$

plus

$$(19)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{ba - ab'}{\sqrt{a^2+b^2+1-m^2}} &= -\frac{(tf'-f)\sqrt{1+f'^2+(tf'-f)^2}}{(t+ff')\sqrt{1+t^2+f^2}} \\ &\quad - \frac{f''\left(1+m\sqrt{1+t^2+f^2}\right)\sqrt{1+t^2+f^2}}{(t+ff')\sqrt{1+f'^2+(tf'-f)^2}}. \end{aligned} \right.$$

Or si l'on fait, pour abréger,

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\left(1+m\sqrt{1+t^2+f^2}\right)\sqrt{1+f'^2+(tf'-f)^2}}{(t+ff')\sqrt{a^2+b^2}} &= \sin T, \\ \frac{\sqrt{1-m^2}\sqrt{1+t^2+f^2}\,(tf'-f)}{(t+ff')\sqrt{a^2+b^2}} &= \cos T. \end{aligned} \right.$$

l'équation (19) se réduit à

$$(21)\quad \frac{\sqrt{1-m^2}\,(ba'-ab')}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2+1-m^2}} = \frac{dT}{dt}.$$

En vertu des équations (16) et (21), l'équation (13), qu'il s'agit d'intégrer, devient

$$(22)\quad d\Theta_0 - d\Theta + dT + d\zeta = 0,$$

et l'on en tire

$$\Theta_0 - \Theta + T + \zeta = \text{constante}.$$

On peut supposer la constante nulle, car elle se fond dans Θ. Effectivement, l'équation (14) peut s'écrire

$$d\Theta = -\sqrt{1-m^2}\,\frac{\varphi\,d\varphi}{2\varphi\sqrt{(m^2-1)\varphi^2+\varphi}};$$

la fonction Φ est donc telle, que la fonction Θ qui en dépend se trouve naturellement munie d'une constante arbitraire qui y entre par addition. Ainsi, on peut écrire

$$\zeta = \Theta - \Theta_0 - T;$$

d'où

$$\begin{aligned} \sin\zeta = {} & (\sin\Theta\cos\Theta_0 - \cos\Theta\sin\Theta_0)\cos T \\ & - (\cos\Theta\cos\Theta_0 + \sin\Theta\sin\Theta_0)\sin T. \end{aligned}$$

En vertu des équations (12), (15), (18) et (20), cette équation devient

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} &(m+\sqrt{1+t^2+f^2})\sqrt{1+f'^2-(tf'-f)^2}\,\frac{1+m\sqrt{1+p^2+q^2}}{m+\sqrt{1+p^2+q^2}} \\ &= (1-m^2)\sqrt{1+t^2+f^2}\,(tf'-f)\left[\frac{\Phi\sqrt{(m^2-1)\varphi^2+\theta}-\varphi\sqrt{m^2-1}\,\Phi^2+\theta}{\theta}\right] \\ &-(1+m\sqrt{1+t^2+f^2})\sqrt{1+f'^2+(tf'-f)^2}\left[\frac{\sqrt{(m^2-1)\Phi^2+\theta}\sqrt{m^2-1}\,\varphi^2+\theta-m\sqrt{1+\Phi^2}}{\theta}\right]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on suppose que a, b et φ soient partout remplacées par leurs valeurs tirées des équations (14) et (17), l'équation de la surface cherchée sera le résultat de l'élimination de p, q, t et θ entre les quatre équations (5) et l'équation (23). On peut donner au résultat une forme un peu plus simple, mais les calculs sont compliqués, et nous nous bornerons à ce qui précède.

Les surfaces dont nous venons de former les équations constituent un second genre parmi celles dont les lignes de courbure sont planes dans un système et sphériques dans l'autre. Les plans des lignes de l'une des courbures sont tangents à une surface conique à base arbitraire, et coupent la surface sous un angle dont le cosinus est proportionnel au cosinus de l'angle que ces mêmes plans font avec un plan fixe. Ces surfaces comprennent, comme cas particulier correspondant à $m=0$, les surfaces dont nous avons formé le premier genre; mais celles-ci ont une propriété qui leur appartient exclusivement, propriété qui consiste en ce que les lignes de l'une des courbures sont sur des sphères *concentriques;* c'est pour cette raison que nous avons cru devoir les considérer à part.

§ VI.

Quatrième cas.

On a

$$\alpha=0,\quad \beta=0,\quad \lambda=m,\quad c=0,\quad u=ml;$$

si l'on fait, en outre,

$$a=t,\quad b=-1,\quad l=f(t),\quad \gamma=\theta,\quad \varphi=\varphi(\theta).$$

f et φ désignant deux fonctions arbitraires, les équations (1), (2), (3), (4) du § II deviennent :

$$(1)\qquad \begin{cases} y = tx - mf(t), \\ q - pt = f(t)\sqrt{1+p^2+q^2}; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2\theta z = \varphi(\theta), \\ z - px - qy = \theta + m\sqrt{1+p^2+q^2}. \end{cases}$$

Si l'on élimine t entre les équations (1), θ entre les équations (2), on obtient les suivantes :

$$(3)\qquad \frac{qx - py}{x\sqrt{1+p^2+q^2} + mp} = f\left(\frac{y\sqrt{1+p^2+q^2} + mq}{x\sqrt{1+p^2+q^2} + mp}\right),$$

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 - 2z(z - px - qy - m\sqrt{1+p^2+q^2}) \\ = \varphi(z - px - qy - m\sqrt{1+p^2+q^2}) \end{array}\right\},$$

qui sont les deux équations aux différentielles premières de la surface dont nous nous occupons. Pour avoir l'équation sous forme finie, nous nous servirons des équations (1) et (2). Si l'on différentie la deuxième équation (2), il vient

$$-xdp - ydq = d\theta + m\frac{pdp + qdq}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

en prenant donc p et q pour les variables indépendantes, on a

$$(5)\qquad x = -\frac{d\theta}{dp} - m\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$(6)\qquad y = -\frac{d\theta}{dq} - m\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}};$$

la deuxième équation (2) donne ensuite

$$(7)\qquad z - \theta = -\left(p\frac{d\theta}{dp} + q\frac{d\theta}{dq}\right) + m\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Portant les valeurs de x, y, z, tirées des équations (5), (6) et (7), dans la première équation (1) et dans la première équation (2), il vient,

en ayant égard à la deuxième équation (1),

$$(8)\qquad \frac{d\theta}{dq} = t\frac{d\theta}{dp},$$

$$(9)\qquad \left(\frac{d\theta}{dp}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dq}\right)^2 + \left(p\frac{d\theta}{dp} + q\frac{d\theta}{dq}\right)^2 = \varphi(\theta) + \theta^2 - m^2.$$

Des équations (8) et (9) on tire

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{\sqrt{\varphi(\theta) + \theta^2 - m^2}}{\sqrt{1 + t^2 + (p + qt)^2}},$$

$$\frac{d\theta}{dq} = t\frac{\sqrt{\varphi(\theta) + \theta^2 - m^2}}{\sqrt{1 + t^2 + (p + qt)^2}};$$

l'équation

$$d\theta = \frac{d\theta}{dp}dp + \frac{d\theta}{dq}dq$$

devient alors

$$(10)\qquad \frac{d\theta}{\sqrt{\varphi(\theta) + \theta^2 - m^2}} = \frac{dp + tdq}{\sqrt{1 + t^2 + (p + qt)^2}}.$$

Au moyen de la deuxième équation (1), on peut ramener le second membre de l'équation (10) à ne plus contenir que deux variables ; dès lors ce deuxième membre deviendra une différentielle exacte, et l'équation (10) sera immédiatement intégrable. Soit ζ une nouvelle variable telle que l'on ait

$$(11)\qquad p + qt = \zeta\sqrt{1 + t^2}.$$

$$(12)\qquad dp + tdq = d\zeta\sqrt{1 + t^2} + \left(\frac{\zeta t}{\sqrt{1 + t^2}} - q\right)dt;$$

l'équation (10) devient

$$(13)\qquad \frac{d\theta}{\sqrt{\varphi(\theta) + \theta^2 - m^2}} = \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + 1}} + \frac{\zeta t - q\sqrt{1 + t^2}}{(1 + t^2)\sqrt{\zeta^2 + 1}}dt.$$

Or, si l'on élimine p entre l'équation (10) et la première équation (1), l'équation finale est

$$(1 + t^2 - f^2)(\zeta t - q\sqrt{1 + t^2})^2 = f^2(\zeta^2 + 1),$$

en vertu de laquelle l'équation (13) se réduit à

$$(14)\qquad \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2+1}} = \frac{d\theta}{\sqrt{\varphi(\theta)+\theta^2-m^2}} + \frac{f\,dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2-f^2}}.$$

Nous prendrons, au lieu de f et φ, deux autres fonctions arbitraires $F(t)$ et $\Phi(\theta)$, telles que l'on ait

$$\frac{f}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2-f^2}} = \frac{1}{2}\frac{F'(t)}{F(t)},\qquad \frac{1}{\sqrt{\varphi(\theta)+\theta^2-m^2}} = -\frac{1}{2}\frac{\Phi'(\theta)}{\Phi(\theta)};$$

d'où

$$(15)\qquad f(t) = \frac{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}F'(t)}{\sqrt{4F^2(t)+(1+t^2)^2F'^2(t)}},\qquad \varphi(\theta) = \frac{4\Phi^2(\theta)}{\Phi'^2(\theta)} - \theta^2 + m^2;$$

l'équation (14) devient alors

$$(16)\qquad 2\frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2+1}} + \frac{\Phi'(\theta)\,d\theta}{\Phi(\theta)} = \frac{F'(t)\,dt}{F(t)}.$$

Intégrant et observant que la constante se fond dans les fonctions arbitraires, il vient

$$2\log(\zeta+\sqrt{\zeta^2+1}) + \log\Phi(\theta) = \log F(t),$$

ou

$$(17)\qquad (\zeta+\sqrt{\zeta^2+1})^2\,\Phi(\theta) = F(t).$$

Or l'équation (11) et la seconde équation (1) donnent

$$z = \frac{p+qt}{\sqrt{1+t^2}},\qquad \sqrt{\zeta^2+1} = \frac{\sqrt{1+t^2-f^2}\,\sqrt{1+p^2+q^2}}{\sqrt{1+t^2}},$$

ce qui réduit l'équation (17) à

$$(18)\qquad \left(p+qt+\frac{\sqrt{1+t^2-f^2}\,\sqrt{1+p^2+q^2}}{1+t^2}\right)^2\Phi(\theta) = F(t).$$

Si l'on imagine que $f(t)$ soit partout remplacée par sa valeur tirée de la première équation (15), l'équation de la surface cherchée sera le résultat de l'élimination de p, q, t et θ entre les cinq équations (1), (2) et (18).

Les surfaces représentées par les équations (1), (2) et (18) constituent le troisième et dernier genre des surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans un système et sphériques dans l'autre. Les plans

des lignes de la première courbure sont tangents à un cylindre dans le cas général, et passent par une droite fixe dans le cas particulier de $m = 0$. Ce cas de $m = 0$ n'est pas aussi particulier qu'on pourrait croire; effectivement, les fonctions f et φ étant partout remplacées par leurs valeurs tirées des équations (15), si l'on considère les fonctions F et Φ comme déterminées, et m comme un paramètre variable, les diverses surfaces représentées par les équations (1), (2) et (18) seront parallèles; elles peuvent, en conséquence, se déduire facilement de l'une quelconque d'entre elles, par exemple de celle qui correspond à $m = 0$. Cela résulte immédiatement de ce qui a été dit au § V de la première partie.

Dans cette hypothèse de $m = 0$, si l'on élimine p, q et t entre les équations (1), (2) et (18), il vient

$$(19) \qquad \frac{z - \theta - \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \theta)^2}}{z - \theta + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \theta)^2}} \Phi(\theta) + F\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

et il est aisé de voir qu'on reproduit la première équation (2) en différentiant l'équation (19) par rapport à θ. Si donc on fait

$$V = \frac{z - \theta - \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \theta)^2}}{z - \theta + \sqrt{x^2 + y^2 + (z - \theta)^2}} \Phi(\theta) + F\left(\frac{y}{x}\right),$$

l'équation de la surface dont nous nous occupons sera le résultat de l'élimination de θ entre les deux équations

$$(20) \qquad V = 0, \quad \frac{dV}{d\theta} = 0.$$

La surface représentée par les équations (20) a été considérée, pour la première fois, par M. Joachimsthal, dans le Mémoire cité plus haut.

§ VII.

Cinquième cas.

On a

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad c = 0, \quad u = 0, \quad l = 0.$$

Les équations relatives aux lignes de courbure planes sont

$$ax + by = 0,$$
$$ap + bq = 0;$$

on en déduit

$$qx - py = 0;$$

on ne trouve donc, dans ce cinquième cas, que les seules surfaces de révolution, qui sont comprises dans le premier des deux genres de surfaces étudiées dans la première partie.

Les équations relatives aux lignes de courbure sphériques renferment trois indéterminées, et, par suite, deux fonctions arbitraires d'un paramètre. Les sphères qui contiennent les lignes de la seconde courbure sont essentiellement indéterminées, puisque ces lignes sphériques sont ici les parallèles de la surface.

§ VIII.

Sixième cas.

On a

$$\delta = 0, \quad \lambda = m, \quad a = 0, \quad c = 0, \quad u = ml,$$

m étant une constante : si l'on fait, en outre,

$$b = -1, \quad l = -t,$$

les équations relatives aux lignes de courbure planes sont

$$y = mt,$$
$$q = t\sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

et en éliminant t, on obtient l'équation différentielle partielle de la surface, savoir

$$mq = y\sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

c'est l'équation générale des surfaces des canaux dont l'axe est une courbe plane arbitraire. Les lignes de l'une des courbures sont dans des plans parallèles; les lignes de la seconde courbure sont des circonférences qui ont leurs centres dans un même plan. Ces surfaces sont donc comprises parmi celles qui forment le premier genre des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes.

Les lignes de courbure sphériques étant des cercles, les sphères qui les contiennent ne sont pas déterminées, et c'est ce que l'analyse in-

dique en laissant trois quantités indéterminées, dans les équations qui se rapportent aux lignes de la deuxième courbure.

§ IX.

Septième cas.

On a

$$\delta = 0, \quad \lambda = -\frac{1}{m}\alpha, \quad c = 0, \quad u = 0, \quad l = m\alpha:$$

si l'on fait, en outre,

$$a = t, \quad b = -1,$$

les équations relatives aux lignes de la première courbure sont

$$y = tx,$$

$$q - pt = mt\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

En éliminant t, on aura l'équation aux différentielles premières de la surface, savoir

$$qx - py = my\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

La surface dont il s'agit ici est évidemment un cas particulier des surfaces considérées par M. Joachimsthal, et dont nous avons formé l'équation au § VI. On voit aussi qu'elle est encore un cas particulier des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes (§ IV de la première partie). Les lignes de la seconde courbure, étant planes et situées sur des sphères de rayons finis, sont nécessairement des circonférences. Il est très-aisé, d'ailleurs, de vérifier ce résultat à posteriori.

Comme dans les deux cas qui précèdent, l'analyse ne peut déterminer les sphères qui renferment les lignes de la seconde courbure.

TROISIÈME PARTIE.

DES SURFACES DONT TOUTES LES LIGNES DE COURBURE SONT SPHÉRIQUES.

§ Ier.

D'après ce qui a été dit au § Ier de la deuxième partie, si toutes les lignes de courbure d'une surface sont sphériques, on a, en faisant usage des notations déjà employées,

$$(1)\qquad (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=a^2+b^2+c^2+2u,$$

$$(2)\qquad -(x-a)p-(y-b)q+(z-c)=l\sqrt{1+p^2+q^2},$$

$$(3)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\nu,$$

$$(4)\qquad -(x-\alpha)p-(y-\beta)q+(z-\gamma)=\lambda\sqrt{1+p^2+q^2};$$

a, b, c, u, l étant fonctions d'un paramètre t, tandis que α, β, γ, ν et λ sont fonctions d'un second paramètre θ. Les équations (1) et (2) sont ainsi relatives aux lignes de la première courbure: les équations (3) et (4) se rapportent aux lignes de la deuxième courbure. La condition de perpendicularité des lignes de courbure qui passent par un même point s'obtiendra en éliminant les six variations dx, dy, dz, δx, δy, δz entre les cinq équations

$$dx\,\delta x+dy\,\delta y+dz\,\delta z=0,$$

$$(x-a)\,dx+(y-b)\,dy+(z-c)\,dz=0,\quad dz=p\,dx+q\,dy,$$

$$(x-\alpha)\,\delta x+(y-\beta)\,\delta y+(z-\gamma)\,\delta z=0,\quad \delta z=p\,\delta x+q\,\delta y.$$

On trouve ainsi, en ayant égard aux équations (1), (2), (3), (4),

$$(5)\qquad u+\nu+a\alpha+b\beta+c\gamma=l\lambda.$$

Dans la discussion de cette équation de condition, nous distinguerons quatre hypothèses qui sont les seules possibles, et que nous allons examiner.

1°. *Les quantités a, b, c sont liées par trois équations linéaires.* Dans cette hypothèse, a, b, c sont déterminées; les sphères qui

contiennent les lignes de la première courbure sont concentriques, et, en prenant leur centre commun pour origine des coordonnées, on aura

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0;$$

l'équation (5) se réduit alors à

$$u + v = l\lambda.$$

En la différentiant par rapport à t, il vient

$$u' = l'\lambda.$$

Cette dernière exige que u' et l' soient nuls ou que λ soit constante. Le cas de $u' = 0$ donnerait

$$u = \text{constante};$$

par suite, la surface serait une sphère. Rejetant cette solution et désignant par m et m' deux constantes, on a

$$\lambda = \frac{m}{2}, \quad 2u' = ml', \quad \text{d'où} \quad 2u = ml + m'.$$

puis

$$2v = -m'.$$

On a ainsi cette solution unique de l'équation (5),

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad 2u = ml + m', \quad 2v = -m', \quad \lambda = \frac{m}{2}.$$

2°. *Les quantités a, b, c sont liées par deux équations linéaires.* Dans cette deuxième hypothèse, les centres des sphères qui contiennent les lignes de la première courbure sont situés sur une droite fixe. En prenant cette droite fixe pour axe des z, on aura

$$a = 0, \quad b = 0;$$

l'équation (5) se réduit alors à

$$u + v + c\eta = l\lambda.$$

Différentiant cette équation par rapport à θ, puis celle obtenue par

rapport à t, il vient

$$v' + c\gamma' = l\lambda',$$
$$c'\gamma' = l'\lambda'.$$

c' ne peut être nul, car autrement c serait constant, et l'on rentrerait dans la première hypothèse. On tire alors des équations précédentes

$$\gamma' = \frac{l'}{c'}\lambda', \quad v' = \left(l - \frac{cl'}{c'}\right)\lambda'.$$

Il faut donc de deux choses l'une : ou que γ', v' et λ' soient nuls, ou que $\frac{l'}{c'}$ et $l - \frac{cl'}{c'}$ soient constantes.

Supposons d'abord le premier cas, savoir :

$$\gamma' = 0, \quad v' = 0, \quad \lambda' = 0;$$

les centres des sphères qui contiennent les lignes de la seconde courbure sont dans un plan fixe perpendiculaire à l'axe des z; on peut prendre ce plan pour celui des xy, et alors on a

$$\gamma = 0, \quad v = -\frac{m'}{2}, \quad \lambda = \frac{m}{2},$$

m et m' désignant des constantes. L'équation de condition (5) donne ensuite

$$u = \frac{m}{2}l + \frac{m'}{2}.$$

Considérons maintenant le deuxième cas. On aura, en désignant par m et m' deux constantes,

$$l = mc + \frac{m}{2},$$

$$\gamma' = m\lambda', \quad v' = \frac{m'}{2}\lambda';$$

intégrant et désignant par m et m' deux nouvelles constantes, il vient

$$\gamma = m\lambda + \frac{m'}{2}, \quad v = \frac{m'}{2}\lambda + \frac{m}{2}.$$

L'équation de condition (5) donne enfin

$$u = -\frac{m'}{2}c - \frac{m}{2}.$$

On a ainsi ces deux solutions de l'équation (5) :

$$a = 0, \quad b = 0, \quad 2u = ml + m',$$
$$\gamma = 0, \quad 2v = -m', \quad \lambda = \frac{m}{2},$$

et

$$a = 0, \quad b = 0, \quad 2u = -m'c - m,$$
$$l = mc + \frac{m'}{2}, \quad \gamma = m\lambda + \frac{m'}{2}, \quad 2v = m'\lambda - m,$$

m, m', m'' et m''' désignant quatre constantes.

3°. *Les quantités a, b, c sont liées par une seule équation linéaire.* Les centres des sphères qui contiennent les lignes de la première courbure sont dans un plan fixe. En prenant ce plan pour celui des yz, on aura

$$a = 0.$$

et l'équation (5) se réduit à

$$u + v + b\xi + c\gamma = l\lambda.$$

Différentiant une fois par rapport à θ, puis ensuite deux fois par rapport à t, il vient

$$v' + b\xi' + c\gamma' = l\lambda',$$
$$b'\xi' + c'\gamma' = l'\lambda',$$
$$b''\xi' + c''\gamma' = l''\lambda'.$$

On ne peut avoir

$$b'c'' - c'b'' = 0.$$

car autrement il y aurait une relation linéaire entre b et c, et l'on rentrerait dans les hypothèses précédentes; on peut donc tirer des deux dernières équations des valeurs finies de ξ' et γ', et ces valeurs auront la forme

$$\xi' = B\lambda', \quad \gamma' = C\lambda',$$

B et C étant fonctions du seul paramètre t.

Si ξ' et γ' sont nuls, ξ et γ sont constantes; les sphères qui contiennent les lignes de la seconde courbure ont leurs centres sur une ligne droite, et l'on rentre dans la deuxième hypothèse. Si ξ' et γ' ne sont pas nuls, λ' ne peut être nul, et B, C sont constantes. On a d'ailleurs

$$C\xi' - B\gamma' = 0, \quad \text{d'où} \quad C\xi - B\gamma = \text{constante}.$$

Cela prouve que les sphères qui contiennent les lignes de la seconde courbure ont leurs centres dans un plan perpendiculaire au plan yz; on peut prendre ce plan pour celui des xz, et alors on aura

$$\xi = 0.$$

L'équation (5) se réduit alors à

$$u + v + c\gamma = l\lambda;$$

sa dérivée relative à θ, et la dérivée de celle-ci relative à t, sont

$$v' + c\gamma' = l\lambda',$$
$$c'\gamma = l'\lambda'.$$

On ne peut avoir $c' = 0$, ni $\gamma' = 0$; car autrement on rentrerait dans les hypothèses précédentes. La dernière équation donne donc

$$l' = mc', \quad \lambda' = \frac{1}{m}\gamma';$$

d'où, en intégrant,

$$l = mc + m', \quad \lambda = \frac{1}{m}\gamma + m'',$$

m, m' et m'' étant trois constantes. Les équations précédentes donnent ensuite

$$v' = \frac{m'}{m}\gamma', \quad \text{d'où} \quad v = \frac{m'}{m}\gamma + m''',$$

m''' désignant une nouvelle constante; puis

$$u = mm'c + (m'm'' - m'''),$$

On a ainsi cette solution unique de l'équation (5):

$$a = 0, \quad u = mm'c + (m'm'' - m'''), \quad l = mc + m',$$
$$\xi = 0, \quad v = \frac{m'}{m}\gamma + m''', \quad \lambda = \frac{1}{m}\gamma + m''.$$

4°. *Les quantités a, b, c ne sont liées par aucune équation linéaire.* Je dis que α, β, γ satisfont au moins à une équation linéaire, et que, par suite, on rentre dans l'une des trois précédentes hypothèses. En effet, différentions d'abord l'équation (5) par rapport à θ, il vient

$$\lambda' + a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = l\lambda';$$

différentions celle-ci trois fois par rapport à t, il vient

$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = l'\lambda',$$
$$a''\alpha' + b''\beta' + c''\gamma' = l''\lambda',$$
$$a'''\alpha' + b'''\beta' + c'''\gamma' = l'''\lambda';$$

puisqu'il n'existe aucune relation linéaire entre a, b, c, le déterminant

$$\begin{cases} a', & b', & c', \\ a'', & b'', & c'', \\ a''', & b''', & c''', \end{cases}$$

ne peut être nul; par conséquent, les équations précédentes donneront pour α', β', γ' des valeurs finies qui auront la forme

$$\alpha' = A\lambda', \quad \beta' = B\lambda', \quad \gamma' = C\lambda',$$

A, B, C étant indépendants de θ. Ces équations exigent que α' soit nul ou que A soit constante, que β' soit nul ou que B soit constante; enfin, que γ' soit nul ou que C soit constante. Si l'une des quantités α', β', γ' est nulle, on rentre dans l'une des hypothèses précédentes. La même chose a lieu si aucune des quantités α', β', γ' n'est nulle, car, dans ce cas, les équations précédentes donnent

$$\alpha' = \frac{C}{A}\gamma', \quad \beta' = \frac{C}{B}\gamma',$$

d'où

$$\alpha = \frac{C}{A}\gamma + \text{constante}, \quad \beta = \frac{C}{B}\gamma + \text{constante}.$$

Il existe donc deux relations linéaires entre α, β, γ.

Il résulte de cette discussion, que l'équation (5) n'admet que quatre

solutions distinctes et utiles pour l'objet de nos recherches, savoir :

1°. $a=0,\quad b=0,\quad c=0,\quad 2u=ml+m',\quad 2v=-m',\quad \lambda=\frac{m}{2}$;

2°. $a=0,\quad b=0,\quad 2u=ml+m',\quad \gamma=0,\quad 2v=-m',\quad \lambda=\frac{m}{2}$;

3°. $a=0,\quad b=0,\quad 2u=-mc-m'',\quad l=mc+\frac{m'}{2}$,

$\gamma=m\lambda+\frac{m''}{2},\quad 2v=m'\lambda+m'''$;

4°. $a=0,\quad u=mm''c-(m'm'''-m''),\quad l=mc+m'$,

$\beta=0,\quad v=\frac{m'}{m}\gamma+m'',\quad \lambda=\frac{1}{m}\gamma+m$;

m, m', m'', m''' désignant des constantes. Nous allons examiner les quatre cas auxquels on est ainsi conduit.

§ II.

Premier cas.

On a

$$a=0,\quad b=0,\quad c=0,\quad 2u=ml+m',$$
$$2v=-m',\quad \lambda=\frac{m}{2}.$$

Les équations (1) et (2) du § Ier, qui sont relatives aux lignes de la première courbure, sont ici :

$$x^2+y^2+z^2=ml+m',$$
$$z-px-qy=l\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

L'élimination de l donne l'équation aux différentielles premières de la surface; savoir,

$$z-px-qy=\frac{x^2+y^2+z^2-m'}{m}\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Si l'on compare cette équation à l'équation (4) du § III de la deuxième partie, on verra qu'elle se déduit de celle-ci, en supposant la fonction $\varphi(\zeta)$ linéaire et égale à $m\zeta+m'$. La surface dont il s'agit ici est donc un cas particulier des surfaces qui composent le premier genre de celles dont les lignes de courbure sont planes dans un système et

sphériques dans l'autre. Les lignes de la seconde courbure sont des circonférences, circonstance qui est indiquée par le caractère analytique déjà remarqué dans la deuxième partie de ce travail. L'équation sous forme finie de notre surface s'obtiendra immédiatement, en prenant pour $\Phi(\theta)$ une fonction linéaire de θ dans les équations (15) du § III de la deuxième partie.

§ III.

Deuxième cas.

On a

$$a = 0, \quad b = 0, \quad 2u = ml + m',$$
$$\gamma = 0, \quad 2v = -m', \quad \lambda = \frac{m}{2}.$$

L'équation des sphères qui renferment les lignes de la seconde courbure est

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y = -m'.$$

Ces sphères se coupent en un même point

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = \sqrt{-m'}.$$

Si donc on transforme par rayons vecteurs réciproques la surface dont il s'agit ici, en prenant pour centre de transformation le point représenté par les équations précédentes, on obtiendra l'une des surfaces dont nous nous sommes occupés dans les deux premières parties. Donc réciproquement, la surface actuelle est une transformée de l'une de celles-ci.

§ IV.

Troisième cas.

On a

$$a = 0, \quad b = 0, \quad 2u = -m''c - m''', \quad l = mc + \frac{m'}{2}.$$
$$\gamma = m\lambda + \frac{m''}{2}, \quad 2v = m'\lambda + m''',$$

m, m', m'', m''' étant des constantes.

On peut supposer m ou m' nul, car si m n'est pas nul, on pourra changer c en $c - \frac{m'}{2m}$ en déplaçant l'origine des coordonnées sur l'axe des z; on aura alors $l = mc$; ce qui équivaut à faire $m' = 0$.

Supposons d'abord $m = 0$; les équations relatives aux lignes de première courbure sont

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2cz = -m''c - m',$$

$$z - px - qy - c = \frac{m'}{2}\sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

on voit que la surface dont il s'agit ici est un cas particulier des surfaces qui forment le troisième genre de celles dont les lignes de courbure sont planes dans un système et sphériques dans l'autre. On la retrouve effectivement en supposant que $\varphi(\theta)$ soit une fonction linéaire dans l'analyse du § VI de la deuxième partie.

Supposons, en second lieu, $m' = 0$; les équations relatives aux lignes de la deuxième courbure sont

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2cz = -m''c - m,$$

$$z - px - qy = c(1 + m\sqrt{1 + p^2 + q^2}).$$

La surface à laquelle ces équations appartiennent fait partie du second genre de celles dont les lignes de courbure sont planes dans un système et sphériques dans l'autre. On l'obtient en effet, en supposant que $\varphi(\theta)$ soit une fonction linéaire dans l'analyse du § V de la deuxième partie.

Pour chacune des deux surfaces dont il vient d'être question, les lignes de la seconde courbure sont des cercles.

§ V.

Quatrième cas.

On a

$$a = 0, \quad u = mm'c + (m'm'' - m), \quad l = mc + m',$$

$$\xi = 0, \quad \eta = \frac{m'}{m}\gamma + m', \quad \lambda = \frac{1}{m}\gamma - m''.$$

m, m', m'', m étant des constantes. Les équations des sphères relatives aux lignes de l'une et l'autre courbure sont

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2by - 2cz = 2mm''c + 2(m'm'' - m').$$

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\gamma z = 2\frac{m'}{m}\gamma + 2m.$$

Les sphères représentées par l'équation (1) se coupent en un même point, pour lequel on a

$$x = \sqrt{2(m'm''' - m'') - m^2 m''^2}, \quad y = 0, \quad z = -mm'';$$

de même, les sphères (2) se coupent au point fixe

$$x = 0, \quad y = \sqrt{2m''' - \frac{m'^2}{m^2}}, \quad z = -\frac{m'}{m}.$$

Si donc on transforme, par rayons vecteurs réciproques, la surface dont il est ici question, en prenant pour centre de transformation l'un des points dont on vient de parler, on obtiendra l'une des surfaces étudiées dans la première ou dans la deuxième partie. Donc réciproquement, la surface actuelle est une transformée de l'une de celles-ci.

§ VI.

Il résulte de cette discussion, que si l'on exclut les surfaces dont les lignes de courbure d'un système sont circulaires, et qui appartiennent aux genres considérés dans les deux premières parties, les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont sphériques ne peuvent former que deux genres distincts.

Dans le premier genre, les centres des sphères des lignes de l'une des courbures sont sur une droite fixe; les centres des sphères des lignes de l'autre courbure sont dans un plan fixe perpendiculaire à la droite fixe.

Dans le second genre, les centres des sphères des lignes de chacune des courbures sont dans un plan fixe; les deux plans fixes sont perpendiculaires entre eux.

Enfin toutes ces surfaces peuvent se déduire, au moyen de la transformation par rayons vecteurs réciproques, soit des surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes, soit des surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans un système et sphériques dans l'autre. Toutefois, il faut admettre que le centre de transformation puisse être imaginaire, ce qui ne peut présenter aucune difficulté. Au surplus, il est très-aisé de voir qu'on peut se borner aux centres de transformation réels, pourvu que l'on joigne aux surfaces obtenues toutes les surfaces qui leur sont parallèles.

CONCLUSION.

L'analyse développée dans ce Mémoire conduit naturellement à distinguer en plusieurs genres les surfaces dont toutes les lignes de

courbure sont planes ou sphériques. Ainsi, les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont planes forment deux genres dont le premier a été étudié par Monge; les surfaces dont les lignes de courbure sont planes dans un système et sphériques dans l'autre forment trois genres; enfin les surfaces dont toutes les lignes de courbure sont sphériques ne forment proprement que deux nouveaux genres.

Pour les surfaces d'un même genre, les lignes de courbure de chaque système sont déterminées directement par le moyen de deux équations entre les coordonnées rectangulaires x, y, z, et les différentielles partielles $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ ou p, q. Chacun des systèmes d'équations dont il s'agit renferme un paramètre variable, et, en général, une fonction arbitraire de ce paramètre; ils constituent les deux intégrales intermédiaires d'une équation différentielle partielle débarrassée d'arbitraires, en sorte que, pour achever la solution, il ne reste plus qu'à intégrer la seule équation différentielle ordinaire $dz = p\,dx + q\,dy$.

Mais, dans quelques cas particuliers, les équations relatives à l'un des systèmes de lignes de courbure ne renferment aucune arbitraire, tandis que les équations qui se rapportent à l'autre système contiennent deux fonctions arbitraires. Dans ces cas, les plans ou les sphères qui contiennent les lignes de courbure de ce dernier système sont indéterminés, et les surfaces correspondantes sont développables ou sont à lignes de courbure circulaires. Ce caractère analytique n'est pas le seul par lequel se manifeste l'existence des surfaces à lignes de courbure droites ou circulaires. En effet, pour chacun des cinq genres étudiés dans la deuxième et dans la troisième partie, les équations qui se rapportent aux lignes de l'une des courbures peuvent être satisfaites quels que soient le paramètre et la fonction arbitraire de ce paramètre contenus dans ces équations. Les solutions qui en résultent sont de véritables solutions *singulières*; les surfaces correspondantes sont, outre la sphère, le cône droit, le cylindre droit, le tore, et les surfaces que l'on obtient en transformant celles-ci par rayons vecteurs réciproques. Ces surfaces sont déjà renfermées dans les genres que nous avons étudiés; aussi nous bornons-nous à les mentionner.

SUR

LA SURFACE DONT LA COURBURE MOYENNE EST CONSTANTE;

PAR M. J.-H. JELLETT,

Professeur à l'Université de Dublin.

En cherchant, par la méthode des variations, la surface d'une étendue donnée qui renferme le volume le plus grand, on trouve, comme on sait, que la courbure moyenne de la surface cherchée doit être constante. Si l'on exprime cette condition en différentielles partielles, on a l'équation

$$(A) \qquad (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t + \frac{2}{a}(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Outre cette équation générale, le calcul des variations fournit des conditions aux limites qui servent à déterminer les fonctions arbitraires qui se trouvent dans sa solution. Malheureusement on n'a pas encore pu intégrer l'équation (A), ce qui nous empêche d'obtenir la solution générale de la question proposée.

Il y a cependant un cas dans lequel on sait d'avance le résultat qu'on doit obtenir. Quand on cherche, parmi toutes les surfaces *fermées*, celle qui renferme un volume maximum, des considérations simples montrent que la surface cherchée est une sphère. Mais on n'a pas encore pu démontrer ce résultat par le calcul des variations, ce qui semble être une assez grande lacune dans cette méthode.

« On sait, dit M. Delaunay (*Journal de l'École Polytechnique*, » tome XVIII, page 110), que, parmi les surfaces fermées d'une » étendue donnée, la sphère est celle qui renferme le volume le plus » grand; mais cette solution n'a pas encore pu être tirée des équations » que fournit le calcul des variations.... Il est facile de voir que la

» variation de l'intégrale ne contiendra pas de termes aux limites. Les » conditions de maximum absolu se réduiront donc à la seule équa- » tion (A). Ainsi, pour démontrer que la surface cherchée est une » sphère, il faudrait faire voir que la sphère est la seule surface fer- » mée qui soit comprise dans cette équation, et c'est ce qu'on n'a » pas encore pu faire. »

J'ai considéré cette question précisément comme M. Delaunay l'a posée, et, ayant réussi à la résoudre pour une assez grande classe des surfaces, je me propose ici de faire voir que, parmi toutes les surfaces dont le volume peut être exprimé par l'intégrale

$$\int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

la sphère est la seule dont la courbure moyenne est constante. Pour cela, je donnerai d'abord quelques théorèmes, qui sont d'ailleurs assez remarquables. J'adopterai dans tout ce qui suit les notations que voici :

Soit P la perpendiculaire abaissée de l'origine, que l'on suppose être prise à l'intérieur d'une surface fermée, sur le plan tangent. Soit $d\omega$ l'élément de la surface sphérique que décrit un rayon parallèle à cette perpendiculaire et dont la longueur est l'unité, en sorte que

$$d\omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

θ, φ étant les angles polaires qui déterminent la position de la perpendiculaire. Soient S l'aire totale de la surface et dS l'élément de cette aire. Représentons par I l'intégrale

$$\iint P\, d\omega,$$

en supposant que cette intégrale s'étende à toute la surface. Enfin, soient R, R′ les rayons de courbure principaux au point qu'on considère. Nous aurons les théorèmes suivants :

Théorème I. *Dans une surface quelconque fermée,*

$$(B) \qquad 2I = \iint \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dS,$$

si l'on suppose que l'intégrale s'étende à toute la surface.

Il me suffit ici d'énoncer ce théorème. On en trouvera la démonstration dans mon *Calculus of variations*, pages 351 à 353.

THÉORÈME II. *Dans une surface quelconque fermée,*

$$(C) \qquad 2S = \int\int P\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dS,$$

en supposant, comme dans le théorème précédent, que l'intégrale s'étende à toute la surface.

En effet, soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point de la surface, et posons

$$\xi = \frac{p(px + qy - z)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} - x\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

$$\eta = \frac{q(px + qy - z)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} - y\sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

en conservant la notation ordinaire de différentielles partielles. Nous aurons donc, en différentiant,

$$\frac{d\xi}{dx} = (px + qy - z)\left[\frac{(1 + q^2)r - pqs}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}\right] + s\frac{py - qx}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} - \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

$$\frac{d\eta}{dy} = (px + qy - z)\left[\frac{(1 + p^2)t - pqs}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}\right] + s\frac{qx - py}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} - \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Ajoutant ces équations, nous trouverons

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} = (px + qy - z)\frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}} - 2\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Mais, en vertu des relations

$$P = \frac{z - px - qy}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -\frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

cette équation peut s'écrire

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} = \left[P\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) - 2\right]\sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

On a donc

$$2\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy = \mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}'}\right)\sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy$$
$$-\left(\frac{d\xi}{dy}+\frac{d\eta}{dy}\right)dx\,dy,$$

ou, plus simplement,

$$2\,d\mathrm{S} = \mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}'}\right)d\mathrm{S} - \left(\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\right)dx\,dy.$$

En intégrant et désignant par Σ l'aire d'une portion de la surface terminée à une courbe quelconque, nous aurons

$$\text{D}\qquad 2\Sigma = \int\!\!\int \mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}'}\right)d\mathrm{S} + \int\left(\xi\frac{dy}{dx}-\eta\right)dx,$$

où l'intégrale double s'étend à toute la portion que l'on considère, et l'intégrale simple à toute la courbe limite. On peut déduire plusieurs conséquences curieuses de cette équation; mais, pour notre but immédiat, il me suffit de remarquer qu'en étendant l'intégration à toute la surface, l'intégrale simple disparaîtra évidemment. On a donc simplement

$$2\mathrm{S} = \int\!\!\int \mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}'}\right)d\mathrm{S}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème III. Maintenant considérons l'équation

$$\text{(E)}\qquad \frac{1}{\mathrm{R}}+\frac{1}{\mathrm{R}'} = \frac{2}{a},$$

qui représente une surface dont la courbure moyenne est constante. Mettant cette équation sous la forme

$$\left(\frac{1}{\mathrm{R}}-\frac{1}{\mathrm{R}'}\right)^2 = \frac{4}{a^2}-\frac{4}{\mathrm{RR}'},$$

multipliant par $\frac{1}{4}\mathrm{P}\,d\mathrm{S}$ et intégrant, on trouve facilement

$$\text{(F)}\qquad \mathrm{M} = a^2\mathrm{I} + \frac{a^2}{4}\int\!\!\int\left(\frac{1}{\mathrm{R}}-\frac{1}{\mathrm{R}'}\right)^2\mathrm{P}\,d\mathrm{S},$$

en représentant par M le triple du volume. Cela posé, si l'on multiplie

l'équation (E) par dS et qu'on intègre, on trouve, en vertu de l'équation (B),

$$\int\int dS\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right)=2\int\int P\,d\omega=\frac{2S}{a};$$

on a donc

$$S=aI.$$

Multipliant de nouveau l'équation (E) par $P\,dS$ et intégrant, on a, en vertu de l'équation (C),

$$S=\frac{M}{a}.$$

Eliminant S entre ces équations, nous aurons

$$M=a^2I.$$

Cette condition réduit l'équation (F) à

$$\int\int\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}\right)^2 P\,dS=0.$$

Mais comme

$$P\,dS=r^3\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

on voit facilement que, pour la classe des surfaces qu'on considère, tous les éléments dont cette dernière intégrale est composée sont essentiellement positifs. L'intégrale totale ne peut donc pas s'évanouir à moins que chacun des éléments ne devienne nul.

On a donc, pour tous les points de la surface,

$$\frac{1}{R}-\frac{1}{R'}=0,\quad \frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\frac{2}{a}.$$

Donc

$$R=R'=a,$$

ce qui montre que la surface cherchée est une sphère dont le rayon est a.

Addition à la Note sur une transformation d'intégrales définies, insérée dans le cahier de mars;

PAR M. BESGE.

On m'a demandé la démonstration rigoureuse que je dis avoir de l'équation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin 2u) \cos u\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 u) \cos u\, du$$

La voici en peu de mots. Dans l'intégrale placée au premier membre, je groupe les éléments relatifs aux valeurs de la variable à égale distance des deux limites, moyennant quoi cette intégrale devient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varphi(\sin 2u)(\cos u + \sin u)\, du.$$

Puis je fais $\sin 2u = \cos^2 x$, d'où $\cos 2u\, du = -\sin x \cos x\, dx$; et j'observe que u variant de 0 à $\frac{\pi}{4}$, x varie de $\frac{\pi}{2}$ à 0. Je trouve ainsi notre intégrale égale à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 x) \frac{\sin x \cos x\, dx}{\cos 2u} (\cos u + \sin u).$$

Mais

$$(\cos u + \sin u)^2 = 1 + \sin 2u = 1 + \cos^2 x;$$

donc

$$\cos u + \sin u = \sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

D'un autre côté

$$\cos 2u = \sqrt{1 - \cos^4 x} = \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x}.$$

L'intégrale dont nous nous occupons est donc finalement égale à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\cos^2 x) \cos x\, dx;$$

ce qu'il fallait démontrer.

THÉORIE ANALYTIQUE DES MOINDRES CARRÉS;

PAR M. P.-E. BIVER,
Lieutenant au corps d'État-Major belge.

La méthode des moindres carrés donne lieu aujourd'hui à d'assez nombreuses applications; il est évidemment à désirer que toutes les personnes qui se trouvent dans le cas de s'en servir en connaissent la théorie. Malheureusement, la démonstration de Laplace présente des développements et des difficultés qui la mettent hors de la portée du grand nombre. Bien des tentatives ont été faites pour y suppléer d'une manière satisfaisante par des spéculations moins élevées; le présent Mémoire est un essai dans ce sens.

J'ai cru possible d'attacher une signification à la formule très-simple sur laquelle repose la méthode, sans invoquer le secours de notions plus ou moins étrangères à la question. A cet effet, j'ai imaginé une fonction que je nomme *risque d'erreur;* en partant de la définition de cette fonction et de l'examen du problème complet de la compensation des erreurs, je crois être parvenu, dans les paragraphes ci-après, à démontrer successivement et directement les théorèmes fondamentaux nécessaires à la solution du problème, *dans le cas le plus général qui puisse se présenter.* Quant aux résultats remarquables et aux procédés simplifiés auxquels conduit la théorie des moindres carrés, je ne m'en occupe point ici : une fois les théorèmes fondamentaux établis, il est facile d'y rattacher les conséquences qu'on en a déduites.

§ I.

But de la théorie.

Dans la pratique de plusieurs sciences, on a besoin de se procurer des valeurs aussi exactes que possible pour certaines quantités : l'astronomie, la géodésie, la physique présentent surtout cette exigence. Mais, quelque parfaits que soient les moyens employés à la mesure de ces valeurs, quelque habile que soit l'observateur, il est bien des sources d'erreur qu'il est impossible d'éviter. Ces sources sont de deux espèces bien distinctes : les unes, inhérentes à la nature particulière des moyens d'observation, produisent des erreurs régulières dépendant de circonstances appréciables; les autres consistent dans les imperfections des sens et des instruments, et dans mille influences diverses qu'on ne saurait distinguer : elles donnent lieu à des erreurs fortuites et irrégulières. Parmi les sources d'erreur de la première espèce, nous citerons les dilatations des règles, les excentricités, les défauts de collimation, les phases des signaux géodé-

siques, les réfractions, la déclinaison magnétique et ses variations, etc. L'observateur qui prétend à une certaine exactitude doit étudier les lois des erreurs de cette catégorie et annoter constamment des éléments de correction, ou combiner ses observations de manière à pouvoir, par le calcul, dépouiller ses résultats des erreurs régulières. Restent donc les erreurs fortuites; et celles-ci, on ne peut espérer de les apprécier d'une manière certaine : leur nature s'y oppose. Une seule ressource se présente à l'observateur : il doit varier habilement les circonstances de ses mesures et les répéter un assez grand nombre de fois; alors tout le porte à croire que les mêmes quantités auront été affectées d'erreurs fortuites, tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre; et, par suite, qu'il peut établir une espèce de compensation par une combinaison bien entendue de ses mesures. Mais y a-t-il une combinaison qu'il faille adopter de préférence à toute autre, et quelle est-elle? Voilà donc la question qui arrête l'observateur : la *théorie des moindres carrés* a pour objet d'y répondre, dans le cas où rien ne permet de supposer que les erreurs fortuites se produisent plus facilement positives que négatives, ou *vice versâ*.

Nous ferons remarquer que, dans ces tentatives de compensation, l'on peut être dans le cas d'avoir à comparer des mesures obtenues par des moyens d'une perfection inégale, tellement que l'on doive accorder plus de confiance à l'une qu'à l'autre. D'après ceci, nous dirons que des valeurs différentes, mais puisées à la même source, ont une *précision* égale, et que cette précision varie avec la source, de façon qu'il est essentiel, dans nos recherches, de reconnaître les moyens d'évaluer la précision des valeurs en même temps que ceux de compenser les erreurs.

Afin d'éviter la confusion, nous désignerons uniformément, dans tout ce qui suit, par x, y, z, u, t,..., les valeurs inconnues à déterminer, et par q leur nombre. Remarquant ensuite que les observations ne portent pas toujours directement sur les inconnues, mais souvent sur des fonctions données d'une ou plusieurs inconnues, nous désignerons par v_1, v_2, v_3,..., les quantités observées ou mesurées; par k_1, k_2, k_3,..., les valeurs obtenues pour ces quantités et *dégagées des erreurs régulières*; par p le nombre des observations; par h_1, h_2, h_3,..., les précisions des valeurs k_1, k_2, k_3,...; et par h', h'', h''',..., les précisions des valeurs finales x', y', z',..., que nous trouverons pour x, y, z,.... Lorsqu'il aura été possible d'observer directement les inconnues, une ou plusieurs des quantités v seront égales à x, d'autres à y, etc.; mais ce cas rentre dans celui, plus général, où l'on observe des fonctions connues

$$v_1 = f_1(x, y, z, \ldots), \quad v_2 = f_2(x, y, z, \ldots), \quad \text{etc.}$$

Il peut arriver, de plus, que les inconnues soient liées par des *équations de condition nécessaires*, rigoureuses,

$$0 = F_1(x, y, z, \ldots), \quad 0 = F_2(x, y, z, \ldots);$$

telle est, par exemple, l'équation

$$0 = 180^\circ - x - y - z,$$

si x, y, z sont les trois angles d'un triangle rectiligne. Nous désignerons par r le nombre

de ces équations, i pouvant être nul; et nous voyons ainsi que le nombre d'inconnues réellement à déterminer se réduit à $q - i$; donc, dès que $p > q - i$, nous avons un excès d'observations qui peut nous conduire à une compensation d'erreurs. En effet, en combinant avec les i équations nécessaires $q - i$ des *équations approchées*

$$v = k_1, \quad v_2 = k_2, \quad \text{etc.},$$

nous pourrons en déduire des valeurs pour les inconnues; et ces valeurs n'étant pas exactes, à cause de l'inexactitude des mesures $k_1, k_2, k_3, \ldots$, ne pourront satisfaire que par le plus grand hasard aux $p - q + i$ équations approchées restantes : l'existence des erreurs nous est donc révélée par l'incompatibilité des $p + i$ équations. Cette incompatibilité peut disparaître, si nous faisons aux valeurs $k_1, k_2, k_3, \ldots$, des corrections $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$; alors, dans un système de q équations, nous pourrons déterminer encore les inconnues en fonction des corrections; et, en substituant ces nouvelles valeurs dans les $p - q + i$ équations restantes, nous aurons entre $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$, autant de relations nécessaires à la compatibilité. Tous les systèmes de corrections satisfaisant à ces relations sont possibles, et dans l'ignorance complète où nous sommes de la véritable grandeur des erreurs de $k_1, k_2, k_3, \ldots$, à compenser, nous devons nous contenter de rechercher parmi tous ces *systèmes possibles* celui qui est le plus plausible, eu égard à l'ensemble de toutes les observations faites.

D'après ce qui précède, la théorie des moindres carrés doit résoudre la double question : Un système d'observations étant faites, 1° trouver le système des corrections les plus plausibles à faire aux valeurs observées; 2° déterminer les précisions des observations et des résultats qu'elles fournissent.

§ II.

Définition du risque d'erreur.

Nous nous proposons, en premier lieu, de trouver le système de corrections le plus plausible, qui correspond naturellement au système le plus plausible de valeurs des inconnues. Or, nous comprenons que l'ensemble des observations, sans nous donner de lumières positives sur les erreurs réelles, puisse nous indiquer le risque que nous courons de nous écarter de la vérité en adoptant certaines corrections : c'est ce que nous appellerons le *risque d'erreur* de ces corrections, ou des valeurs correspondantes des inconnues. Nous allons développer cette notion du risque d'erreur.

1°. Imaginons d'abord qu'une seule observation ait été faite; nous aurons $v_1 = k_1$. L'absence de tout autre renseignement fait que, eu égard à cette observation, le risque d'erreur particulier d'une correction Δ_1 sera d'autant plus grand que Δ_1 sera plus grand, sera un minimum pour $\Delta_1 = 0$, et sera le même que celui de la correction $-\Delta_1$, c'est-à-dire sera une fonction paire de Δ_1. La même correction, faite à une autre observation de même précision, donnerait en outre le même risque d'erreur.

2°. Passons au cas où nous aurions fait p observations, sans aucune liaison entre elles; par exemple, où nous aurions mesuré p fois l'angle formé en une station entre

un point fixe et un signal qui peut être mobile d'une observation à l'autre; les p mesures différeront généralement et ne pourront fournir aucun contrôle les unes pour les autres. Dans cette hypothèse, pour un système de corrections que nous pourrons admettre, les risques d'erreurs particuliers se composeront en un risque d'erreur général, qui ne pourra dépendre que des grandeurs des corrections qui composent le système, et des précisions des observations; ce risque d'erreur devra encore être une fonction paire des corrections, devenir un minimum absolu pour toutes les corrections $= 0$, et, de ce point, croître avec chacune et avec toutes, indéfiniment; de plus, toutes les corrections devront y entrer symétriquement lorsque les observations sont également précises, car alors on ne peut concevoir qu'une même correction, faite à diverses observations, influe différemment sur le risque d'erreur; enfin, le même système de corrections, appliqué à un système différent d'observations, égales en précision aux premières, donnerait lieu au même risque d'erreur.

3°. Arrivons au cas des observations liées entre elles, telles qu'on les fait réellement; supposons, par exemple, que nous joignions aux observations du cas précédent la certitude de la fixité du signal. Chaque observation n'en aura été ni plus ni moins exacte; un même système de corrections ne s'écartera ni plus ni moins de la vérité, que nous ayons ou que nous n'ayons pas cette certitude. Le risque d'erreur de ce système sera donc le même dans les deux cas; seulement, dans le premier, tous les systèmes de corrections étant possibles, celui qui présentait le moindre risque d'erreur était

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \ldots,$$

et, maintenant que nous devons avoir

$$x = k_1 + \Delta_1 = k_2 + \Delta_2 = k_3 + \Delta_3 = \ldots,$$

les corrections possibles dépendent les unes des autres, et le risque d'erreur minimum, eu égard à cette dépendance, ne correspondra plus à des corrections nulles, puisque celles-ci seraient incompatibles; par suite, le moindre des risques d'erreur possibles ne sera pas le moindre de tous les risques d'erreur. On conçoit aisément que le même raisonnement peut être appliqué à toute autre hypothèse, et, par conséquent, le risque d'erreur, dans le troisième cas, est toujours le même que dans le deuxième, seulement, le système de corrections le plus plausible varie avec les équations auxquelles doivent satisfaire les systèmes possibles, équations qui dérivent, comme nous l'avons vu au § I, des relations entre les quantités observées et les inconnues d'une part, et entre les inconnues elles-mêmes d'autre part.

Cette identité que nous établissons entre le risque d'erreur d'un même système de corrections dans le deuxième et dans le troisième cas, implique la condition expresse que les erreurs des valeurs données par l'observation soient parfaitement indépendantes les unes des autres, comme si ces valeurs ne se rapportaient pas aux mêmes inconnues ou à des fonctions des mêmes inconnues. Et chaque fois que plusieurs valeurs approchées auront été déduites des *mêmes* observations, leurs erreurs ne seront plus inde-

pendantes, les corrections ne devront plus l'être, et la compensation ne pourra pas être établie entre ces valeurs approchées; il faudra alors remonter aux quantités données plus directement par l'observation. Cette précaution négligée peut conduire, dans les applications, aux plus grandes absurdités.

Le risque d'erreur d'un système de corrections est donc toujours une fonction paire de ces corrections, croissant indéfiniment avec chacune d'elles, et, de plus, symétrique, quand les observations sont d'égale précision; et le minimum de ce risque d'erreur correspond aux valeurs les plus plausibles des corrections et des inconnues.

Il est clair, maintenant, que la solution générale de la première partie de notre problème des compensations revient à trouver l'expression analytique du risque d'erreur, le calcul nous donnant facilement ensuite les valeurs des corrections correspondant au minimum.

§ III.

Expression analytique du risque d'erreur.

Pour arriver graduellement à la solution générale du problème de la compensation des erreurs, nous démontrerons d'abord comme lemme, et d'après Encke (*Annuaire astronomique de Berlin* pour 1834), le principe des moyennes, savoir :

Dans le cas où les observations, d'une précision uniforme, se rapportent directement à une seule inconnue, c'est-à-dire où $v_1 = v_2 = v_3 = \ldots = x$, la valeur la plus plausible de x est la moyenne arithmétique des valeurs observées $k_1, k_2, k_3, \ldots$

Si, d'abord, deux observations seulement ont été faites, savoir $v_1 = k_1$, $v_2 = k_2$, nulle d'entre elles ne méritant la préférence, il faut admettre pour x une valeur également différente de k_1 et de k_2, ce qui ne peut se faire qu'en posant

$$x - k_1 = k_2 - x, \quad \text{ou} \quad x = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Ceci suppose qu'une déviation positive ou négative, d'égale grandeur absolue, doive être regardée comme également à craindre; mais cette hypothèse est fondée : 1° parce qu'elle est la plus simple possible; 2° parce que, les observations ayant été faites avec le plus grand soin, on peut bien supposer à priori que la déviation ait lieu dans un certain sens de préférence, mais on n'a aucun moyen de s'assurer si c'est en plus ou en moins. Ainsi, sauf autre lumière, $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ est la seule valeur généralement bonne.

Passons à la considération de trois observations. Comme il faut les faire entrer en ligne de compte sur la même ligne, il faudra que x soit une fonction symétrique de k_1, k_2 et k_3. Mais on peut aussi imaginer que l'une des observations vienne se ranger troisième après les deux autres déjà considérées, ce qui donnerait à déduire x de $\frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ et k_3, ou de $\frac{1}{2}(k_3 + k_1)$ et k_2, ou de $\frac{1}{2}(k_2 + k_3)$ et k_1. Or cette déduction doit se faire

de la même manière dans les trois cas ; donc, si

$$x = \psi\left[\frac{1}{2}(h_1 + h_2),\ h_3\right],$$

on a en même temps

$$x = \psi\left[\frac{1}{2}(h_1 + h_3),\ h_2\right]$$

et

$$x = \psi\left[\frac{1}{2}(h_2 + h_3),\ h_1\right].$$

Posant

$$h_1 + h_2 + h_3 = s_3,$$

on a

$$x = \psi\left[\frac{1}{2}(s_3 - h_3),\ h_3\right] = \psi\left[\frac{1}{2}(s_3 - h_2),\ h_2\right],$$

ou, en changeant le signe fonctionnel,

$$x = \chi(s_3,\ h_3) = \chi(s_3,\ h_2);$$

cette égalité ne peut exister que si χ est une fonction de s_3 seul, puisque nulle relation ne lie h_3 et h_2 ; on a donc généralement

$$x = \chi(s_3),$$

χ représentant une fonction déterminée, mais encore inconnue. Or, dans le cas particulier de $h_1 = h_2 = h_3$, $s_3 = 3h_1$, tandis qu'il faut évidemment $x = h_1$; donc

$$\frac{s}{3} = \chi(s_3),$$

et, en général,

$$x = \frac{1}{3}(h_1 + h_2 + h_3).$$

De même nous avons, dans le cas de p observations,

$$x = \frac{1}{p}(h_1 + h_2 + \ldots h_p),$$

car, si nous supposons la proposition démontrée pour $p - 1$ observations, il nous vient, comme ci-dessus,

$$x = \psi\left[\frac{1}{p-1}(h_1 + h_2 + \ldots h_{p-1}),\ h_p\right]$$
$$= \psi\left[\frac{1}{p-1}(h_1 + h_2 + \ldots h_{p-1}),\ h_{p-1}\right],$$

ou

$$x = \psi\left[\frac{1}{p-1}(s_p - h_p),\ h_p\right] = \psi\left[\frac{1}{p-1}(s_p - h_{p-1}),\ h_p\right].$$

ou encore

$$x = \chi(s_p, k_p) = \chi(s_p, k_p),$$

c'est-à-dire

$$x = \chi(s_p)$$

simplement; tandis que le cas particulier $k_1 = k_2 = \ldots = k_p$ nous donne

$$x = k_1 = \frac{s_p}{p} = \chi(s_p),$$

et détermine ainsi la forme de cette fonction. Maintenant, la proposition étant démontrée plus haut pour trois observations, il en résulte qu'elle est vraie pour quatre, puis pour cinq, pour six, et ainsi de suite, indéfiniment.

Nous voyons que le principe des moyennes arithmétiques donne

$$px = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots + k_p,$$

en même temps que

$$x = k_1 + \Delta_1 = k_2 + \Delta_2 = k_3 + \Delta_3 = \ldots = k_p + \Delta_p$$

donne

$$px = k_1 + k_2 + \ldots + k_p + \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_p;$$

ainsi, lorsque l'on a

$$e_1 = e_2 = e_3 = \ldots = x \quad \text{et} \quad h_1 = h_2 = h_3 = \ldots,$$

le système de corrections le plus plausible est celui qui donne

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots = 0.$$

Ce système doit rendre aussi le risque d'erreur un minimum. Grâce à cette propriété, nous allons parvenir à établir l'expression analytique la plus générale du risque d'erreur.

A cet effet, bornons-nous d'abord au cas où les observations sont encore toutes d'égale précision, mais se rapportent à plusieurs inconnues ou fonctions d'inconnues. Le risque d'erreur d'un système de corrections $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$, est alors (§ II) une fonction symétrique paire de ces corrections, croissant indéfiniment avec chacune d'elles et susceptible d'un minimum; il doit donc pouvoir être représenté par une série, suivant les puissances paires, positives et ascendantes des corrections, savoir, de la manière la plus générale :

$$\begin{aligned}
&A + B(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots) + C[\Delta_1^4 + \Delta_2^4 + \Delta_3^4 + \ldots] + C'(\Delta_1^2\Delta_2^2 + \Delta_1^2\Delta_3^2 + \Delta_2^2\Delta_3^2 + \ldots] \\
&\quad + D[\Delta_1^6 + \Delta_2^6 + \Delta_3^6 + \ldots] + D'(\Delta_1^4\Delta_2^2 + \Delta_1^4\Delta_3^2 + \Delta_2^4\Delta_1^2 + \ldots] + D''(\Delta_1^2\Delta_2^2\Delta_3^2 + \ldots] + \ldots \\
&\quad + N\left\{\begin{array}{l}
\Delta_1^{2n} + \Delta_2^{2n} + \Delta_3^{2n} + \ldots + N'(\Delta_1^{2n-2}\Delta_2^2 + \Delta_1^{2n-2}\Delta_3^2 + \ldots) \\
\quad + N''(\Delta_1^{2n-4}\Delta_2^4 + \Delta_1^{2n-4}\Delta_3^4 + \ldots) \\
\quad + N_1''(\Delta_1^{2n-4}\Delta_2^2\Delta_3^2 + \Delta_1^{2n-4}\Delta_2^2\Delta_4^2 + \ldots) \\
\quad + N'''(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^6 + \Delta_1^{2n-6}\Delta_3^6 + \ldots) + N_1'''(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^4\Delta_3^2 + \ldots \\
\quad + N_2'''(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4^2 \ldots) + \ldots
\end{array}\right\} + \ldots
\end{aligned}$$

Examinons s'il ne doit pas y avoir pourtant quelque relation particulière entre les

coefficients de ce développement, pour qu'il satisfasse à la condition exprimée ci-dessus, savoir, pour qu'il devienne un minimum par

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots = 0,$$

quand

$$c_1 = c_2 = c_3 = \ldots = x \quad \text{ou} \quad k_1 + \Delta_1 = k_2 + \Delta_2 = k_3 + \Delta_3 = \ldots.$$

La condition du minimum est que la dérivée du polynôme par rapport à la variable devienne nulle; mais ici, en prenant pour variable Δ_1, on a

$$\Delta_2 = \Delta_1 + k_1 - k_2, \quad \Delta_3 = \Delta_1 + k_1 - k_3, \quad \text{etc.};$$

de sorte que les dérivées des autres corrections sont encore l'unité, comme celle de la variable. D'après cela, la dérivée du développement du risque d'erreur devient :

$$\begin{aligned}
2B(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots) &+ C[4(\Delta_1^3 + \Delta_2^3 + \Delta_3^3 + \ldots) + 2C'(\Delta_1^2\Delta_2 + \Delta_1\Delta_2^2 + \Delta_1\Delta_3 + \ldots) \\
&+ D[6(\Delta_1^5 + \Delta_2^5 + \Delta_3^5 + \ldots) + \ldots] + \ldots \\
&- N\left\{\begin{array}{l}
2n(\Delta_1^{2n-1} + \Delta_2^{2n-1} + \Delta_3^{2n-1} + \ldots \\
+ 2N'(\Delta_1^{2n-2}\Delta_2 + \Delta_1^{2n-2}\Delta_3 + \ldots \\
+ (2n-2)N'(\Delta_1^{2n-3}\Delta_2^2 + \Delta_1^{2n-3}\Delta_3^2 + \ldots \\
+ 4N''(\Delta_1^{2n-4}\Delta_2^3 + \Delta_1^{2n-4}\Delta_3^3 + \ldots) \\
+ (2n-4)N''(\Delta_1^{2n-5}\Delta_2^2 + \Delta_1^{2n-5}\Delta_3^2 + \ldots) \\
+ 2N''_1(\Delta_1^{2n-4}\Delta_2\Delta_3 + \Delta_1^{2n-4}\Delta_2^2\Delta_3 + \ldots) \\
+ (2n-4)N''_1(\Delta_1^{2n-5}\Delta_2^2\Delta_3^2 + \Delta_1^{2n-5}\Delta_2^2\Delta_3^2 + \ldots \\
+ 6N'''(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^4 + \Delta_1^{2n-6}\Delta_3^4 + \ldots \\
+ (2n-6)N'''(\Delta_1^{2n-7}\Delta_2^5 + \Delta_1^{2n-7}\Delta_3^5 + \ldots \\
+ 4N'''_1(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^3\Delta_3^2 + \ldots) \\
+ (2n-6)N'''_1(\Delta_1^{2n-7}\Delta_2^4\Delta_3^3 + \ldots) \\
+ 2N'''_1(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^3\Delta_3 + \ldots) + 2N'''_2(\Delta_1^{2n-7}\Delta_2\Delta_3^2\Delta_1 + \ldots \\
+ (2n-6)N'''_2(\Delta_1^{2n-7}\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_1^2 + \ldots) + \ldots
\end{array}\right\} + \ldots
\end{aligned}$$

Ce polynôme doit s'annuler quand on y fait

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_1 = -\Delta_2 - \Delta_3 - \ldots,$$

quels que soient d'ailleurs $k_1, k_2, k_3, \ldots$, et, par conséquent, $\Delta_2, \Delta_3, \ldots$; or, chaque accolade contient un ensemble de termes homogènes d'un degré particulier; la substitution ne peut donc pas amener de réduction entre les diverses accolades, et chacune doit disparaître séparément. Ainsi les coefficients B, C, D, ..., N restent indéterminés; mais nous examinerons s'il ne faut pas spécialiser les autres coefficients. A cet effet, considérons le terme du $(2n-1)^e$ degré, affecté de N; pour que l'hypothèse

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots = 0$$

l'annule, il faut qu'il soit divisible par la somme des corrections. Or, si nous essayions cette division, nous trouverions un caractère de divisibilité purement algébrique

(*voir* la note), savoir, qu'il faut

$$N' = n, \quad N'' = n\frac{(n-1)}{2}, \quad N''_1 = n(n-1), \quad N''' = n\frac{(n-1)}{2}\frac{(n-2)}{3};$$

$$N'''_1 = n\frac{(n-1)}{2}(n-2), \quad N'''_2 = n(n-1)(n-2), \quad \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs dans le terme du $2n^{\text{ième}}$ degré du développement du risque d'erreur, ce terme devient

$$N\left\{\begin{array}{l} \Delta_1^{2n} + \Delta_2^{2n} + \Delta_3^{2n} + \ldots + n(\Delta_1^{2n-2}\Delta_2^2 + \Delta_1^{2n-2}\Delta_3^2 + \ldots) \\ \quad + n\dfrac{(n-1)}{2}[\Delta_1^{2n-4}(\Delta_2^4 + \Delta_3^4 + \ldots + 2\Delta_2^2\Delta_3^2 + \ldots) + \Delta_2^{2n-4}(\Delta_1^4 + \ldots + \ldots \\ \quad + n\dfrac{(n-1)}{2}\dfrac{(n-2)}{3}\left[\begin{array}{l}\Delta_1^{2n-6}(\Delta_2^6 + 3\Delta_2^4\Delta_3^2 + 3\Delta_2^2\Delta_3^4 + 6\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4^2 + \ldots + \Delta_3^6 + \ldots \\ \qquad + \Delta_2^{2n-6}(\Delta_1^6 + 3\Delta_1^4\Delta_3^2 + \ldots + \ldots\end{array}\right] + \ldots \end{array}\right\};$$

c'est-à-dire, en le comparant au développement du binôme de Newton,

$$N(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots)^n.$$

Ce résultat transforme le développement du risque d'erreur en

$$A + B(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots) + C(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots)^2 + \ldots$$

ou

$$\Phi(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots).$$

D'abord nous reconnaissons à posteriori que cette expression satisfait toujours au cas particulier ci-dessus, pourvu que Φ soit une fonction continue, puisque la dérivée

$$\Phi'(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots) \times (2\Delta_1 + 2\Delta_2 + 2\Delta_3 + \ldots$$

s'annule quand la somme des corrections égale 0.

Ensuite nous remarquerons que, la fonction Φ devant être continue et croissante avec les variables, d'après la définition du risque d'erreur, elle croîtra et décroîtra en même temps que $(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots)$, et atteindra toujours son minimum pour les mêmes valeurs que cette somme de carrés; donc toutes les formes continues de

$$\Phi(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots)$$

sont aptes à représenter le risque d'erreur, et toutes donnent le même système de valeurs plausibles. Ainsi se trouve exprimé analytiquement le vague inhérent à la nature du problème proposé et à la définition du risque d'erreur, et nous voyons pourtant que ce vague ne nous empêche pas de résoudre le problème d'une manière certaine, en rendant un minimum l'expression très-simple $\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots$: de là le nom de la *méthode des moindres carrés*, que l'on appellerait plus exactement *méthode de la moindre somme des carrés*.

§ IV.

Influence de la précision des observations.

Nous avons remarqué déjà que les observations peuvent être de *précisions* diverses, et que cette circonstance change le mode de compensation; il est temps de voir comment la précision intervient dans les calculs, et de lui assigner une signification mathématique.

Il est clair que, dans le cas d'observations directes, également bonnes, d'une même inconnue, la valeur obtenue pour celle-ci par la moyenne arithmétique mérite plus de confiance qu'aucune des valeurs d'observation, et qu'elle en mérite d'autant plus que le nombre des observations est plus grand. Prenant donc pour type un système d'observations de très-peu de précision, les valeurs compensées résultant de 2, 3, 4,..., observations auront des précisions croissantes et chacune peu différente de la précédente; nous pourrons ainsi comparer, sous le rapport de la précision, la valeur donnée par une bonne observation à celle résultant de la moyenne d'un certain nombre g d'observations du premier système : ce nombre g est appelé *poids* ou *importance* de l'observation unique.

D'après cela, si nous avons à compenser des observations de précisions, et, par conséquent, d'importances différentes, nous voyons déjà un moyen de les réduire à une série d'observations toutes de la précision du système pris pour type. En effet, g_1 étant le poids de l'observation $v_1 = k_1$, cette observation est équivalente, par définition, à g_1 observations types

$$v_1 = z_1, \quad v_2 = z_2, \ldots, v_{g_1} = z_{g_1},$$

qui donneraient pour moyenne

$$\frac{1}{g_1}(z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_{g_1}) = k_1.$$

De cette façon, écrivant le risque d'erreur d'après le § III, on aurait, pour chaque observation réelle telle que $v_1 = k_1$, une somme de carrés de corrections de la forme

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots + \Delta_g^2 = (v_1 - z_1)^2 + (v_1 - z_2)^2 + \ldots + (v_1 - z_{g_1})^2,$$

qui devient

$$\begin{aligned} &g_1 v_1^2 - 2v_1(z_1 + z_2 + \ldots + z_{g_1}) + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \ldots + z_{g_1}^2 \\ &= g_1 v_1^2 - 2g_1 v_1 k_1 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \ldots + z_{g_1}^2 \\ &= g_1(v_1 - k_1)^2 + z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{g_1}^2 - g_1 k_1^2). \end{aligned}$$

Puisqu'il faut rendre la somme des carrés des corrections un minimum, en dispo-

sant des quantités $v_1, v_2, v_3, \ldots$, nous voyons que les quantités

$$(z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{g_1}^2 - g_1 k_1^2)$$

peuvent être négligées dans la solution; mais il y a plus, il faut les considérer comme nulles, ainsi que nous allons le faire voir de suite.

Nous voyons, en effet, que le risque d'erreur subit, par les variations de la correction $v_1 - k_1$, les mêmes variations que si l'on avait remplacé l'observation unique $v_1 - k_1$, de poids g_1, par une seule observation type telle que

$$v_1\sqrt{g_1} = k_1\sqrt{g_1};$$

il résulte de là que :

1°. L'augmentation du risque d'erreur provenant du terme

$$(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \ldots + z_{g_1}^2 - g_1 k_1^2)$$

est due simplement à ce que nous avons substitué à une observation, qui n'implique aucune impossibilité en elle-même, g_1 observations qui sont en contradiction entre elles; afin que cette substitution soit légitime, il faut que la contradiction disparaisse, ou que les valeurs hypothétiques $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{g_1}$, soient toutes égales entre elles et à k_1, ce qui donne

$$(z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{g_1}^2 - g_1 k_1^2) = 0.$$

2°. Une observation $v_1 = k_1$ de poids g_1 équivaut à une observation type

$$v_1\sqrt{g_1} = k_1\sqrt{g_1};$$

la correction $v_1 - k_1$ d'une observation de poids g_1 est donc $\sqrt{g_1}$ fois moindre que celle $v_1\sqrt{g_1} - k_1\sqrt{g_1}$ de l'observation type, et l'on peut dire que la précision est $\sqrt{g_1}$ fois plus grande.

Ainsi la *précision* d'une observation est proportionnelle à la racine carrée de son poids, et si nous prenons pour unité des précisions celle des observations types, nous aurons

$$h_1^2 = g_1.$$

Nous pouvons donc considérer la précision comme uniforme et égale à l'unité dans le problème général énoncé à la fin du § I, pourvu que nous substituions aux observations réelles des observations fictives de fonctions

$$v_1\sqrt{g_1}, \quad v_2\sqrt{g_2}, \quad v_3\sqrt{g_3}, \ldots, \quad \text{ou} \quad h_1 v_1, \quad h_2 v_2, \quad h_3 v_3, \ldots$$

qui auraient donné des valeurs $h_1 k_1$, $h_2 k_2$, $h_3 k_3, \ldots$; désignant alors par

$$\delta_1 = h_1 \Delta_1, \quad \delta_2 = h_2 \Delta_2, \quad \delta_3 = h_3 \Delta_3, \ldots,$$

les corrections à faire à ces nouvelles observations, tous les raisonnements des paragraphes précédents deviendront applicables, et le système des valeurs compensées sera celui qui donnera un minimum pour $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots + \delta_n^2$.

C'est ici le lieu d'introduire une notion encore, qui nous sera utile plus tard. Représentons un instant par E l'erreur fortuite, variable, d'une observation; cette erreur étant due à la rencontre de certaines circonstances, se reproduira chaque fois que les mêmes causes se présenteront ensemble; d'après cela, si le nombre des combinaisons qui amènent l'erreur E est à celui de toutes les combinaisons également possibles comme $1 : \varpi$, nous devons présumer que, sur p observations, il y en aura $\frac{p}{\varpi}$ égales à E, et cette présomption sera d'autant plus fondée que le nombre p sera plus considérable; de la sorte, les sommes des erreurs des p observations, de leurs carrés, de leurs cubes, etc., seront

$$\sum\left(\frac{p}{\varpi}\mathrm{E}\right),\quad \sum\left(\frac{p}{\varpi}\mathrm{E}^2\right),\quad \sum\left(\frac{p}{\varpi}\mathrm{E}^3\right),\quad \text{etc.},$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs correspondantes de E et de ϖ. Les moyennes des erreurs, de leurs carrés, de leurs cubes, etc., seront donc

$$\frac{1}{p}\sum\left(\frac{p}{\varpi}\mathrm{E}\right),\quad \frac{1}{p}\sum\left(\frac{p}{\varpi}\mathrm{E}^2\right),\quad \frac{1}{p}\sum\left(\frac{p}{\varpi}\mathrm{E}^3\right),\quad \text{etc.},$$

ou

$$\sum\left(\frac{\mathrm{E}}{\varpi}\right),\quad \sum\left(\frac{\mathrm{E}^2}{\varpi}\right),\quad \sum\left(\frac{\mathrm{E}^3}{\varpi}\right),\quad \text{etc.};$$

ces résultats n'approchant toutefois de la vérité qu'à mesure que p augmente, ainsi qu'il est dit plus haut. Ainsi, dans une série nombreuse d'observations, ces moyennes ne dépendent pas du nombre de celles-ci, mais seulement des erreurs E et des rapports ϖ, c'est-à-dire des moyens d'observation employés; ou bien encore, ces moyennes sont sensiblement constantes pour des observations d'égale origine, prises en nombre assez grand. Comme la forme de la fonction représentant le risque d'erreur nous conduit naturellement à la considération des carrés des erreurs, nous prendrons note particulièrement de la moyenne des carrés des erreurs d'une série nombreuse d'observations : on est convenu d'appeler *erreur moyenne*, l'erreur dont le carré est égal à la moyenne susdite.

Cela posé, nous prendrons, pour plus de simplicité, pour observations types, ou de poids et de précision $= 1$, celles dont l'erreur moyenne est une unité ($0'',01$ ou $0^{m},0001$, ou toute autre unité que l'on voudra); mais une série d'observations de précision h_1 est équivalente à une série d'observations types donnant lieu à des erreurs h_1 fois plus grandes; la somme des carrés des erreurs du deuxième système sera donc h_1^2 fois la somme des carrés des erreurs du premier, et les moyennes de ces carrés seront dans le même rapport : il en résulte que l'erreur moyenne des observations de précision 1 est h_1 fois supérieure à celle des observations de précision h_1; cette dernière erreur moyenne est donc $\frac{1}{h_1}$, ou, représentant par m_1 l'erreur moyenne correspon-

dante à une précision h_1,

$$m_1 = \frac{1}{h_1}, \quad m_1 h_1 = 1.$$

§ V.

Calcul des valeurs les plus plausibles des inconnues.

Les valeurs les plus plausibles des inconnues doivent satisfaire, d'après ce qui précède, à l'équation

$$\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots = \text{min.};$$

dans cette équation, à vrai dire, entrent les précisions h_1, h_2, $h_3, \ldots$, que nous n'avons encore aucun moyen d'évaluer; mais nous les considérerons comme connues dans ce paragraphe, et, par suite, nos calculs seront au moins directement applicables au cas où $h_1 = h_2 = h_3 =$ etc., permet de faire abstraction de la précision : ils seront applicables au cas général, du moment que nous saurons mesurer les précisions.

Nous avons p équations de la forme

$$\delta = h\Delta = hv - hk = hf(x, y, z, \ldots) - hk,$$

et i de la forme

$$0 = F(x, y, z, \ldots).$$

Lorsque ces équations ne sont pas linéaires, les calculs auxquels elles donnent lieu deviennent impraticables; on doit les transformer comme il suit : dans les i équations nécessaires

$$0 = F(x, y, z, \ldots),$$

que nous désignerons abréviativement par

$$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i,$$

et dans $q - i$ des équations approchées

$$f(x, y, z, \ldots) = k,$$

on détermine pour $x, y, z, \ldots$, des valeurs approchées $x_1, y_1, z_1, \ldots$; de sorte que l'on a

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2, \quad z = z_1 + z_2, \quad \text{etc.},$$

x_2, y_2, z_2 étant des différences inconnues, mais petites. Le théorème de Taylor donne maintenant, en négligeant les carrés de ces différences, et en représentant par $f'_x, f'_y, f'_z, \ldots$, les dérivées de la fonction f par rapport à $x, y, z, \ldots$,

$$\delta = hf(x_1, y_1, z_1, \ldots) - hk + hf'_x(x_1, y_1, z_1, \ldots)x_2$$

$$+ hf'_y(x_1, y_1, z_1, \ldots)y_2 + hf'_z(x_1, y_1, z_1, \ldots)z_2 + \ldots;$$

cette expression peut être écrite sous la forme

$$\delta = n + ax_2 + by_2 + cz_2 + \ldots.$$

Les équations nécessaires peuvent de même être ramenées à la forme linéaire. Il en résulte qu'en abandonnant les inconnues primitives pour d'autres dont elles dépendent immédiatement et d'une manière connue, on peut toujours n'avoir à faire qu'à des équations linéaires. De plus, si la suite des calculs donnait, pour les différences x_2, y_2, z_2, des valeurs assez grandes pour que l'on pût regarder l'omission de leurs carrés comme nuisible à l'exactitude requise, on reprendrait les calculs en mettant pour $x, y, z, \ldots,$

$$x_1 + x_2 + x_3, \quad y_1 + y_2 + y_3, \quad z_1 + z_2 + z_3, \ldots,$$

et cette fois on serait certain d'avance que les valeurs de x_3, y_3, z_3 sont très-petites.

Nous n'avons donc jamais qu'à traiter un système de la forme

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= n_1 + a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots,\\
\delta_2 &= n_2 + a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\delta_p &= n_p + a_p x + b_p y + c_p z + \ldots,\\
0 = \theta_1 &= N_1 + A_1 x + B_1 y + C_1 z + \ldots,\\
0 = \theta_2 &= N_2 + A_2 x + B_2 y + C_2 z + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 = \theta_i &= N_i + A_i x + B_i y + C_i z + \ldots\\
\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots &+ \delta_p^2 = \text{minimum}.
\end{aligned}$$

Commençons par développer $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \ldots$, en substituant pour $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$ leurs valeurs. Nous avons pour coefficient de x^2, dans la somme des carrés des corrections,

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots a_p^2;$$

pour coefficient de xy,

$$2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots a_p b_p).$$

Afin de réduire ces développements, nous admettons la notation généralement en usage chez les auteurs allemands pour désigner une somme de termes analogues. D'après cette notation, (aa) représente la somme des produits aa depuis le premier $a_1 a_1$ jusqu'au dernier $a_p a_p$; (ab) est la somme des produits ab depuis le premier $a_1 b_1$ jusqu'au dernier $a_p b_p$; et ainsi de suite. De même, $(\delta\delta)$ est la somme des carrés des corrections; $(a\delta)$ est la somme des produits de chaque correction par le coefficient de x dans cette correction, etc. Le développement susdit devient maintenant

$$\begin{aligned}
(\delta\delta) = (nn) + 2(an)x + (aa)x^2 + 2(bn)y + 2(ab)xy + (bb)y^2 + 2(cn)z\\
+ 2(ac)xz + 2(bc)yz + (cc)z^2 + \ldots.
\end{aligned}$$

Il faut rechercher les valeurs des q inconnues qui rendent $(\delta\delta)$ un minimum, tout en satisfaisant aux i équations $\theta = 0$; nous pouvons donc poser encore $q - i$ équations entre les inconnues pour arriver au minimum; mais la forme de $(\delta\delta)$ permet de déterminer celui-ci aisément, en séparant ce développement en une somme de q carrés (à cause des q carrés x^2, y^2, z^2, ...), plus un terme constant; dès lors le minimum est atteint évidemment, si les q termes variables et additifs de $(\delta\delta)$ peuvent s'annuler séparément. Or, nous ne pouvons disposer que de $q - i$ inconnues; il faut donc faire entrer dans les q carrés i constantes arbitraires K_1, K_2, K_3, ..., K_i, que nous déterminerons de façon à rendre les q conditions de nullité compatibles : ces constantes, entrant dans les carrés, seront multipliées dans le développement de $(\delta\delta)$ par les premières puissances des inconnues. Afin que ces termes nouveaux, contenant les inconnues, n'altèrent pas la valeur de $(\delta\delta)$, nous multiplierons respectivement θ_1 par K_1, θ_2 par K_2, θ_3 par K_3, etc.; et alors, comme

$$\theta_1 K_1 = 0, \quad \theta_2 K_2 = 0, \quad \theta_3 K_3 = 0, \ldots,$$

la somme des i produits est

$$(\theta K) = 0,$$

et nous pourrons écrire

$$(\delta\delta) = (\delta\delta) + (\theta K).$$

Ainsi, nous ajouterons au développement précédent de $(\delta\delta)$, et sans changer ses *valeurs possibles*, les termes

$$(NK) + (AK)x + (BK)y + (CK)z + \ldots.$$

Cela posé, effectuons la séparation de $(\delta\delta) + (\theta K)$ en carrés. Réunissant d'abord tous les termes en x, savoir :

$$(AK)x + 2(an)x + (aa)x^2 + 2(ab)xy + 2(ac)xz + 2(ad)xu + \ldots,$$

nous voyons qu'ils appartiennent au développement du carré de

$$\frac{1}{\sqrt{(aa)}}\left[\frac{1}{2}(AK) + (an) + (aa)x + (ab)y + (ac)z + (ad)u + \ldots\right],$$

ou

$$\frac{1}{\sqrt{(aa)}}\left[\frac{1}{2}(AK) + (a\delta)\right],$$

et qu'il manque, pour compléter le carré, les termes

$$\frac{1}{(aa)}\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{4}(AK)^2 + (AK)(an) + (an)^2 + (AK)(ab)y + 2(an)(ab)y + (ab)^2y^2 \\ \quad + (AK)(ac)z + 2(an)(ac)z + 2(ab)(ac)yz + (ac)^2z^2 \\ \quad + (AK)(ad)u + 2(an)(ad)u + 2(ab)(ad)yu + 2(ac)(ad)zu \\ \quad + (ad)^2u^2 + \ldots\end{array}\right\}.$$

Nous pouvons donc écrire

$$
\begin{aligned}
\delta\delta + (\delta K)^2 = {} & \left[\frac{\frac{1}{2}(AK) + (a\delta)}{\sqrt{(aa)}}\right]^2 + (NK) - \frac{(AK)^2}{4(aa)} - \frac{(AK)(an)}{(aa)} + (nn) - \frac{(an)^2}{(aa)} \\
& + \left[(BK) - \frac{(ab)}{(aa)}(AK)\right] y + 2\left[(bn) - \frac{(ab)}{(aa)}(an)\right] y + \left[(bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)}\right] y^2 \\
& + \left[(CK) - \frac{(ac)}{(aa)}(AK)\right] z + 2\left[(cn) - \frac{(ac)}{(aa)}(an)\right] z + 2\left[(bc) - \frac{(ab)(ac)}{(aa)}\right] yz \\
& + \left[(cc) - \frac{(ac)^2}{(aa)}\right] z^2 + \left[(DK) - \frac{(ad)}{(aa)}(AK)\right] u + 2\left[(dn) - \frac{(ad)}{(aa)}(an)\right] u \\
& + 2\left[(bd) - \frac{(ab)(ad)}{(aa)}\right] yu + 2\left[(cd) - \frac{(ac)(ad)}{(aa)}\right] zu \\
& + \left[(dd) - \frac{(ad)^2}{(aa)}\right] u^2 + \ldots
\end{aligned}
$$

Ce développement s'abrège considérablement si nous étudions la valeur des coefficients tels que

$$(nn) - \frac{(an)^2}{(aa)}, \quad (bn) - \frac{(ab)}{(aa)}(an),$$

$$(bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)}, \quad (cn) - \frac{(ac)}{(aa)}(an), \quad (bc) - \frac{(ab)(ac)}{(aa)}, \quad \text{etc.};$$

le premier se transforme comme suit :

$$
\begin{aligned}
& (nn) - \frac{(an)^2}{(aa)} \\
& = \frac{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + \ldots)(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots) - (a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 + \ldots)^2}{(aa)} \\
& = \frac{\left(\begin{array}{l} a_1^2 n_1^2 + a_2^2 n_2^2 + a_3^2 n_3^2 + \ldots + a_2^2 n_1^2 + \overline{a_1^2 n_2^2} + a_3^2 n_2^2 + \ldots + a_3^2 n_1^2 + a_3^2 n_2^2 + \overline{a_3^2 n_3^2} + \ldots \\ - \overline{a_1^2 n_1^2} - 2a_1 a_2 n_1 n_2 - \overline{a_2^2 n_2^2} - 2a_1 a_3 n_1 n_3 - 2a_2 a_3 n_2 n_3 - \overline{a_3^2 n_3^2} - \ldots \end{array}\right)}{(aa)} \\
& = \frac{(a_1 n_2 - a_2 n_1)^2 + (a_1 n_3 - a_3 n_1)^2 + (a_2 n_3 - a_3 n_2)^2 + \ldots}{(aa)},
\end{aligned}
$$

et le second devient

$$
\begin{aligned}
& (bn) - \frac{(ab)}{(aa)}(an) \\
& = \frac{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots)(b_1 n_1 + b_2 n_2 + b_3 n_3 + \ldots) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \ldots)(a_1 n_1 + a_2 n_2 + a_3 n_3 + \ldots)}{(aa)} \\
& = \frac{\left(\begin{array}{l} \overline{a_1^2 b_1 n_1} + a_1^2 b_2 n_2 + a_1^2 b_3 n_3 + \ldots + a_2^2 b_1 n_1 + \overline{a_2^2 b_2 n_2} + a_2^2 b_3 n_3 + \ldots + a_3^2 b_1 n_1 + a_3^2 b_2 n_2 + \overline{a_3^2 b_3 n_3} + \ldots - \overline{a_1^2 b_1 n_1} \\ - a_1 a_2 b_1 n_2 - a_1 a_2 b_2 n_1 - \ldots - a_1 a_2 b_2 n_1 - \overline{a_2^2 b_2 n_2} - a_2 a_3 b_2 n_3 - \ldots - a_1 a_3 b_3 n_1 - a_2 a_3 b_3 n_2 - \overline{a_3^2 b_3 n_3} - \ldots \end{array}\right)}{(aa)} \\
& = \frac{(a_1 b_2 - a_2 b_1)(a_1 n_2 - a_2 n_1) + (a_1 b_3 - a_3 b_1)(a_1 n_3 - a_3 n_1) + (a_2 b_3 - a_3 b_2)(a_2 n_3 - a_3 n_2) + \ldots}{(aa)}.
\end{aligned}
$$

de même, on a

$$(bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)} = \frac{(a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + \cdots}{(aa)},$$

$$(cn) - \frac{(ac)}{(aa)}(an)$$

$$= \frac{(a_1c_2 - a_2c_1)(a_1n_2 - a_2n_1) + (a_1c_3 - a_3c_1)(a_1n_3 - a_3n_1) + (a_2c_3 - a_3c_2)(a_2n_3 - a_3n_2) + \cdots}{(aa)}.$$

Il survient donc une grande simplification si nous posons

$$\frac{a_1n_2 - a_2n_1}{\sqrt{(aa)}} = n'_1, \quad \frac{a_1n_3 - a_3n_1}{\sqrt{(aa)}} = n'_2, \quad \frac{a_2n_3 - a_3n_2}{\sqrt{(aa)}} = n'_3, \ldots,$$

$$\frac{a_1b_2 - a_2b_1}{\sqrt{(aa)}} = b'_1, \quad \frac{a_1b_3 - a_3b_1}{\sqrt{(aa)}} = b'_2, \quad \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{\sqrt{(aa)}} = b'_3, \ldots,$$

$$\frac{a_1c_2 - a_2c_1}{\sqrt{(aa)}} = c'_1, \quad \frac{a_1c_3 - a_3c_1}{\sqrt{(aa)}} = c'_2, \quad \frac{a_2c_3 - a_3c_2}{\sqrt{(aa)}} = c'_3, \ldots;$$

car nous avons alors

$$(nn) - \frac{(an)^2}{(aa)} = n'^2_1 + n'^2_2 + n'^2_3 + \ldots = (n'n'),$$

$$(bn) - \frac{(ab)}{(aa)}(an) = (b'n'), \quad (bb) - \frac{(ab)^2}{(aa)} = (b'b'),$$

$$(cn) - \frac{(ac)}{(aa)}(an) = (c'n'), \quad \text{etc.}$$

Représentons encore par des abréviations les expressions suivantes, savoir :

$$\frac{\frac{1}{2}(\mathrm{AK}) + (a\delta)}{\sqrt{(aa)}} = \alpha, \quad (\mathrm{NK}) - \frac{(an)}{(aa)}(\mathrm{AK}) - \frac{(\mathrm{AK})^2}{4(aa)} = \mathrm{N}',$$

$$(\mathrm{BK}) - \frac{(ab)}{(aa)}(\mathrm{AK}) = \mathrm{B}', \quad (\mathrm{CK}) - \frac{(ac)}{(aa)}(\mathrm{AK}) = \mathrm{C}', \quad (\mathrm{DK}) - \frac{(ad)}{(aa)}(\mathrm{AK}) = \mathrm{D}', \ldots;$$

et il vient enfin

$$\begin{aligned}(\delta\delta) + (\theta\mathrm{K}) = {} & \alpha^2 + \mathrm{N}' + (n'n') + \mathrm{B}'y + 2(b'n')y + (b'b')y^2 \\ & + \mathrm{C}'z + 2(c'n')z + 2(b'c')yz + (c'c')z^2 + \mathrm{D}'u + 2(d'n')u \\ & + 2(b'd')yu + 2(c'd')zu + (d'd')u^2 + \ldots.\end{aligned}$$

Or ce développement, à part α^2, est exactement analogue au développement primitif

de $(\delta\delta) + (\theta K)$; posons donc, semblablement à ce qui a été fait plus haut,

$$\delta'_1 = n'_1 + b'_1 y + c'_1 z + d'_1 u + \ldots,$$
$$\delta'_2 = n'_2 + b'_2 y + c'_2 z + d'_2 u + \ldots,$$
$$\delta'_3 = n'_3 + b'_3 y + c'_3 z + d'_3 u + \ldots,$$
$$\frac{b'_1 n'_2 - b'_2 n'_1}{\sqrt{(b'b')}} = n''_1, \quad \frac{b'_1 n'_3 - b'_3 n'_1}{\sqrt{(b'b')}} = n''_2,$$
$$\frac{b'_1 c'_2 - b'_2 c'_1}{\sqrt{(b'b')}} = c''_1, \quad \frac{b'_1 c'_3 - b'_2 c'_1}{\sqrt{(b'b')}} = c''_2,$$
$$\frac{b'_1 d'_2 - b'_2 d'_1}{\sqrt{(b'b')}} = d''_1, \quad \frac{b'_1 d'_3 - b'_3 d'_1}{\sqrt{(b'b')}} = d''_2,$$
$$\frac{B' + b'\delta'}{\sqrt{(b'b')}} = \xi', \quad N' - \frac{(b'n')}{(b'b')} B' = \frac{B'^2}{4(b'b')} = N'',$$
$$C' - \frac{(b'c')}{(b'b')} B' = C'', \quad D' - \frac{(b'd')}{(b'b')} B' = D'', \ \ldots,$$

et nous avons

$$(\delta\delta) + (\theta K) = \alpha^2 + (\delta'\delta') + N' + B' y + C' z + D' u + \ldots$$
$$= \alpha^2 + \beta'^2 + (\delta''\delta'') + N'' + C'' z + D'' u + \ldots.$$

En continuant ces transformations, nous verrions nécessairement encore disparaître une nouvelle inconnue à la séparation de chaque nouveau carré γ''^2, δ'''^2, ..., analogue à α^2 et à β'^2; de façon qu'après le $q^{\text{ième}}$ carré, toutes les inconnues seraient épuisées; il ne resterait que $[(\delta^{(q)}\delta^{(q)})] + N^{(q)}$, et la parenthèse $[(\delta^{(q)}\delta^{(q)})]$ se réduirait elle-même à $[(n^{(q)}n^{(q)})]$. Si donc nous nous bornons ici au cas de cinq inconnues, pour ne pas trop compliquer les notations, nous pouvons écrire

$$(\delta\delta) + (\theta K) = \alpha^2 + \beta'^2 + \gamma''^2 + \delta'''^2 + \varepsilon^{IV2} + (n^V n^V) + N^V.$$

Observons maintenant que le développement de $(\delta\delta) + (\theta K)$ est égal à $(\delta\delta)$ pour tous les *systèmes possibles* de valeurs de $x, y, z, \ldots$, quelques valeurs constantes arbitraires que nous adoptions pour $K_1, K_2, K_3, \ldots$, et que tous les termes α^2, β'^2, $\gamma''^2, \ldots$, ayant pour numérateurs des carrés et pour dénominateurs des sommes de carrés (aa), $(b'b')$, $(c''c'')$, ..., sont essentiellement additifs; il en résulte que, pour tous les systèmes de valeurs de K, le minimum de $(\delta\delta)$ ou $(\delta\delta) + (\theta K)$ sera le même et correspondra à la moindre valeur de

$$\alpha^2 + \beta'^2 + \gamma'' + \delta''' + \varepsilon^{IV2},$$

et que, s'il est un système de valeurs de K qui permette d'avoir

$$\alpha^2 + \beta'^2 + \gamma''^2 + \delta'''^2 + \varepsilon^{IV} = 0,$$

ce seront les valeurs de x, y, z, u, t, satisfaisant à cette équation, qui donneront le

minimum pour $(\delta\delta)$. Mais cette équation se décompose nécessairement en q autres; de sorte que les valeurs les plus plausibles de x, y, z, u, t devront satisfaire à q équations de condition

$$\alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma'' = 0, \quad \vartheta'' = 0, \quad \varepsilon^{\text{IV}} = 0.$$

Reste à voir si ces valeurs sont possibles, c'est-à-dire si elles vérifient les équations $\theta = 0$; mais puisque nous pouvons disposer de q inconnues x, y, z, ..., et de i arbitraires K_1, K_2, K_3 pour satisfaire les q équations de condition et les i équations nécessaires, le problème est généralement soluble et déterminé. Ajoutons que $(n^{\text{V}} n^{\text{V}})$ est positif et invariable; ainsi l'hypothèse possible de

$$K_1 = K_2 = K \quad = \ldots = 0,$$

donnant

$$(NK) = 0, \quad (AK) = 0, \quad (BK) = 0, \quad (CK) = 0, \ldots,$$
$$N' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = 0, \ldots, \quad N'' = 0, \quad C'' = 0, \ldots, \quad N^{\text{V}} = 0,$$

montre que le minimum de $(\delta\delta)$ est plus grand que $(n^{\text{V}} n^{\text{V}})$; par conséquent, pour les valeurs de x, y, z, u, t, K_1, K_2, K_3, ..., qui font

$$\alpha = \beta' = \gamma'' = \vartheta''' = \varepsilon^{\text{IV}} = 0,$$

N^{V} est nécessairement positif; si cela n'était pas, la disparition des carrés pourrait ne pas correspondre au minimum absolu de $(\delta\delta) + (\theta K)$.

Pour arriver à la solution des $q + i$ équations, remarquons que les expressions α, β', γ'', ϑ''', ε^{IV} contiennent, outre les arbitraires K_1, K_2, K_3, ..., la première, les inconnues x, y, z, u, t; la deuxième, y, z, u, t seulement; la troisième, z, u, t; la quatrième, u, t; la cinquième, t; de plus, elles sont linéaires. On trouve donc immédiatement, par $\varepsilon^{\text{IV}} = 0$, t en fonction des arbitraires; puis u par $\vartheta''' = 0$ et par la substitution de t; z par $\gamma'' = 0$ et par la substitution de t et de u; y et x de même. Mettant ces valeurs dans les équations linéaires $\theta = 0$, il vient i équations linéaires entre les i arbitraires. Les Allemands appellent les arbitraires *corrélats* (korrelaten), et les i dernières équations, *équations aux corrélats;* les arbitraires sont aisément calculées en nombres dans ces équations, et leur substitution dans les expressions de x, y, z, u, t donne enfin les valeurs les plus plausibles des inconnues.

Examinons encore, pour terminer ce paragraphe, si cette série de calculs indiqués peut échouer devant une impossibilité, soit absurdité, soit indétermination.

Dans la première partie des calculs, savoir la séparation de $(\delta\delta)$ en carrés, on ne peut être arrêté que parce que l'une des expressions n'_1, n'_2, n'_3, ..., b'_1, b'_2, b'_3, ..., c'_1, c'_2, c'_3, ..., α, N''_1, B'_1, C'_1, ..., n''_1, n''_2, ..., c''_1, c''_2, ..., N'', C'', D'', ..., devient infinie ou indéterminée; ce qui exige, en tous cas,

$$(aa) = 0, \quad \text{ou} \quad (b'b') = 0, \quad \text{ou} \quad (c''c'') = 0, \quad \text{etc.};$$

c'est-à-dire, à la fois,

$$a_1 = 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \ldots, \quad \text{ou} \quad b'_1 = 0, \quad b'_2 = 0, \quad b'_3 = 0, \ldots,$$

ou

$$c''_1 = c''_2 = c''_3 = 0, \ldots.$$

1°. $$a_1 = a_2 = a_3 = 0$$

suppose que les observations sont indépendantes de x; alors x est une inconnue en dehors des observations, qui doit être éliminée entre les équations $\theta = 0$: ce premier cas ne peut donc se présenter.

2°. $$b'_1 = b'_2 = b'_3 = 0$$

ou

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 b_3 - a_3 b_1 = \ldots = 0$$

donne

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \text{etc.},$$

et fait disparaître simultanément dans $(\partial\partial)$, lors de la séparation du carré α, tous les termes en y, sauf $B'y$; passant immédiatement à la séparation du carré en z, t, u, l'impossibilité est évitée, et il vient

$$(\partial\partial) = \alpha^2 + B'y + \gamma''^2 + \mathcal{S}'''^2 + \varepsilon^{IV} + (n^V n^V) + N^V.$$

Disposant alors d'une des arbitraires pour faire $B' = 0$, il ne reste que $q - 1$ équations de condition et i équations nécessaires pour déterminer q inconnues et $i - 1$ arbitraires; ainsi le problème est encore soluble, et, du reste,

$$\alpha = 0, \quad \gamma'' = 0, \quad \mathcal{S}''' = 0, \quad \varepsilon^{IV} = 0$$

donneront bien le minimum de

$$(\partial\partial) = \alpha^2 + \gamma''^2 + \mathcal{S}'''^2 + \varepsilon^{IV2} + (n^V n^V) + N^V.$$

Si pourtant il n'y avait pas d'équation nécessaire, il n'y aurait pas d'arbitraires, et il viendrait simplement

$$(\partial\partial) = \alpha^2 + \gamma''^2 + \mathcal{S}'''^2 + \varepsilon^{IV} + (n^V n^V),$$

ce qui exigerait, pour le minimum,

$$\alpha = 0, \quad \gamma'' = 0, \quad \mathcal{S}''' = 0, \quad \varepsilon^{IV} = 0;$$

ainsi on trouverait t, puis u, puis z; mais l'équation pour déterminer y manquerait, et l'on aurait, par $\alpha = 0$, x en fonction de y indéterminé. Cela prouverait que les observations faites ne peuvent pas déterminer x et y; en effet, comme

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = \text{etc.},$$

on ne pourrait même obtenir des valeurs approchées pour ces inconnues au moyen des équations approchées, car, dans l'élimination, x et y disparaîtraient toujours ensemble.

3°. $$c''_1 = c''_2 = c''_3 = \ldots = 0$$

change les équations de condition en

$$\alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad C'' = 0, \quad \mathcal{S}'' = 0, \quad \varepsilon^{\text{IV}} = 0$$

sans amener d'impossibilité. Ce cas est entièrement analogue au précédent ; il donne

$$b'_1 : c'_1 = b'_2 : c'_2 = b'_3 : c'_3 = \ldots;$$

ou, en désignant par λ ce rapport constant,

$$b'_1 = c'_1 \lambda, \quad b'_2 = \lambda c'_2, \quad \text{etc.}$$

La substitution des valeurs de $b'_1, c'_1, b'_2, c'_2, \ldots$, dans ces équations donne

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_1 \lambda c_2 - a_2 \lambda c_1, \quad a_1 b_3 - a_3 b_1 = a_1 \lambda c_3 - a_3 \lambda c_1, \quad \text{etc.},$$

ou

$$a_1 (b_2 - \lambda c_2) = a_2 (b_1 - \lambda c_1), \quad a_1 (b_3 - \lambda c_3) = a_3 (b_1 - \lambda c_1), \quad \text{etc.},$$

ou encore

$$a_1 : (b_1 - \lambda c_1) = a_2 : (b_2 - \lambda c_2) = a_3 : (b_3 - \lambda c_3) = \ldots;$$

soit

$$a_1 : (b_1 - \lambda c_1) = \mu,$$

d'où

$$a_1 = \mu b_1 - \lambda \mu c_1, \quad \delta_1 = b_1 (y + \mu x) + c_1 (z - \lambda \mu x) + d_1 u + \ldots,$$
$$\delta_2 = b_2 (y + \mu x) + c_2 (z - \lambda \mu x) + d_2 u + \ldots.$$

Cette forme d'équations montre à l'évidence qu'elles ne peuvent servir qu'à la détermination des inconnues composées $y + \mu x$, $z - \lambda \mu x$, u, $t, \ldots$, et, par conséquent, que x, y, z resteront indéterminées numériquement.

Il résulte de tout cela que si ce cas présente, comme le précédent, une indétermination lorsqu'il n'y a pas d'équations nécessaires, c'est à cause de certaines relations entre les coefficients de $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots$, relations qui mettent un obstacle analogue à la détermination approchée des inconnues.

Il est inutile de pousser plus loin cette discussion, pour prouver que la méthode ne peut être en défaut que lorsque les observations sont essentiellement insuffisantes.

La deuxième partie des calculs, c'est-à-dire la résolution des équations aux corrélats, est évidemment possible quand les équations nécessaires sont compatibles : ces deux systèmes d'équations sont au fond identiques, à cause de l'intime liaison des valeurs des inconnues et de celles des corrélats, qui peuvent s'exprimer les unes par les autres en fonctions linéaires.

§ VI.

Calcul des précisions.

En commençant ce paragraphe, rappelons que le § II suppose explicitement que les valeurs données par l'observation, ou plutôt les erreurs de ces valeurs, sont indépen-

dantes; c'est-à-dire que si, à la vérité, les valeurs exactes sont liées entre elles par leurs expressions en fonction d'un nombre restreint d'inconnues, les valeurs approchées n'ont cependant pas été déduites les unes des autres, mais bien déterminées isolément et successivement. D'après cela, si nous possédons un système de valeurs approchées pour certaines quantités, il ne peut être assimilé à un système d'observations que pour autant que ces valeurs n'aient pas été déduites les unes des autres.

Les équations de condition

$$\alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma'' = 0, \ldots,$$

sont la transformation ou la réalisation de la condition du minimum, et doivent exister simultanément, chacune contribuant d'ailleurs séparément à cette réalisation et devant être satisfaite au même titre que les autres; ces q équations peuvent donc être considérées comme résultant d'un système d'observations indépendantes de $\alpha, \beta', \gamma'', \ldots$ Or, le risque d'erreur d'un système quelconque de corrections possibles faites aux observations réelles est

$$\Phi(\delta\delta) = \Phi[\alpha^2 + \beta'^2 + \gamma''^2 + \ldots + (n^s n^s) + N^s];$$

ce risque d'erreur est le même que celui d'un système de corrections faites à q observations

$$\alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma'' = 0, \ldots,$$

et à $p - q$ autres observations

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = 0, \ldots,$$

toutes de précision $= 1$, pourvu que

$$\omega\omega^s = (n^s n^s) + N^s.$$

Les deux systèmes de p observations sont donc équivalents, et de là nous tirons les deux conclusions suivantes :

1°. Les valeurs

$$\alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma'' = 0, \ldots,$$

qui nous sont données indépendamment l'une de l'autre par le système d'observations proposé

$$v_1 = k_1, \quad v_2 = k_2, \quad v_3 = k_3, \ldots,$$

sont déterminées de la même façon que par des observations de précision $= 1$.

2°. Le système fictif d'observations de $\alpha, \beta', \gamma'', \ldots$, n'est pas complétement identique avec le système proposé, à cause du moindre nombre d'observations qu'il contient ou de la différence de p et q. Il donne lieu à une différence dans le risque d'erreur, différence qui devient constante quand il n'y a pas d'équation nécessaire, c'est-à-dire quand i des inconnues ont été originairement éliminées; car alors il n'y a pas de corrélats, et nous avons

$$N^s = 0.$$

Comme nous avons, dans ce cas,

$$\delta^2 + \delta_1^2 + \delta_2^2 + \ldots + \delta_p^2 = \alpha^2 + \beta'^2 + \gamma''^2 + \ldots + (n^s n^s).$$

quelles que soient les valeurs mises pour $x, y, z, \ldots$, il en résulte que si nous pouvions donner aux inconnues leurs valeurs vraies, $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots, \delta_p, \alpha, \beta', \gamma'', \ldots$, deviendraient les erreurs vraies des valeurs $0, 0, 0, \ldots, 0, 0, 0, 0, \ldots$, déterminées pour toutes ces fonctions avec une précision uniforme $= 1$; la moyenne des carrés de ces erreurs vraies serait donc sensiblement $= 1$ (§ IV); de sorte que

$$(\delta\delta) = p, \quad \alpha^2 + \beta'^2 + \gamma''^2 + \ldots = q - i$$

(l'élimination de i des inconnues a réduit leur nombre et celui des fonctions $\alpha, \beta', \gamma'', \ldots$, à $q - i$). Or la somme $(n^{\text{v}} n^{\text{v}})$ est constante, et par suite, quoique nous ne puissions jamais découvrir les valeurs vraies des inconnues, nous n'en voyons pas moins que nous devons toujours avoir

$$(n^{\text{v}} n^{\text{v}}) = p - q + i;$$

$(n^{\text{v}} n^{\text{v}})$ est d'ailleurs la valeur minimum de $(\delta\delta)$ ou ce que devient cette somme après la substitution, pour les inconnues, de leurs valeurs les plus plausibles.

D'après cette deuxième conclusion, nous voyons que si nous faisons une série de p observations de précision uniforme $= h$, nous pouvons d'abord trouver les valeurs les plus plausibles des inconnues, conformément au premier alinéa du § V; ensuite, désignant par $\Delta'_1, \delta'_1, \Delta'_2, \delta'_2, \Delta'_3, \delta'_3, \ldots$, les résultats de la substitution de ces valeurs dans $\Delta_1, \delta_1, \Delta_2, \delta_2, \Delta_3, \delta_3, \ldots$, nous avons

$$(\delta'\delta') = h^2 (\Delta'\Delta') = p - q + i;$$

de là nous déduisons

$$h = \sqrt{\frac{p - q + i}{(\Delta'\Delta')}} \quad \text{et} \quad m = \frac{1}{h} = \sqrt{\frac{(\Delta'\Delta')}{p - q + i}},$$

formules qui donnent le moyen de calculer la précision et l'erreur moyenne d'un système d'observations également bonnes.

Ainsi, en traitant séparément chaque série d'observations d'égale précision, nous pouvons connaître tous les coefficients $h_1, h_2, h_3, \ldots$, entrant dans $(\delta\delta)$, ce qui rend possible la résolution du problème général de la compensation. Il reste à déterminer enfin les précisions des résultats de cette compensation.

A cet effet, observons que la première des deux conclusions ci-dessus nous apprend que les valeurs

$$\alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma'' = 0, \quad \text{etc.},$$

ont une précision $= 1$, et peuvent être considérées comme indépendantes les unes des autres; d'autre part, nous avons (§ V)

$$z^{\text{IV}} = \frac{\frac{1}{2} \text{E}^{\text{IV}} + (e^{\text{IV}} \delta^{\text{IV}})}{\sqrt{(e^{\text{IV}} e^{\text{IV}})}}$$

et

$$\delta_1^{\text{IV}} = n_1^{\text{IV}} + e_1^{\text{IV}} t, \quad \delta_2^{\text{IV}} = n_2^{\text{IV}} + e_2^{\text{IV}} t, \ldots;$$

d'où

$$(e^{\text{IV}} \delta^{\text{IV}}) = (e^{\text{IV}} n^{\text{IV}}) + (e^{\text{IV}} e^{\text{IV}}) t,$$

et

$$\varepsilon^{\text{IV}} = \frac{E^{\text{IV}} + 2(e^{\text{IV}} n^{\text{IV}})}{2\sqrt{(e^{\text{IV}} e^{\text{IV}})}} + \sqrt{(e^{\text{IV}} e^{\text{IV}})}\, t,$$

ou

$$t = \frac{1}{\sqrt{(e^{\text{IV}} e^{\text{IV}})}}\, \varepsilon^{\text{IV}} - \frac{E^{\text{IV}} + 2(e^{\text{IV}} n^{\text{IV}})}{2(e^{\text{IV}} e^{\text{IV}})}.$$

Ceci nous indique d'abord que la valeur la plus plausible de t est le deuxième terme, puisque celle de ε^{IV} est o; ensuite, lorsque $i = 0$, E^{IV} devient nul, le deuxième terme est constant, et, par suite, la précision de cette valeur de t est $\sqrt{(e^{\text{IV}} e^{\text{IV}})}$ fois plus grande que celle de $\varepsilon^{\text{IV}} = 0$, qui est l'unité. Voilà donc déterminée la précision de la valeur plausible de t; on aurait de même celles des valeurs plausibles de x, y, z, u, savoir,

$$\sqrt{(a^{\text{IV}} a^{\text{IV}})}, \quad \sqrt{(b^{\text{IV}} b^{\text{IV}})}, \quad \sqrt{(c^{\text{IV}} c^{\text{IV}})}, \quad \sqrt{(d^{\text{IV}} d^{\text{IV}})},$$

en recommençant autant de fois la séparation des carrés dans $(\delta\delta) + (\theta K)$, pour conserver successivement chacune des inconnues jusqu'à la fin. Mais nous allons découvrir bientôt un moyen moins long et qui pourra servir lorsque, i n'étant pas nul, E^{IV} est variable et la précision de t est plus compliquée.

Remarquons que, dans la recherche des valeurs plausibles, nous avons déterminé les corrélats dans les équations nécessaires, en déduisant de

$$\alpha = 0, \quad \beta' = 0, \quad \gamma'' = 0, \ldots,$$

les valeurs des inconnues en fonction des corrélats. Pour tenir compte de l'influence des erreurs de α, β', γ'', ..., sur les corrélats, il faut opérer d'une façon plus complète, en exprimant x, y, z, u, t en fonction des arbitraires et de α, β', γ'', ϑ''', ε^{IV}, au moyen des équations

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}(AK) + (a\delta)}{\sqrt{(aa)}}, \quad \beta' = \frac{\frac{1}{2}B' + (b'\delta')}{\sqrt{(b'b')}}, \quad \gamma'' = \frac{\frac{1}{2}C'' + (c''\delta'')}{\sqrt{(c''c'')}}, \quad \text{etc.}$$

De cette façon, les équations aux corrélats contiennent α, β', γ'', ..., et ces variables entrent dans l'expression des corrélats; en substituant les valeurs ainsi trouvées pour les corrélats dans les développements complets de x, y, z, ..., on a la formule générale des valeurs possibles des inconnues. Ces valeurs deviennent les plus plausibles dès que l'on y fait

$$\alpha = \beta' = \gamma'' = \ldots = 0.$$

Maintenant, toutes les inconnues sont données en fonctions linéaires des variables α, β', γ'', ...; connaissant la précision des valeurs de celle-ci (o, o, o, ...), il s'agit de déterminer les précisions des valeurs résultantes des inconnues.

Afin de résoudre ce problème, supposons que nous ayons, par exemple,

$$x = r + r_1\alpha + r_2\beta' + r_3\gamma'' + \ldots.$$

Les valeurs de α, β', γ'' étant données indépendamment l'une de l'autre, nous pouvons les considérer comme le résultat d'observations directes, ayant pour but la déter-

mination des inconnues α, β', x, par exemple, et γ'' étant une fonction

$$-\frac{r}{r_3}-\frac{r_1}{r_3}\alpha-\frac{r_2}{r_3}\beta'+\frac{1}{r_3}x.$$

Alors la valeur la plus plausible de x et sa précision sont données par le procédé indiqué plus haut.

Les corrections $\alpha=0$, $\beta'=0$, $\gamma''=0$, multipliées par la précision 1 et élevées au carré, donnent pour somme analogue à $(\delta\delta)$,

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta'^2+\gamma''^2 &= \alpha^2+\beta'^2+\frac{1}{r_3^2}(-r-r_1\alpha-r_2\beta'+x)^2\\ &= \frac{r^2}{r_3^2}+\frac{2rr_1}{r_3^2}\alpha+\frac{r_1^2+r_3^2}{r_3^2}\alpha^2+2\frac{rr_2}{r_3^2}\beta'+2\frac{r_1r_2}{r_3^2}\alpha\beta'\\ &\quad+\frac{r_2^2+r_3^2}{r_3^2}\beta'^2-\frac{2r}{r_3^2}x-2\frac{r_1}{r_3^2}\alpha x-2\frac{r_2}{r_3^2}\beta' x+\frac{1}{r_3^2}x^2.\end{aligned}$$

Le premier carré à séparer est évidemment celui de

$$\frac{rr_1}{r_3\sqrt{r_1^2+r_3^2}}+\frac{\sqrt{r_1^2+r_3^2}}{r}\alpha+\frac{r_1r_2}{r_3\sqrt{r_1^2+r_3^2}}\beta'-\frac{r_1}{r\sqrt{r_1^2+r_3^2}}x;$$

il reste

$$\frac{r^2}{r_1^2+r_3^2}+\frac{2rr_2}{r_1^2+r_3^2}\beta'+\frac{r_1^2+r_2^2+r_3^2}{r_1^2+r_3^2}\beta'^2-\frac{2r}{r_1^2+r_3^2}x-\frac{2r_2}{r_1^2+r_3^2}\beta' x+\frac{x^2}{r_1^2+r_3^2}.$$

Le second carré à séparer est celui de

$$\frac{rr_2}{\sqrt{(r_1^2+r_3^2)(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}}+\sqrt{\frac{r_1^2+r_2^2+r_3^2}{r_1^2+r_3^2}}\beta'-\frac{r_2}{\sqrt{(r_1^2+r_3^2)(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}}x;$$

il reste

$$\frac{r^2}{r_1^2+r_2^2+r_3^2}-\frac{2rx}{r_1^2+r_2^2+r_3^2}+\frac{x^2}{r_1^2+r_2^2+r_3^2},$$

ou le carré de

$$\frac{r-x}{\sqrt{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}}.$$

Si nous représentons les trois carrés par α_1^2, $\beta_1'^2$, $\gamma_1''^2$, il vient

$$\gamma_1''=\frac{r-x}{\sqrt{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)}},\quad x=r-\gamma_1''\sqrt{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)},$$

c'est-à-dire que, la précision de $\gamma_1''=0$ étant l'unité, celle de $x=r$ est

$$\sqrt{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)},$$

fois moindre, ou

$$1:\sqrt{(r_1^2+r_2^2+r_3^2)},$$

et l'erreur moyenne est

$$= \sqrt{(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2)}.$$

Ainsi, les inconnues étant exprimées complétement en fonction de α, β', γ'', ..., l'erreur moyenne de la valeur plausible de chacune est égale à la racine carrée de la somme des carrés des coefficients de ces variables dans son expression.

Enfin si, au moyen des valeurs plausibles de x, y, z, ..., nous trouvons celles d'une fonction

$$X = \varphi(x, y, z, \ldots),$$

la propriété précédente peut encore nous servir à trouver la précision de cette valeur. En effet, il suffit de développer X en fonction linéaire, comme au § V, soit

$$X = s + s_1 x + s_2 y + s_3 z + \ldots;$$

nous ne pouvons pas de là déduire directement la précision de X, parce que les valeurs de x, y, z, ..., ne sont pas indépendantes l'une de l'autre, comme celles de α, β', γ'', ...; il faut donc, conformément au commencement de ce paragraphe, substituer à x, y, z, ..., leurs expressions en α, β', γ'', ..., et alors le développement de X devient analogue à celui de x, savoir

$$X = s' + s'_1 \alpha + s'_2 \beta' + s'_3 \gamma'' + \ldots,$$

et la précision de $X = s'$ est

$$1 : \sqrt{s'^2_1 + s'^2_2 + s'^2_3 + \ldots}.$$

Si, au lieu d'avoir X en x, y, z, ..., cette inconnue était donnée directement en fonction de valeurs indépendantes, par exemple

$$X = \varphi(v_1, v_2, v_3, \ldots),$$

l'expression

$$X = s + s_1 v_1 + s_2 v_2 + s_3 v_3 + \ldots$$

serait comparable à celle de

$$x = r + r_1 \alpha + r_2 \beta' + r_3 \gamma'' + \ldots;$$

en effet,

$$\delta_1 = h_1(v_1 - k_1), \quad \delta_2 = h_2(v_2 - k_2) \ldots$$

donne

$$v_1 = k_1 + \frac{\delta_1}{h_1}, \quad v_2 = k_2 + \frac{\delta_2}{h_2}, \ldots,$$

$$X = s + s_1 k_1 + s_2 k_2 + s_3 k_3 + \ldots + \frac{s_1}{h_1}\delta_1 + \frac{s_2}{h_2}\delta_2 + \frac{s_3}{h_3}\delta_3 + \ldots,$$

et dans ce développement, δ_1, δ_2, δ_3, ..., sont des quantités ayant des valeurs indépendantes $= 0$ et de précision $= 1$, de même que α, β', γ'', ..., ci-dessus. Ainsi l'erreur moyenne de X est

$$\sqrt{\frac{s_1^2}{h_1^2} + \frac{s_2^2}{h_2^2} + \frac{s_3^2}{h_3^2} + \ldots};$$

et comme

$$h_1^2 = \frac{1}{m_1^2}, \quad h_2^2 = \frac{1}{m_2^2}, \quad h_3^2 = \frac{1}{m_3^2}, \ldots,$$

le carré de cette erreur moyenne devient

$$m_1^2 s_1^2 + m_2^2 s_2^2 + m_3^2 s^2 + \ldots,$$

formule simple et symétrique.

§ VII.

Récapitulation.

La suite des théorèmes établis dans les paragraphes précédents donne la solution suivante au problème général énoncé au § I :

Il faut séparer d'abord les observations en autant de séries qu'il y a eu de moyens d'observation différents ; on peut alors considérer la précision comme uniforme dans chaque série. On transforme les équations

$$v = h$$

en équations de la forme

$$\delta = 0,$$

ainsi qu'il est indiqué au § V. Dans chaque série d'équations

$$\delta = 0,$$

combinée avec les équations nécessaires qui lient entre elles les inconnues contenues dans cette série, on élimine les inconnues dépendantes ; on compense la série transformée par la condition

$$(\delta\delta) = \text{minimum},$$

en faisant abstraction de la précision uniforme et inconnue ; on substitue dans $(\delta\delta)$ les valeurs ainsi trouvées pour les inconnues, et l'on déduit la précision de la série d'observations par la formule

$$h = \sqrt{\frac{p - q + i}{(\delta\delta)}}.$$

Ayant déterminé ainsi la précision de chaque série d'observations, on reprend le système de toutes les équations primitives

$$\delta = 0 \quad \text{et} \quad \theta = 0,$$

et l'on forme, comme il est indiqué au § V, les équations

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2}(\mathrm{AK}) + (a\delta)}{\sqrt{(aa)}},$$

$$\beta' = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{B}' + (b'\delta')}{\sqrt{(b'b')}},$$

$$\gamma'' = \frac{\frac{1}{2}\mathrm{C}'' + (c''\delta'')}{\sqrt{(c''c'')}}, \quad \text{etc.}$$

On déduit de ces équations, en commençant par la dernière, toutes les inconnues en fonction des corrélats et de α, β', γ'', .. ; on substitue ces expressions des inconnues

dans les équations nécessaires, et l'on obtient les équations complètes aux correlats. Ces dernières permettent de déterminer les valeurs des corrélats en fonction de α, β', γ'',..., et ces valeurs, substituées dans les expressions obtenues précédemment pour les inconnues, donnent les valeurs de celles-ci en fonction des mêmes variables. Alors les valeurs plausibles des inconnues sont ce que l'on obtient pour elles en faisant

$$\alpha = \beta' = \gamma'' = \ldots = 0,$$

et les erreurs moyennes de ces valeurs sont les racines carrées des sommes des carrés des coefficients de α, β', γ'',..., dans l'expression de chaque inconnue respectivement.

NOTE.

Démonstration d'un théorème algébrique invoqué au § III.

La recherche de l'expression analytique du risque d'erreur, au § III, repose sur une propriété algébrique des fonctions symétriques. Comme je ne pense point que cette propriété ait été énoncée ni démontrée jusqu'à ce jour, j'ai cru devoir y consacrer une note.

Si un polynôme symétrique homogène de degré $2n$ contient, à des puissances paires seulement, des variables Δ_1, Δ_2, Δ_3,... en nombre égal au moins à $2n$, et si les dérivées de toutes les variables sont égales à l'unité, la dérivée du polynôme ne saurait être divisible par la somme des variables, sans que le polynôme lui-même ne soit égal à une puissance de la somme des carrés des variables, multipliée par un coefficient constant, ou $= N(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots)^n$.

Le polynôme supposé est représenté de la façon la plus générale par

$$\left\{\begin{array}{l}
\Delta_1^{2n} + \Delta_2^{2n} + \Delta_3^{2n} + \ldots + N'(\Delta_1^{2n-2}\Delta_2^2 + \Delta_1^{2n-2}\Delta_3^2 + \ldots) \\
\quad + N''(\Delta_1^{2n-4}\Delta_2^4 + \Delta_1^{2n-4}\Delta_3^4 + \ldots) + N_1''(\Delta_1^{2n-4}\Delta_2^2\Delta_3^2 + \Delta_1^{2n-4}\Delta_2^2\Delta_4^2 + \ldots) \\
\quad + N'''(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^6 + \Delta_1^{2n-6}\Delta_3^6 + \ldots) + N_1'''(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^4\Delta_3^2 + \Delta_1^{2n-6}\Delta_2^2\Delta_3^4 + \ldots) \\
\quad + N_2'''(\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4^2 + \ldots) + \ldots \text{ etc.}
\end{array}\right.$$

Sa dérivée devient alors

$$\left\{\begin{array}{l}
2n(\Delta_1^{2n-1} + \Delta_2^{2n-1} + \Delta_3^{2n-1} + \ldots) \\
\quad + N'[(2n-2)\Delta_1^{2n-3}\Delta_2^2 + 2\Delta_1^{2n-2}\Delta_2 + (2n-2)\Delta_1^{2n-3}\Delta_3^2 + 2\Delta_1^{2n-2}\Delta_3 + \ldots] \\
\quad - N''[(2n-4)\Delta_1^{2n-5}\Delta_2^4 + 4\Delta_1^{2n-4}\Delta_2^3 + \ldots] \\
\quad + N_1''[(2n-4)\Delta_1^{2n-5}\Delta_2^2\Delta_3^2 + 2\Delta_1^{2n-4}\Delta_2\Delta_3 + 2\Delta_1^{2n-4}\Delta_2^2\Delta_3 + \ldots] \\
\quad + N'''[(2n-6)\Delta_1^{2n-7}\Delta_2^6 + 6\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^5 + \ldots] \\
\quad - N_1'''\left[\begin{array}{l}(2n-6)\Delta_1^{2n-7}\Delta_2^4\Delta_3^2 + \ldots \\ \quad + 4\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^3\Delta_3^2 + 2\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^4\Delta_3 + \ldots\end{array}\right] \\
\quad + N_2'''\left[\begin{array}{l}(2n-6)\Delta_1^{2n-7}\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4^2 + 2\Delta_1^{2n-6}\Delta_2\Delta_3^2\Delta_4^2 \\ \quad + 2\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^2\Delta_3\Delta_4^2 + 2\Delta_1^{2n-6}\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4 \ldots\end{array}\right] \text{ etc.}
\end{array}\right.$$

Cette expression est divisible, par hypothèse, par $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \ldots$; pour que cela soit, il faut que le reste de la division ordonnée par rapport à Δ_1, par exemple, soit

nul, et, par conséquent, que tous les termes dissemblables de ce reste s'annulent séparément. Afin de reconnaître comment cette condition se traduit algébriquement, nous allons effectuer la division, et pour abréger les notations, nous représenterons par $S\Delta_2$ la somme $\Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4 + \ldots$, par $S\Delta_2^{2n-1}$ la somme $\Delta_2^{2n-1} + \Delta_3^{2n-1} + \ldots$, par $S\Delta_2^2\Delta^2$ la somme $\Delta_2^2\Delta^2 + \Delta_2^2\Delta_4^2 + \ldots + \Delta_3^2\Delta_4^2 + \ldots$, etc.; en un mot, le signe S indiquera la somme de tous les termes symétriques à celui qui le suit, formés avec les variables $\Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \ldots$. Notre premier dividende ordonné devient ainsi, abstraction faite du coefficient N,

$$\begin{aligned}
&2n\Delta_1^{2n-1} + (2N'S\Delta_2)\Delta_1^{2n-2} + [2(n-1)N'S\Delta_2^2]\Delta_1^{2n-3} \\
&\quad + (4N''S\Delta_2^3 + 2N''_1S\Delta_2^2\Delta_3)\Delta_1^{2n-4} \\
&\quad + [2(n-2)N''S\Delta_2^4 + 2(n-2)N''_1S\Delta_2^2\Delta_3^2]\Delta_1^{2n-5} \\
&\quad + (6N'''S\Delta_2^5 + 2N'''_1S\Delta_2^4\Delta_3 + 4N'''_1S\Delta_2^3\Delta_3^2 + 2N'''_2S\Delta_2^2\Delta^2\Delta_3\Delta^2) \\
&\quad + \left[\begin{array}{l} 2(n-3)N'''S\Delta_2^6 + 2(n-3)N'''_1S\Delta_2^4\Delta_3^2 \\ \qquad + 2(n-3)N'''_2S\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4^2 \end{array}\right]\Delta_1^{2n-6} + \ldots
\end{aligned}$$

Le diviseur est

$$\Delta_1 + S\Delta_2.$$

Premier quotient : $2n\Delta_1^{2n-2}$; *produit* par $S\Delta_2$,

$$= (2nS\Delta_2)\Delta_1^{2n-2};$$

reste, le terme en Δ_1^{2n-2} disparaît, le coefficient de Δ_1^{2n-3} devient

$$2(N'-n)S\Delta_2.$$

Deuxième quotient : $[2(N'-n)S\Delta_2]\Delta_1^{2n-3}$. Dans le produit par $S\Delta_2$, nous aurons le carré de $S\Delta_2$ ou

$$\Delta_2^2 + 2\Delta_2\Delta_3 + \Delta_3^2 + 2\Delta_2\Delta_4 + 2\Delta_3\Delta_4 + \Delta_4^2 + \ldots,$$

ou, d'après nos abréviations,

$$S\Delta_2^2 + 2S\Delta_2\Delta_3;$$

le *produit* par $S\Delta_2$ est donc

$$[2(N'-n)S\Delta_2^2 + 4(N'-n)S\Delta_2\Delta_3]\Delta_1^{2n-3}.$$

Reste, le terme en Δ_1^{2n-2} disparaît, le coefficient de Δ_1^{2n-3} devient

$$[2(n-2)N' + 2n]S\Delta_2^2 - 4(N'-n)S\Delta_2\Delta_3.$$

Troisième quotient. C'est le coefficient précédent multiplié par Δ_1^{2n-1}. Dans ce quotient, le terme en $S\Delta_2\Delta_3$ donnera au produit un terme en $S\Delta_2\Delta_3\Delta_4$; or chaque $\Delta\Delta\Delta$ est donné par $\Delta_2\Delta_3 \times \Delta_4$, $\Delta_2\Delta_4 \times \Delta_3$, $\Delta_3\Delta_4 \times \Delta_2$; ce terme sera donc

$$[3.4(N'-n)S\Delta_2\Delta_3\Delta_4]\Delta_1^{2n-4};$$

il ne pourra se réduire avec le dividende, passera tout entier dans le reste, puis dans le quatrième quotient, et donnera au quatrième produit un terme

$$[4.3.4(N'-n)S\Delta_2\Delta_3\Delta_4\Delta_5]\Delta_1^{2n-5},$$

qui ne peut encore se réduire avec aucun autre. Il y aura donc, au reste final, un terme tel que

$$(2n-1)\ldots 5.4.3.4\,(N'-n)\,S\,\Delta_2\Delta_3\Delta_5\Delta_6\ldots\Delta_{2n};$$

et comme le reste final doit disparaître pour que la division soit possible, il faut que

$$N' = n.$$

(Remarquons ici que la supposition du nombre de variables au moins égal à $2n$ est nécessaire dans l'énoncé du théorème; en effet, si ce nombre était inférieur à $2n$, le terme indiqué ci-dessus ne pourrait se produire, et l'on ne serait plus en droit de conclure $N' = n$.)

D'après ceci, le troisième quotient se réduit à

$$[2n(n-1)\,S\,\Delta_2^2]\,\Delta_1^{2n-4}.$$

Produit par $S\,\Delta_2$: $S\,\Delta_2^2 \times S\,\Delta_2$ donnera des termes tels que Δ_2^3 et $\Delta_2^2\Delta_4$, et chacun ne peut se présenter qu'une fois; le produit est donc

$$[2n(n-1)\,S\,\Delta_2^3 + 2n(n-1)\,S\,\Delta_2^2\Delta_4]\,\Delta_1^{2n-4}.$$

Le premier terme du *reste* sera

$$\{[4N'' - 2n(n-1)]\,S\,\Delta_2^3 + [2N''_1 - 2n(n-1)]\,S\,\Delta_2^2\Delta_4\}\,\Delta_1^{2n-4}.$$

Quatrième quotient. Le terme en $S\,\Delta_2^2\Delta_3$ de ce quotient donnera au produit un terme

$$\{2[2N''_1 - 2n(n-1)]\,S\,\Delta_2^2\Delta_3\Delta_4\}\Delta_1^{2n-5}$$

provenant de $\Delta_2^2\Delta_3 + \Delta_4$ et de $\Delta_2^2\Delta_4 \times \Delta_3$), qui ne trouvera point son semblable et persévérera jusqu'au reste final, de même qu'il a été dit pour le terme en $S\,\Delta_2\Delta$ ci-dessus. Le coefficient entre crochets affecterait successivement

$$2\,\Delta_1^{2n-5}\,S\,\Delta_2^2\Delta_3\Delta_4, \quad 2.3\,\Delta_1^{2n-6}\,S\,\Delta_2^2\Delta_3\Delta_4\Delta_5, \quad \text{etc.};$$

donc il faut qu'il s'annule de lui-même, et qu'on ait

$$N''_1 = n(n-1);$$

le quotient se réduit à

$$[4N'' - 2n(n-1)]\,S\,\Delta_2^3 \times \Delta_1^{2n-4}.$$

Produit par $S\,\Delta_2$:

$$\{[4N'' - 2n(n-1)]\,S\,\Delta_2^4 + [4N'' - 2n(n-1)]\,S\,\Delta_2^3\Delta_4\}\,\Delta_1^{2n-4}.$$

Premier terme du *reste* :

$$\left\{\begin{array}{l}[2(n-4)N'' + 2n(n-1)]\,S\,\Delta_2^4 - [4N'' - 2n(n-1)]\,S\,\Delta_2^3\Delta_4 \\ \qquad + 2(n-2)n(n-1)\,S\,\Delta_2^2\Delta_3^2\end{array}\right\}\Delta_1^{2n-4}.$$

Cinquième quotient. Le coefficient de $S\,\Delta_2^3\Delta_3$, terme qui donnerait

$$S\,\Delta_2^3\Delta_3\Delta_4, \quad S\,\Delta_2^3\Delta_3\Delta_4\Delta_5, \ldots,$$

doit, comme il a été dit pour d'autres, s'évanouir; d'où

$$N'' = n\left(\frac{n-1}{2}\right).$$

Le quotient devient

$$n(n-1)(n-2)(S\Delta_2^4 + 2S\Delta_2^2\Delta_3^2)\Delta_1^{2n-4}.$$

Produit :

$$n(n-1)(n-2)(S\Delta_2^5 + S\Delta_2^4\Delta_3 + 2S\Delta_2^3\Delta_3^2 + 2S\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4)\Delta_1^{2n-4}.$$

Reste :

$$\left\{\begin{array}{l}[6N'' - n(n-1)(n-2)]S\Delta_2^5 + [2N''_1 - n(n-1)(n-2)]S\Delta_2^4\Delta_3 \\ \quad + [4N''_1 - 2n(n-1)(n-2)]S\Delta_2^3\Delta_3^2 \\ \quad + [2N''_2 - 2n(n-1)(n-2)]S\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4\end{array}\right\}\Delta_1^{2n-4}.$$

Sixième quotient. Le coefficient de $S\Delta_2^4\Delta_3$ doit être annulé, de même que celui de $S\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4$; ainsi nous avons

$$N''_1 = n\left(\frac{n-1}{2}\right)(n-2) \quad \text{et} \quad N''_2 = n(n-1)(n-2),$$

et le quotient devient

$$[6N'' - n(n-1)(n-2)]S\Delta_2^5 \cdot \Delta_1^{2n-4}.$$

Produit :

$$[6N'' - n(n-1)(n-2)](S\Delta_2^6 + S\Delta_2^5\Delta_3)\Delta_1^{2n-4}.$$

Reste :

$$\left\{\begin{array}{l}[2(n-6)N'' + n(n-1)(n-2)]S\Delta_2^6 - [6N''' - n(n-1)(n-2)]S\Delta_2^5\Delta_3 \\ \quad + n(n-1)(n-2)(n-3)S\Delta_2^4\Delta_3^2 \\ \quad + 2n(n-1)(n-2)(n-3)S\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4^2\end{array}\right\}\Delta_1^{2n-4}.$$

Septième quotient. Nous aurions encore

$$N''' = n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right).$$

Nous ne pousserons pas cette division plus loin; mais la substitution des valeurs de N', N'', N''_1, N''', N'''_1, N'''_2 dans le polynôme proposé, ordonné par rapport à Δ_1, donne

$$N\left\{\begin{array}{l}\Delta_1^{2n} + n\Delta_1^{2n-2}(\Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots) + n\left(\frac{n-1}{2}\right)\Delta_1^{2n-1}(\Delta_2^4 + \Delta_3^4 + \ldots) \\ \quad + n(n-1)\Delta_1^{2n-4}(\Delta_2^2\Delta_3^2 + \Delta_2^2\Delta_4^2 + \ldots) \\ \quad + n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\Delta_1^{2n-6}(\Delta_2^6 + \Delta_3^6 + \ldots) \\ \quad + \frac{n(n-1)(n-2)}{2}\Delta_1^{2n-6}(\Delta_2^4\Delta_3^2 + \Delta_2^2\Delta_3^4 \ldots) \\ \quad + n(n-1)(n-2)\Delta_1^{2n-6}(\Delta_2^2\Delta_3^2\Delta_4^2 + \ldots) + \ldots\end{array}\right\},$$

ou

$$N\left\{\begin{array}{l}\Delta^{2n} - n\Delta^{2(n-1)}(\Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots) + n\left(\frac{n-1}{2}\right)\Delta^{2(n-2)}(\Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots)^2 \\ \quad - n\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-2}{3}\right)\Delta^{2(n-3)}(\Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots)^3 + \ldots\end{array}\right\},$$

ou enfin

$$N(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \ldots)^n.$$

C. Q. F. D.

Nous placerons ici quelques mots d'explication pour aller au-devant d'une objection que l'on peut faire à l'emploi de ce théorème à la page 177.

Dans le développement du risque d'erreur en série, le degré $2n$ du terme quelconque est évidemment illimité; il faut donc supposer dans la formule le nombre des variables ou des corrections également illimité, puisque, aux termes du théorème ci-dessus, ce nombre doit être au moins égal à $2n$. Cette nécessité semble priver la démonstration de la forme analytique du risque d'erreur du caractère de généralité.

Mais nous voyons d'abord que, en ayant égard à cette condition, la démonstration rappelée prouve bien qu'en développant en série le risque d'erreur des corrections à faire à un système de $2n$ observations, les termes du développement jusqu'au $2n^{ième}$ degré inclusivement se réduisent à la forme

$$A + B(S\Delta_1^2) + C(S\Delta_1^2)^2 + \ldots + N(S\Delta_1^2)^n.$$

Si nous considérons maintenant un système quelconque, contenant un nombre moindre d'observations, nous pourrons toujours concevoir le système complété jusqu'au nombre $2n$ par des observations fictives et indépendantes, et comme les corrections de ces dernières observations devront nécessairement être nulles, nous voyons que le risque d'erreur gardera la même forme, avec cette seule différence que $S\Delta_1^2$ contiendra un moindre nombre de termes.

Ainsi, le risque d'erreur d'un système de p corrections peut toujours se mettre sous la forme $A + B(S\Delta_1^2) + C(S\Delta_1^2)^2 + D(S\Delta_1^2)^3 + \ldots + N(S\Delta_1^2)^n +$ des termes de degré supérieur à $2n$, à condition que $2n > p$.

Il nous suffit d'ajouter que $2n$ est un nombre essentiellement fini, mais que rien ne limite, l'esprit pouvant concevoir un système d'observations en nombre indéfiniment grand. Donc le développement du risque d'erreur ne saurait renfermer un terme qui ne rentre sous la forme $\Phi(S\Delta_1^2)^p$.

Règles de convergence des séries et des intégrales définies qui contiennent un facteur périodique;

PAR LE P. J. CHARTIER, S. J.

Je me propose de donner une démonstration d'un théorème important d'Abel, et d'en tirer une série de conséquences qui en découlent presque immédiatement, et comprennent en particulier un théorème de M. Malmsten, démontré par M. Holmgren, mai 1851, page 186 de ce Journal, et un autre de M. Bjorling, qui se trouve en décembre 1852 du même Journal.

PROPOSITION FONDAMENTALE (due à Abel). — *Soient $a_1, a_2, \ldots, a_p$, p quantités réelles, positives ou négatives; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$, p quantités réelles de même signe et numériquement décroissantes; et* E, F, *des quantités réelles, positives ou négatives. Si l'on a, pour toute valeur de p entre* 1 *et* n,

$$(1) \qquad E < a_1 + a_2 + \ldots + a_p < F,$$

on aura entre les mêmes limites, si ε_1 est positif,

$$(2) \qquad E\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \ldots + a_p\varepsilon_p < F\varepsilon_1.$$

Si ε_1 est négatif, les mêmes inégalités subsisteront, changées de sens.

Cette proposition peut se démontrer ainsi :

Remarquons en général que, si dans une somme

$$S = \sum a_k e_k,$$

où a_k et e_k sont des quantités réelles, on fait varier de quantités égales d un nombre quelconque de facteurs e_k, la variation qui en résultera pour S sera de la forme ad, et, par conséquent, S variera dans le même sens quand d variera dans le même sens. D'où il suit que, si

deux valeurs extrêmes de d laissent S entre deux limites α et β, toute valeur intermédiaire de d laissera S dans ces mêmes limites.

Cela posé, des inégalités (1) on déduit en multipliant les trois membres par ε_1 supposé positif, et réduisant le membre du milieu à un terme, puis laissant les p termes,

$$(3) \qquad E\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots < F\varepsilon_1,$$

$$(4) \qquad E\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_1 + a_3\varepsilon_1 + \ldots + a_p\varepsilon_1 < F\varepsilon_1.$$

Si ε_1 était négatif, il n'y aurait qu'à renverser les sens de ces inégalités. On peut supposer que les points de l'inégalité (3) tiennent lieu des termes $a_2 0$, $a_3 0$, ... $a_p 0$, ayant pour seconds facteurs zéro. Maintenant, ε_2 est entre o et ε_1. Donc, d'après la remarque, on aura aussi, en réduisant dans les inégalités (4) le membre du milieu à deux termes, puis le laissant tel qu'il est, et remplaçant à partir du second, ε_1 par ε_2,

$$E\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 \ldots\ldots\ldots\ldots < F\varepsilon_1,$$

$$E\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_2 + \ldots + a_p\varepsilon_2 < F\varepsilon_1.$$

De même, puisque ε_3 est entre o et ε_2, on aura

$$E\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 \ldots\ldots\ldots\ldots < F\varepsilon_1,$$

$$E\varepsilon_1 < a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + a_4\varepsilon_4 + \ldots + a_p\varepsilon_3 < F\varepsilon_1.$$

Ce raisonnement peut se poursuivre indéfiniment, et il conduit évidemment à l'inégalité qu'il s'agissait d'établir.

Corollaire I. (La première partie de ce corollaire a été donnée par M. Oss. Bonnet, tome XIV, page 249 de ce Journal.) Si l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \varphi x\, dx$ reste comprise entre deux limites finies E et F, quand x varie de x_0 à x_1, et que fx soit entre ces limites de signe constant et décroissante en valeur numérique, on aura pour toute valeur de x entre x_0 et x_1,

$$(2) \qquad Efx_0 < \int_{x_0}^{x} fx\,\varphi x\, dx < Ffx_0.$$

Si fx était toujours croissante en valeur absolue et si de $x'_0 = x$ à $x_0 = x_1$, $\int_{x_0}^{x} \varphi x\, dx$ restait entre E et F, il n'y aurait qu'à substituer fx à fx_0.

De même, soit

$$G < \sum_{n_0}^{n} \varphi n < H$$

pour toute valeur entière de n entre n_0 et n_1, et soit fn une fonction qui, toujours de même signe, varie toujours dans le même sens, par exemple décroisse pour les valeurs croissantes de n depuis n_0 jusqu'à n_1. On aura, entre ces limites,

$$(\beta) \qquad G f n_0 < \sum_{n_0}^{n} fn \varphi n < H f n_0.$$

On mettrait fn au lieu de fn_0, si f était croissante.

Corollaire II. Si les conditions des formules (α) et (β) sont remplies à partir de valeurs de x suffisamment grandes et jusqu'à l'infini, et que fx et fn deviennent infiniment petits pour x et n infiniment grands, l'intégrale définie et la somme $\sum$ auront chacune une limite finie et déterminée relative à $x = \infty$, $n = \infty$.

Nous faisons abstraction, dans ce corollaire et dans le corollaire IV qui suit, des passages par l'infini qui pourraient avoir lieu pour des valeurs finies de x. Ou, si l'on veut, nous disons que, à partir de la plus grande des valeurs finies de x ou de n qui rendent l'intégrale ou la somme $\sum$ infinie, cette intégrale et cette somme auront des valeurs indéfiniment convergentes vers une limite finie et déterminée.

Démonstration. Soient L et L′ deux quantités infiniment grandes, et L′ > L; de même, N et N′ deux nombres entiers infiniment grands, et N′ > N. On aura toujours, quels que soient L′ et N′,

$$E' f L < \int_{L}^{L'} fx \varphi x \, dx < F' f L,$$

$$G' f N < \sum_{N}^{N'} fn \varphi n < H' f N.$$

Par hypothèse, les membres extrêmes de ces inégalités sont infiniment petits; donc aussi les membres du milieu, et, par suite, les

sommes $\int_{\varepsilon}^{\infty L}$ et $\int_{\varepsilon}^{\infty L}$ diffèrent infiniment peu, ainsi que $\sum_{n}^{N}$ et $\sum_{n}^{N}$. Donc, les quantités $\int_{\varepsilon}^{\infty L}$ et $\sum_{n}^{N}$ ont une limite finie et déterminée relative à $L = \infty$, $N = \infty$.

Faisons une application. On sait que les sommes

$$\int_{\varepsilon} \sin(px + q)\,dx, \quad \int_{\varepsilon} \cos(px + q)\,dx,$$

$$\sum \sin(px + q), \quad \sum \cos(px + q)$$

sont finies entre toutes limites, excepté les intégrales lorsque p est nul, et les sommes $\sum$ pour $p = \pm 2k\pi$, k désignant un nombre entier quelconque. Si donc fx finit par décroître constamment et jusqu'à zéro quand x augmente au delà de toute limite, les sommes

$$\int_{\varepsilon}^{\infty L} fx \sin(px + q)\,dx, \quad \int_{\varepsilon}^{\infty L} fx \cos(px + q)\,dx,$$

$$\sum_{n}^{N} fn \sin(pn + q), \quad \sum_{n}^{N} fn \cos(pn + q),$$

auront pour toutes valeurs de p et q, sauf l'exception signalée, des limites finies et déterminées, relatives à L et N infinis.

On reconnaît là le théorème de M. Malmsten, signalé au commencement; et l'on voit que ce théorème ne suppose point pour φx de propriétés particulières aux fonctions trigonométriques, mais seulement une propriété qui laisse beaucoup plus d'arbitraire à la forme de la fonction.

Corollaire III. Supposons que fx soit, entre x_0 et x_k, successivement croissante et décroissante en valeur absolue, en sorte que, entre ces limites, ses valeurs numériques maxima soient $\pm fx_0$, $\pm fx_1$, $\pm fx_2, \ldots, \pm fx_k$, ou, si l'on ne considère que des valeurs entières de la variable, $\pm fn_0$, $\pm fn_1$, $\pm fn_2, \ldots, \pm fn_k$.

Si, entre les limites x_0 et x_k, on a toujours en valeur numérique

$$\int \varphi x\, dx < \mathrm{F}, \quad \sum \varphi n < \mathrm{H},$$

il en résultera en valeur numérique

$$\int_{x_0}^{x_k} fx\, \varphi x\, dx < \mathrm{F}\,[\,fx_0 + 2\,(fx_1 + fx_2 + \ldots + fx_{k-1}) + fx_k\,]$$

et

$$\sum_{n_0}^{n_k} fn\, \varphi n < \mathrm{H}\,[\,fn_0 + 2\,(fn_1 + fn_2 + \ldots + fn_{k-1}) + fn_k\,].$$

Il est sous-entendu, dans ces inégalités, qu'on doit réduire chaque terme à sa valeur numérique, en sorte que tous soient additifs.

Démonstration. Appelons x'_0, x'_1, $x'_2, \ldots$, x'_{k-1} les valeurs de x qui correspondent soit à $fx = 0$, soit aux minima compris entre les maxima. (Le passage par zéro doit ici être regardé comme un point de minimum.) Nous aurons en valeur numérique

$$\int_{x_0}^{x'_1} < \mathrm{F}\, fx_0,$$

$$\int_{x'_1}^{x_1} < \mathrm{F}\, fx_1,$$

$$\int_{x_1}^{x'_2} < \mathrm{F}\, fx_1.$$

etc.

Il suffit d'ajouter membre à membre pour obtenir la première inégalité à démontrer. La deuxième se démontre semblablement. Nous avons supposé que les valeurs extrêmes de f étaient des maxima numériques, au moins par rapport aux valeurs voisines comprises dans les limites; s'il en était autrement, les formules subiraient une légère modification, qu'on trouverait facilement.

Corollaire IV. Si les conditions du corollaire précédent ont lieu pour des limites supérieures infiniment grandes, et que les sommes

$$s \qquad fx_1 + fx_2 + fx_3 + \ldots,$$

$$s' \qquad fn_1 + fn_2 + fn_3 + \ldots,$$

soient convergentes, il en sera de même de

$$\int_{x_0}^{L} fx\varphi dx \quad \text{et} \quad \sum_{n_0}^{N} fn\varphi n,$$

L et N étant infiniment grands.

Ce corollaire doit être entendu dans le sens qui a été expliqué après l'énoncé du corollaire II.

Il peut se faire que les séries (s) et (s'), même relatives à des limites infinies des sommes, soient composées d'un nombre fini de termes; alors, les sommes seront finies à la seule condition que les termes des séries (s) et (s') soient finis. Pour qu'on puisse dire, de plus, que ces sommes finies sont déterminées, il faudra qu'on ait $f\infty = 0$. En un mot, dans ce cas, à partir de la valeur de x qui correspond aux derniers termes des séries (s) et (s'), on rentre dans le corollaire II.

Dans tous les cas, la première condition de convergence de l'intégrale et de la somme $\sum$ est $f\infty = 0$.

Outre cette condition générale, il doit exister une relation entre la fréquence des passages de la fonction fx par ses valeurs maxima, et l'ordre de petitesse que doit avoir cette fonction pour x infiniment grand. Nous allons chercher cette relation. Mais auparavant, remarquons encore que si la fonction sous le signe somme ou sous le signe $\sum$ pouvait se décomposer en deux facteurs, dont l'un χx demeurât fini pour x infiniment grand, et dont l'autre Fx fût de signe constant et tel que les sommes

$$\int_{L}^{\infty} Fx\,dx, \quad \sum_{N}^{\infty} Fn,$$

fussent infiniment petites pour L et N infiniment grands, les sommes

$$\int_{x_0}^{L} Fx\chi x\,dx, \quad \sum_{n_0}^{N} Fn\chi n$$

seraient convergentes. On le voit immédiatement et sans recourir à

nos théorèmes: car, en appelant M le maximum des valeurs numériques de χx depuis L ou N jusqu'à l'infini, on aurait en valeur numérique

$$\int_L^x \mathrm{F}x\,\chi x\,dx < \mathrm{M}\int_L^x \mathrm{F}x\,dx, \quad \sum_N^x \mathrm{F}n\,\chi n < \mathrm{M}\sum_N^x \mathrm{F}n,$$

quantités infiniment petites.

Enfin, il suffit de considérer la série (s); car la convergence de celle-ci entraînera celle de la série (s'), dont les termes ne peuvent être ni plus grands ni plus nombreux que leurs correspondants de la série (s), ainsi qu'il est facile de le constater. Et comme les conditions de convergence d'une série ne portent que sur les termes infiniment éloignés, nous supposerons toujours, dans ce qui va suivre, la valeur de x infiniment grande. Dans les cas singuliers où la série (s) se prolongerait à l'infini pour des valeurs de x comprises dans des limites finies, l'emploi de cette série comme auxiliaire n'aurait plus d'avantage.

Ces préliminaires entendus, supposons qu'on ait

$$fx = f_1 x \,.\, \mathrm{P}(\psi x) = f_1 x\, \mathrm{P}(z),$$

$f_1 x$ étant une fonction dont la dérivée ne passe plus par zéro ni par l'infini à partir d'une valeur de x suffisamment grande, quoiqu'elle puisse être nulle ou infinie pour $x = \infty$; $\mathrm{P}(z)$ désignant une fonction alternativement croissante et décroissante, et ψx une fonction qui finit par croître en valeur numérique au delà de toute limite, en sorte qu'on ait $\psi\infty = \pm\infty$.

Prenons la dérivée

$$\begin{aligned} f'x &= f_1' x\, \mathrm{P}(\psi x) + f_1 x\, \psi' x \,.\, \mathrm{P}'(\psi x) \\ &= f_1' x\, \mathrm{P}'(\psi x) \left[\frac{\mathrm{P}(\psi x)}{\mathrm{P}'(\psi x)} + \frac{f_1 x\, \psi' x}{f_1' x} \right]. \end{aligned}$$

Voyons comment il peut y avoir maximum de fx. Par hypothèse, le premier facteur ne passe ni par zéro, ni par l'infini. Nous supposerons que le second facteur ne passe pas par l'infini pour x infiniment grand; s'il s'annule, on ne pourra avoir en même temps $f'x = 0$

que si $P(\psi x)$ s'annule aussi, ce qui donne un minimum numérique. Donc, il ne peut y avoir de maximum de fx que pour des valeurs de x qui annulent la parenthèse. Quand cette parenthèse s'annulera, il y aura, en général, maximum ou minimum. On pourra le constater dans chaque cas en voyant qu'alors les dérivées des termes de la parenthèse sont inégales. Nous devons supposer que cette parenthèse s'annule une infinité de fois, mais seulement quand x augmente jusqu'à l'infini, de telle sorte qu'il y ait une infinité de maxima, mais toujours un nombre fini dans des limites finies. Nous remarquerons que, pour x infiniment grand, la parenthèse s'annule pour des valeurs de $\frac{P(\psi x)}{P'(\psi x)}$ à peu près égales et de signe contraire à la constante $\left(\frac{f'(x)\psi'(x)}{f(x)}\right)_{x=\infty}$, et si ce terme est infini pour $x=\infty$, c'est pour des valeurs infiniment grandes de $\frac{P(\psi x)}{P'(\psi x)}$ que la parenthèse s'annule.

Soit maintenant x_0, x_1, x_2,..., x_i, x_{i+1},... une série de valeurs croissantes de x tellement choisies qu'on ait toujours

$$\psi x_{i+1} - \psi x_i = \pm p,$$

p désignant un nombre pris arbitrairement. Ces valeurs de x croîtront avec i et ψx au delà de toute limite. Nous supposerons que dans l'intervalle de x_i à x_{i+1}, il y ait, en général, m_i maxima de fx, et que M_i désigne la plus grande valeur que puisse prendre la fonction Px au moment du passage par ces m_i maxima. Alors, les termes de s (dans lesquels, pour éviter la confusion, on peut supposer x_0, x_1, x_2,... remplacés par ξ_0, ξ_1, ξ_2,...), ceux de ces termes, dis-je, qui seront compris dans l'intervalle de x_i à x_{i+1}, formeront une somme σ_i numériquement plus petite que $m_i M_i f_1 x_i$, si $f_1 x$ est numériquement décroissante; et si $f_1 x$ est croissante, l'inégalité subsistera encore en convenant que σ_i, m_i, M_i se rapportent à l'intervalle de x_{i-1} à x_i. Ainsi, dans tous les cas, la série s sera convergente si $\sum m_i M_i f_1 x_i$ est convergente. Nous prendrons pour condition de convergence de cette dernière série,

$$m_i M_i f_1 x_i < \frac{u}{i^{1+\alpha}}$$

pour toutes valeurs de i suffisamment grandes, u étant une fonction finie de i, ou même infiniment grande, pourvu qu'elle soit infiniment petite par rapport à toute puissance positive de i, et a étant aussi petit que nous voudrons.

Nous avons, par hypothèse,

$$\psi x_1 - \psi x_0 = \pm p,$$
$$\psi x_2 - \psi x_1 = \pm p,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi x_i - \psi x_{i-1} = \pm p:$$

et comme nous supposons que la valeur numérique de ψx est toujours croissante, il faut prendre partout le signe $+$, ou partout le signe $-$. On déduit de là

$$\psi x_i = \psi x_0 \pm p_i,$$
$$\frac{1}{(\psi x_i)^{1+a^2}} = \frac{1}{(\psi x_0 \pm p_i)^{1+a^2}} = \frac{u}{i^{1+a^2}}.$$

Donc, la condition de convergence est, V désignant une fonction de x ou finie, ou du moins infiniment petite par rapport à toute puissance positive de ψx,

$$(C) \qquad m_i \mathrm{M}_i f_1 x_i \leqq \frac{\mathrm{V}}{(\psi x_i)^{1+a^2}}.$$

Ainsi, nous pouvons énoncer le théorème suivant :

Théorème. *Soient φx et φn tels, qu'entre toutes limites les sommes $\int \varphi x\,dx$ et $\sum \varphi n$ soient finies, au moins à partir des valeurs x_0 et n_0; $f_1 x$ une fonction dont la dérivée, pour x infiniment grand, ne passe plus par zéro ni par l'infini; ψx une fonction qui, numériquement, finit par croître au delà de toute limite; $\mathrm{P}z = \mathrm{P}(\psi x)$ une fonction telle que de $z_i = \psi x_i$ à $z_i \pm p = \psi(x_{i+1})$ elle fasse passer le produit $f_1 x\,\mathrm{P}(\psi x)$ par m_i maxima; enfin M_i la plus grande valeur que prenne dans ce passage la fonction $\mathrm{P}(\psi x)$.*

Si l'on finit par avoir constamment

$$(C) \qquad m_i \mathrm{M}_i f_1 x_i \leqq \frac{\mathrm{V}}{(\psi x_i)^{1+a^2}}.$$

a étant aussi petit qu'on veut, les sommes

$$\int_{x_0}^{\infty} f_1 x \, \mathrm{P}(\psi x) \varphi x \, dx, \quad \sum_{n}^{\infty} f_1 n \, \mathrm{P}(\psi n) \varphi n,$$

seront finies et déterminées.

Nous supposons $f_1 x$ numériquement décroissante. Si $f_1 x$ était numériquement croissante, m_i et M_i se rapporteraient à l'intervalle de z_{i-1} à z_i.

i désigne ici un nombre quelconque de la suite 0, 1, 2,...; p est un nombre arbitraire, assez grand cependant pour que m_i ne soit pas généralement nul, et x_0, n_0 sont définies par la condition exprimée au corollaire II; c'est-à-dire nous supposons qu'à partir de x_0 et n_0, les sommes

$$\int f_1 x \, \mathrm{P}(\psi x) \varphi x \, dx, \quad \sum f_1 n \, \mathrm{P}(\psi n) \varphi n,$$

ne passent par l'infini pour aucune valeur particulière de x et de n, si grande soit elle. Il ne s'agit, dans la condition (C), que de valeurs numériques.

Si m_i et M_i restent finis, cette condition peut se remplacer par celle-ci :

$$f_1 x_i < \frac{V}{(\psi x_i)^{1+a^2}},$$

ou, en supprimant l'indice i,

$$(\mathrm{C}_1) \qquad f_1 x < \frac{V}{(\psi x)^{1+a^2}}.$$

Inversement,

$$\psi x < \frac{V'}{f_1 x^{1+b^2}},$$

a et b étant aussi petits qu'on voudra.

Dans le cas de M_i fini, nous pourrons, d'après une remarque précédente, mettre de côté les cas où $\int_{x_0}^{\infty} f_1 x \, dx$ serait infiniment petite, comme, par exemple,

$$\int_{x_0}^{\infty} e^{-a x} dx, \quad \int_{x_0}^{\infty} \frac{dx}{x^{1+a^2}}.$$

Restent alors les hypothèses principales suivantes :

$$f_1 x = \frac{1}{x^{1-\alpha'}}, \quad f_1 x = \frac{1}{(lx)^{\beta'}}, \quad f_1 x = \frac{1}{(llx)^{\gamma'}}, \quad \text{etc.},$$

ou, plus généralement, $f_1 x$ fonction de forme quelconque infiniment petite de ces ordres. α est < 1.

Si

$$f_1 x = \frac{V}{x^{1-\alpha'}},$$

V désignant une fonction de x qui reste finie, ou qui, du moins, si elle devient infiniment grande, reste infiniment petite par rapport à toute puissance positive de x, on devra avoir pour x infiniment grand,

$$\psi x \overset{=}{<} V' x^{1-\alpha'-\alpha''},$$

V′ remplissant les mêmes conditions que V.

De même,

$$\text{Si} \quad f_1 x = \frac{V}{(lx)^{\beta'}}, \quad \text{on devra avoir} \quad \psi x \overset{=}{<} V'(lx)^{\beta'-\beta''},$$

V et V′ désignant cette fois ou des fonctions de x qui restent finies quand x est infiniment grand, ou du moins des fonctions infiniment petites par rapport à toute puissance positive de lx. Etc.

Inversement,

$$\text{Si} \quad \psi x = V' x^{\alpha'}, \quad \text{on devra avoir} \quad f_1 x \overset{=}{<} \frac{V}{x^{\alpha'+\alpha''}},$$

$$\text{Si} \quad \psi x = V' (lx)^{\beta'}, \quad \text{on devra avoir} \quad f_1 x \overset{=}{<} \frac{V}{(lx)^{\beta'+\beta''}},$$

etc., etc.;

α', β', α'', β'' désignent des quantités aussi petites qu'on voudra.

Si M_i était infiniment petit pour i infiniment grand, la condition de convergence pourrait se trouver remplie même pour $f_1 x$ infiniment grand, l'ordre de cet infiniment grand ayant un rapport convenable avec l'ordre de grandeur ou de petitesse des fonctions m_i, M_i, $\psi(x_i)$.

Application. Supposons que φn soit remplacé par $\sin(np_1 + q)$ ou par $\cos(np_1 + q)$, ψn par gln et $P(\psi n)$ par $\sin(gln)$ ou par $\cos(gln)$. p_1 et q_1 désignant des constantes, et g une fonction finie de n; prenons $p = \pi$, nous serons dans le cas de M_i et m_i finis, et toutes nos conditions seront remplies, pourvu que l'on finisse par avoir

$$f_1 x = \frac{V}{(lx)^{1-a^2}},$$

a étant aussi petit qu'on veut, et V désignant, comme tout à l'heure, une fonction qui reste finie, ou qui du moins devient infiniment petite par rapport à toute puissance positive de lx.

Or, nous tombons alors dans les séries que M. Björling a considérées; car on a

$$\sum_{n}^{n} \text{arc tang} \frac{v}{g' + n} = g \int_{n_0}^{n} \frac{dn}{n} = gln,$$

g et g' désignant des fonctions finies de n, si v est finie, ainsi que le suppose M. Björling. Donc, ces séries et les intégrales correspondantes seront convergentes, pourvu que $f_1 x$ finisse par devenir infiniment petit, au moins de l'ordre $\frac{V}{(lx)^{1-a^2}}$, ce qui donne plus de latitude que la règle donnée par ce géomètre.

Remarque. On pourrait encore reculer les limites de nos conditions de convergence, en prenant pour celle d'une série $\sum Fn$, la condition

$$Fn = \frac{u}{n\, ln\, lln \ldots (l^k n)^{1+a}}.$$

Des mouvements relatifs en général, et spécialement des mouvements relatifs sur la Terre;

Par M. QUET,
Professeur de Physique au Lycée Saint-Louis.

La déviation orientale qu'éprouvent les corps dans leur chute libre, le déplacement continuel du vertical dans lequel oscille le pendule abandonné à lui-même, les diverses évolutions qu'effectuent les corps tournants dans le gyroscope de M. Foucault, sont les principaux phénomènes par lesquels on rend sensible aux yeux et d'une maniere purement expérimentale le mouvement de la Terre autour de son axe. Les problèmes de Mécanique auxquels donnent lieu ces divers phénomenes, généralement tous ceux qui concernent les mouvements relatifs terrestres, ou même les mouvements qu'on rapporte à trois axes mobiles quelconques, peuvent être analysés par une méthode uniforme de calcul. Je me propose d'exposer d'abord cette méthode et de l'appliquer ensuite à divers cas particuliers.

PREMIÈRE SECTION.

Méthode générale pour former les équations différentielles des mouvements relatifs, lorsqu'on rapporte ces mouvements à trois axes rectangulaires qui se déplacent suivant une loi quelconque.

§ Ier.

Préliminaires.

Je considère trois axes rectangulaires $c\xi$, $c\eta$, $c\zeta$, et je désigne par ξ, η, ζ, $m\mathfrak{X}$, $m\mathfrak{Y}$, $m\mathfrak{Z}$, $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$ les coordonnées d'un point mobile m, les projections sur les axes fixes de la résultante des forces

appliquées à ce point et celles d'un déplacement virtuel donné au mobile. On a, par les principes généraux de la Dynamique,

$$(1)\qquad \sum m\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\delta\xi + \frac{d^2\eta}{dt^2}\delta\eta + \frac{d^2\zeta}{dt^2}\delta\zeta\right) = \sum m(\mathfrak{X}\delta\xi + \mathfrak{Y}\delta\eta + \mathfrak{Z}\delta\zeta),$$

la somme $\sum$ s'étendant à tous les points matériels du système que l'on considère.

ox, oy, oz sont trois axes rectangulaires mobiles; a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' sont les cosinus des angles que ces axes font respectivement avec chacun des axes fixes $c\xi$, $c\eta$, $c\zeta$.

Je pose

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
u &= a\frac{d^2\xi}{dt^2} + b\frac{d^2\eta}{dt^2} + c\frac{d^2\zeta}{dt^2},\\
v &= a'\frac{d^2\xi}{dt^2} + b'\frac{d^2\eta}{dt^2} + c'\frac{d^2\zeta}{dt^2},\\
w &= a''\frac{d^2\xi}{dt^2} + b''\frac{d^2\eta}{dt^2} + c''\frac{d^2\zeta}{dt^2},\\
X &= a\mathfrak{X} + b\mathfrak{Y} + c\mathfrak{Z},\\
Y &= a'\mathfrak{X} + b'\mathfrak{Y} + c'\mathfrak{Z},\\
Z &= a''\mathfrak{X} + b''\mathfrak{Y} + c''\mathfrak{Z},\\
\delta x &= a\delta\xi + b\delta\eta + c\delta\zeta,\\
\delta y &= a'\delta\xi + b'\delta\eta + c'\delta\zeta,\\
\delta z &= a''\delta\xi + b''\delta\eta + c''\delta\zeta.
\end{aligned}\right.$$

On voit par ces équations que mX, mY, mZ, δx, δy, δz, sont les projections sur les axes mobiles de la force appliquée au point m et du déplacement virtuel donné à ce point. Les quantités u, v, w sont les projections sur les mêmes axes des trois accélérations absolues $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, $\frac{d^2\eta}{dt^2}$, $\frac{d^2\zeta}{dt^2}$; elles sont les projections sur les axes mobiles de l'accélération absolue du point m.

Au moyen des équations connues qui lient les neuf cosinus entre

eux, on tire des équations (2),

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = au + a'v + a''w,$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = bu + b'v + b''w,$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = cu + c'v + c''w,$$

$$x = aX + a'Y + a''Z,$$

$$y = bX + b'Y + b''Z,$$

$$z = cX + c'Y + c''Z,$$

$$\delta\xi = a\delta x + a'\delta y + a''\delta z,$$

$$\delta\eta = b\delta x + b'\delta y + b''\delta z,$$

$$\delta\zeta = c\delta x + c'\delta y + c''\delta z.$$

En portant ces valeurs dans la formule générale (1), on a

$$(3) \qquad \sum m(u\delta x + v\delta y + w\delta z) = \sum m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Cette formule donnera les équations différentielles des mouvements relatifs lorsqu'on connaîtra les valeurs de u, v, w en fonction de x, y, z; il suffira de la traiter alors d'après les méthodes de la Mécanique analytique. Ainsi, tout le problème revient à déterminer l'accélération absolue en fonction des coordonnées de la position relative.

Lorsque le système mobile se réduit à un point matériel entièrement libre, la formule précédente donne immédiatement les trois équations suivantes :

$$(4) \qquad u = X, \quad v = Y, \quad w = Z.$$

Les projections sur les axes mobiles de la force perdue par le point m dans l'instant dt étant $m(X - u)$, $m(Y - v)$, $m(Z - w)$, la formule (3) exprime que ces forces perdues se font équilibre; d'après cela, on voit qu'on peut conclure immédiatement la formule générale (3) du principe de d'Alembert, combiné avec le principe des vitesses virtuelles.

§ II.

Exprimer la vitesse absolue en fonction de la vitesse relative.

Par les règles de la transformation des coordonnées, on a

$$(5)\quad \begin{cases} \xi = \xi' + ax + a'y + a''z, \\ \eta = \eta' + bx + b'y + b''z, \\ \zeta = \zeta' + cx + c'y + c''z. \end{cases}$$

On a désigné par ξ', η', ζ' les coordonnées de l'origine mobile rapportées aux axes $c\xi$, $c\eta$, $c\zeta$. On tire des équations (5) :

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{d\xi'}{dt} + \dfrac{a\,dx + a'\,dy + a''\,dz}{dt} + \dfrac{x\,da + y\,da' + z\,da'}{dt}, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{d\eta'}{dt} + \dfrac{b\,dx + b'\,dy + b''\,dz}{dt} + \dfrac{x\,db + y\,db' + z\,db''}{dt}, \\ \dfrac{d\zeta}{dt} = \dfrac{d\zeta'}{dt} + \dfrac{c\,dx + c'\,dy + c''\,dz}{dt} + \dfrac{x\,dc + y\,dc' + z\,dc''}{dt}. \end{cases}$$

Les premiers membres de ces équations sont respectivement égaux aux projections sur les axes fixes de la vitesse absolue du point m; les dérivées de x, y, z qui entrent dans les seconds membres sont les projections sur les axes mobiles de la vitesse relative du point considéré. Ces équations donnent, par conséquent, la vitesse absolue en fonction de la vitesse relative. On peut leur faire subir une transformation utile; je pose, pour cela,

$$(7)\quad \begin{cases} \mathrm{U} = \dfrac{a\,d\xi + b\,d\eta + c\,d\zeta}{dt}, \\ \mathrm{V} = \dfrac{a'\,d\xi + b'\,d\eta + c'\,d\zeta}{dt}, \\ \mathrm{W} = \dfrac{a''\,d\xi + b''\,d\eta + c''\,d\zeta}{dt}, \\ \mathrm{U}' = \dfrac{a\,d\xi' + b\,d\eta' + c\,d\zeta'}{dt}, \\ \mathrm{V}' = \dfrac{a'\,d\xi' + b'\,d\eta' + c'\,d\zeta'}{dt}, \\ \mathrm{W}' = \dfrac{a''\,d\xi' + b''\,d\eta' + c''\,d\zeta'}{dt}. \end{cases}$$

Il est clair, par ces équations, que les quantités U, V, W; U', V', W' sont respectivement les projections sur les axes mobiles des vitesses absolues du point m et de l'origine mobile o.

J'ajoute les équations (6), après les avoir multipliées respectivement par a, b, c, ou par a', b', c', ou bien encore par a'', b'', c'', et j'ai

$$(8)\quad \begin{cases} U = U' + \dfrac{dx}{dt} + y\,\dfrac{a\,da' + b\,db' + c\,dc'}{dt} + z\,\dfrac{a\,da' + b\,db' + c\,dc'}{dt}, \\ V = V' + \dfrac{dy}{dt} + x\,\dfrac{a'\,da + b'\,db + c'\,dc}{dt} + z\,\dfrac{a'\,da'' + b'\,db'' + c'\,dc''}{dt}, \\ W = W' + \dfrac{dz}{dt} + x\,\dfrac{a''\,da + b''\,db + c''\,dc}{dt} + y\,\dfrac{a''\,da' + b''\,db' + c''\,dc'}{dt}. \end{cases}$$

Les six fonctions de cosinus qui entrent dans ces équations ne sont pas distinctes et peuvent aisément se réduire à trois. Pour cela je pose

$$(9)\quad \begin{cases} p = \dfrac{a''\,da' + b''\,db' + c''\,dc'}{dt}, \\ q = \dfrac{a\,da'' + b\,db'' + c\,dc''}{dt}, \\ r = \dfrac{a'\,da + b'\,db + c'\,dc}{dt}. \end{cases}$$

On peut écrire les équations (8) sous la forme suivante :

$$(10)\qquad U = U' + U_1,\quad V = V' + V_1,\quad W = W' + W_1,$$

en désignant par U_1, V_1, W_1 les parties de U, V, W qui ne dépendent pas explicitement de la vitesse de l'origine mobile o. En ayant égard aux équations (9) et aux relations connues qui lient les neuf cosinus entre eux, on trouve aisément les expressions suivantes :

$$(11)\quad U_1 = \frac{dx}{dt} + qz - ry,\quad V_1 = \frac{dy}{dt} + rx - pz,\quad W_1 = \frac{dz}{dt} + dy - qx.$$

Les équations (10) et (11) donnent une deuxième solution du problème proposé.

J'ajoute les équations (10), après les avoir multipliées respectivement par a, a', a'', ou par b, b', b'', ou bien par c, c', c'', et j'ai, en

ayant égard aux équations (7).

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{d\xi'}{dt} + aU_1 + a'V_1 + a''W_1, \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{d\eta'}{dt} + bU_1 + b'V_1 + b''W_1, \\ \dfrac{d\zeta}{dt} = \dfrac{d\zeta'}{dt} + cU_1 + c'V_1 + c''W_1. \end{cases}$$

Les équations (12) peuvent remplacer les équations (6); elles ont cet avantage, que leur forme est la même que celle des équations (5).

§ III.

Exprimer l'accélération absolue en fonction de l'accélération apparente.

Pour avoir les projections sur les axes fixes de l'accélération absolue du point m, c'est-à-dire les dérivées du second ordre de ξ, η, ζ, il suffit de prendre les dérivées des équations (12) en y considérant U_1, V_1, W_1 comme des fonctions déterminées par l'équation (11); on passera de là aux projections u, v, w sur les axes mobiles, de la même manière qu'on a obtenu U, V, W des équations (6). Mais il n'est pas nécessaire de refaire ces calculs, car les équations (12) ont la même forme que les équations (5), et, traitées de la même manière, elles doivent conduire à des résultats analogues. Si donc on désigne par u', v', w' les projections sur les axes mobiles de l'accélération de l'origine o, c'est-à-dire si l'on pose

$$(13)\quad \begin{cases} u' = \dfrac{a\,d^2\xi' + b\,d^2\eta' + c\,d^2\zeta'}{dt^2}, \\ v' = \dfrac{a'\,d^2\xi' + b'\,d^2\eta' + c'\,d^2\zeta'}{dt^2}, \\ w' = \dfrac{a''\,d^2\xi' + b''\,d^2\eta' + c''\,d^2\zeta'}{dt^2}, \end{cases}$$

on aura, d'après les équations (10) et (11),

$$(14)\quad \begin{cases} u = u' + \dfrac{dU_1}{dt} + qW_1 - rV_1, \\ v = v' + \dfrac{dV_1}{dt} + rU_1 - pW_1, \\ w = w' + \dfrac{dW}{dt} + pV_1 - qU_1. \end{cases}$$

En effectuant les calculs indiqués par ces équations et en désignant par u', v', w' les parties de u, v, w qui ne contiennent pas les dérivées de x, y, z, c'est-à-dire en posant

$$(15)\quad \begin{cases} u'' = z\dfrac{dq}{dt} - y\dfrac{dr}{dt} + q(py - qx) - r(rx - pz) + u', \\ v'' = x\dfrac{dr}{dt} - z\dfrac{dp}{dt} + r(qz - ry) - p(py - qx) + v', \\ w'' = y\dfrac{dp}{dt} - x\dfrac{dq}{dt} + p(rx - pz) - q(qz - ry) + w', \end{cases}$$

les équations (14) donnent immédiatement

$$(16)\quad \begin{cases} u = \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\left(q\dfrac{dz}{dt} - r\dfrac{dy}{dt}\right) + u'', \\ v = \dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\left(r\dfrac{dx}{dt} - p\dfrac{dz}{dt}\right) + v', \\ w = \dfrac{d^2z}{dt^2} + 2\left(p\dfrac{dy}{dt} - q\dfrac{dx}{dt}\right) + w''. \end{cases}$$

Si l'on porte ces valeurs de u, v, w dans la formule (3), on aura la formule générale de dynamique pour tous les mouvements relatifs. Ainsi le problème que nous nous étions proposé se trouve maintenant résolu.

Si l'on considère un point M invariablement lié aux axes mobiles et dont la position par rapport à ces axes est définie par les coordonnées x, y, z, pour ce point les dérivées de x, y, z sont nulles, et l'on voit, par les équations (16), qu'alors u, v, w se réduisent à u'', v'', w''; d'où l'on conclut que les quantités u'', v'', w'' sont les projections sur les axes mobiles de l'accélération absolue qu'aurait le point m si, dans la position qu'il occupe à l'époque t, il se trouvait invariablement lié aux axes mobiles.

Les quantités p, q, r ont une signification connue et qu'on peut déduire facilement des équations (10) et (11); elles sont les composantes suivant les axes mobiles de la vitesse angulaire avec laquelle ces axes tournent autour de leur axe instantané relatif.

Enfin, nous remarquerons que l'accélération dont les projections

sur les axes mobiles sont

$$2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right), \quad 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right), \quad 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right)$$

est égale et directement opposée à ce que Coriolis a appelé *la force centrifuge composée;* il est facile de voir que cette accélération est, comme l'a démontré Coriolis, perpendiculaire à la vitesse apparente du point m, ainsi qu'à la direction de l'axe instantané du système ox, oy, oz, et qu'elle est égale au double produit de la vitesse angulaire instantanée de ce système par la projection de la vitesse apparente du point m sur un plan perpendiculaire à l'axe instantané.

§ IV.

Application des formules générales aux mouvements relatifs terrestres, lorsqu'on rapporte ces mouvements à trois axes rectangulaires fixes sur la Terre et qu'on n'a égard qu'au mouvement diurne.

Si par le point o, qui est maintenant un point fixe de la Terre, on mène une parallèle à l'axe terrestre, on aura l'axe instantané de rotation autour duquel les axes fixes sur la Terre, savoir ox, oy, oz, tournent pendant qu'ils sont emportés par le mouvement diurne. La vitesse angulaire de cette rotation n'est autre chose que la vitesse angulaire de la Terre, et sera désignée par n. Si l'on porte la vitesse n sur la partie nord de cet axe instantané et qu'on la projette ensuite sur les axes ox, oy, oz, on aura les valeurs de p, q, r. Je prends arbitrairement l'axe oz, et je désigne par ω l'angle qu'il fait avec la partie sud de l'axe instantané; par le point o, je mène un plan perpendiculaire à oz et je projette sur ce plan la partie nord de l'axe instantané; c'est sur cette projection que je place l'axe ox, et je mets l'axe oy à gauche de ox. De cette manière, les angles que la partie nord de l'axe instantané fait avec ox, oy, oz sont

$$90 - \omega, \quad 0, \quad 180 - \omega,$$

et les composantes p, q, r sont respectivement

$$17 \qquad p = n\sin\omega, \quad q = 0, \quad r = -n\cos\omega;$$

d'ailleurs les dérivées de p, q, r sont nulles.

Le point o décrivant uniformément un cercle de rayon ρ avec la vitesse angulaire n, la force centrale pour ce point a pour expression $n^2\rho$ et est dirigé suivant le rayon ρ de la circonférence vers le centre. Si l'on désigne par λ, λ', λ'' les cosinus des angles constants que ce rayon fait avec les axes ox, oy, oz, les projections sur ces axes de la force centrale seront $n^2\rho\lambda$, $n^2\rho\lambda'$, $n^2\rho\lambda''$, et, d'après la signification des lettres u', v', w', on aura

$$18 \qquad u' = n^2\rho\lambda, \quad v' = n^2\rho\lambda', \quad w' = n^2\rho\lambda''.$$

Les valeurs de u'', v'', w'' données par l'équation (15) deviennent

$$19 \qquad \begin{cases} u'' = n^2\rho\lambda - n^2\cos\omega\,(x\cos\omega + z\sin\omega), \\ v'' = n^2\rho\lambda' - n^2 y, \\ w'' = n^2\rho\lambda'' - n^2\sin\omega\,(x\cos\omega + z\sin\omega). \end{cases}$$

Il est facile de voir que $-u''$, $-v''$, $-w''$ sont les projections sur ox, oy, oz de la force centrifuge qu'aurait le mobile m en vertu de la rotation de la Terre, si, dans la position qu'il occupe à l'époque t, il était invariablement lié à la Terre; en effet, dans ces conditions, l'accélération absolue du mobile m qui est donnée par les trois composantes u', v', w' est égale et opposée à la force centrifuge de ce point.

Quant aux valeurs de u, v, w données par l'équation (16), elles deviennent

$$20 \qquad \begin{cases} u = \dfrac{d^2x}{dt^2} + 2n\cos\omega\dfrac{dy}{dt} + u, \\ v = \dfrac{d^2y}{dt} - 2n\cos\omega\dfrac{dx}{dt} - 2n\sin\omega\dfrac{dz}{dt} + v'', \\ w = \dfrac{d^2z}{dt^2} + 2n\sin\omega\dfrac{dy}{dt} + w''. \end{cases}$$

D'après cela, les équations différentielles d'un problème quelconque sur les mouvements relatifs terrestres pourront être tirées de la formule générale (3) en y considérant u, v, w comme des fonctions déterminées par l'équation (20).

En général, pour définir la direction des axes mobiles ox, oy, oz par rapport aux axes fixes $c\xi$, $c\eta$, $c\zeta$, on peut employer trois angles e, f, ω convenablement choisis. ω est l'angle que oz fait avec $c\zeta$; il

peut varier entre 0 et 180°. Par le point o, je mene les lignes $o\xi$, $o\eta$ respectivement parallèles à $c\xi$, $c\eta$, et je désigne par oA la projection de oz sur le plan $\xi o\eta$. $e = 90°$ est l'angle que oA fait avec $o\xi$; il peut varier entre $+\infty$ et $-\infty$; on le compte à partir de $o\xi$, et de droite à gauche lorsqu'il est positif. Je désigne par NoN' l'intersection du plan xoy avec le plan $\xi o\eta$; cette ligne NN' est perpendiculaire à oA; l'une de ses parties, celle que je désignerai par oN, sera déterminée par l'angle e décrit à partir de $o\xi$. C'est à partir de oN et dans le plan xoy que l'on compte l'angle f, en allant de droite à gauche lorsqu'il est positif. Cet angle détermine la direction de ox; il peut varier entre $+\infty$ et $-\infty$; l'axe cy est supposé à gauche de ox; il en est de même de $c\eta$ par rapport à $c\xi$.

Au moyen de ces angles et de la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique, on obtient les valeurs suivantes, qui sont connues :

$$a = \cos f \cos e - \sin f \sin e \cos \omega,$$

$$a' = -\sin f \cos e - \cos f \sin e \cos \omega,$$

$$a'' = \sin e \sin \omega;$$

$$b = \cos f \sin e + \sin f \cos e \cos \omega,$$

$$b' = -\sin f \sin e + \cos f \cos e \cos \omega,$$

$$b'' = -\cos e \sin \omega;$$

$$c = \sin f \sin \omega,$$

$$c' = \cos f \sin \omega,$$

$$c'' = \cos \omega.$$

De là on déduit pour p, q, r les expressions très-connues :

$$p = \sin f \sin \omega \frac{de}{dt} - \cos f \frac{d\omega}{dt},$$

$$q = \cos f \sin \omega \frac{de}{dt} - \sin f \frac{d\omega}{dt},$$

$$r = \frac{df}{dt} + \cos \omega \frac{de}{dt}.$$

Lorsqu'il s'agit des mouvements relatifs terrestres et qu'on suppose fixe l'axe de la Terre, on peut placer sur cet axe la droite $c\zeta$ et la

diriger vers le ciel austral; alors le plan $\xi o \eta$ est perpendiculaire à l'axe terrestre.

Toute droite fixe sur la Terre et perpendiculaire à son axe tourne avec la même vitesse que la Terre en allant de gauche à droite, et décrit l'angle nt dans le temps t; il en sera ainsi pour les droites oA, oN, qui sont invariablement liées à la Terre et parallèles à son équateur, lorsqu'on suppose que les axes mobiles cx, cy, cz sont fixes sur la Terre. L'angle e se rapporte à la ligne oN; sa valeur est $e = e_0 - nt$ en désignant par e_0 sa valeur initiale. L'angle f est constant, puisque oN et ox sont fixes sur la Terre; d'ailleurs cet angle peut être arbitraire; je le prends égal à $-\frac{\pi}{2}$, ce qui fait coïncider oy avec oN et place l'axe ox parallèlement à la projection de l'axe terrestre sur le plan xoy. Alors

$$\cos f = 0, \quad \sin f = -1, \quad \frac{de}{dt} = -n;$$

d'ailleurs ω est constant, et donne

$$\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

D'après ces valeurs, les expressions générales de p, q, r se réduisent à

$$p = n \sin \omega, \quad q = 0, \quad r = -n \cos \omega.$$

Ce sont les mêmes valeurs qui ont déjà été trouvées d'une autre manière.

DEUXIÈME SECTION.

Oscillations des pendules simples dans le vide lorsqu'on a égard au mouvement de rotation de la Terre.

§ Ier.

Je rapporte le mouvement du pendule à trois axes rectangulaires ox, oy, oz fixes sur la Terre et dont l'origine est au point même de suspension. x, y, z, mX, mY, mZ, l, mN sont les coordonnées du

point matériel, les projections sur les axes de la force qui lui est appliquée, la longueur du fil, sa tension.

Si aux composantes mX, mY, mZ on adjoint une force égale et directement opposée à la tension du fil, c'est-à-dire si l'on suppose le pendule soumis à la force dont les composantes sont

$$m\left(X - \frac{Nx}{l}\right), \quad m\left(Y - \frac{Ny}{l}\right), \quad m\left(Z - \frac{Nz}{l}\right);$$

on pourra considérer le point matériel comme entièrement libre, et l'on aura, par les équations (4),

$$u = X - \frac{Nx}{l}, \quad v = Y - \frac{Ny}{l}, \quad w = Z - \frac{Nz}{l},$$

u, v, w étant les projections sur ox, oy, oz de l'accélération absolue du mobile.

Si par le point o on mène une parallèle à l'axe terrestre et qu'on la projette sur le plan xoy, en plaçant l'axe ox sur cette projection, on aura pour u, v, w les expressions données par l'équation (20), et, au moyen d'elles, on pourra écrire ainsi les équations précédentes

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Nx}{l} &= X - u' - 2k\frac{dy}{dt}, \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Ny}{l} &= Y - v' + 2k\frac{dx}{dt} + 2k'\frac{dz}{dt}, \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Nz}{l} &= Z - w' - 2k'\frac{dy}{dt}. \end{aligned}\right.$$

On a posé, pour plus de simplicité,

$$k = n\cos\omega, \quad k' = n\sin\omega.$$

Ces mêmes équations peuvent se déduire facilement de la formule fondamentale (3) par les procédés ordinaires de la Mécanique analytique.

Les quantités $-u'$, $-v'$, $-w'$ qui entrent dans l'équation (21) sont, comme on l'a déjà vu, les projections sur les axes de la force centrifuge terrestre pour le lieu défini par les coordonnées x, y, z; par conséquent, $X - u'$, $Y - v'$, $Z - w'$ sont les composantes de la

pesanteur pour ce lieu, si l'on admet que l'attraction terrestre est la seule force appliquée au pendule.

L'axe oz étant arbitraire, je le place sur la direction d'équilibre du pendule; alors les équations (21) montrent que, dans l'état d'équilibre, les deux composantes de la pesanteur $X - u''$, $Y - v''$ sont nulles, c'est-à-dire que la pesanteur dans le lieu ou le point matériel est en équilibre, est dirigée suivant le prolongement du fil à plomb. Je désigne par g l'intensité de la pesanteur dans ce lieu, et je suppose que la pesanteur reste constante dans toutes les positions que prend le pendule dans l'état de mouvement. Dans cette hypothèse, qui est admissible même pour les plus grands écarts des pendules soumis à l'observation, $X - u''$, $Y - v''$ sont nuls, $Z - w''$ est égal à g, et les équations précédentes se réduisent à

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Nx}{l} = -2k\frac{dy}{dt},\\ &\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{Ny}{l} = 2k\frac{dx}{dt} - 2k'\frac{dz}{dt},\\ &\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{Nz}{l} = g - 2k'\frac{dy}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Maintenant l'angle ω qui entre dans k et k' désigne le complément de la latitude pour le lieu dans lequel le pendule est en équilibre; γ étant cette latitude, on aura donc

$$k = n\sin\gamma, \quad k' = n\cos\gamma.$$

Les équations (22) ne sont autre chose que celles que Poisson a données dans son Mémoire sur les projectiles.

Si l'on a égard aux valeurs de u'', v'', w'' données par l'équation (19), on voit que la différence entre les équations approximatives (22) et les équations rigoureuses (20) consiste en ce que dans l'équation (22) on néglige divers termes qui ont pour facteurs les produits de la fraction excessivement petite n^2 par les lignes x, y, $l - z$.

D'après les équations (21) ou (22), on voit qu'on peut former les équations du mouvement relatif du pendule, comme s'il s'agissait d'un mouvement absolu, pourvu que, d'une part, on remplace la direction et la grandeur de l'attraction terrestre par celles de la pesanteur,

et que, d'une autre part, on introduise une force complémentaire dont les composantes sont

$$-2n\cos\omega\frac{dy}{dt},\quad 2n\cos\omega\frac{dx}{dt}+2n\sin\omega\frac{dz}{dt},\quad -2n\sin\omega\frac{dy}{dt}.$$

Ces composantes montrent facilement que la force complémentaire est perpendiculaire à la vitesse apparente du mobile et à l'axe terrestre; elles font voir aussi que la grandeur de cette force est égale à

$$2n\frac{ds}{dt}\sin\varepsilon,$$

en désignant par ε l'angle que la vitesse apparente $\frac{ds}{dt}$ fait avec l'axe du monde.

Si l'on joint aux équations (22) l'équation

$$x^2+y^2+z^2=l^2, \tag{23}$$

on a quatre relations entre quatre fonctions du temps, x, y, z, N, ce qui suffit pour déterminer ces fonctions. On peut facilement éliminer N entre les équations (22) et obtenir deux équations qui ne contiennent que les fonctions x, y, z, et qui, jointes à l'équation (23), suffiront pour déterminer ces dernières fonctions. On élimine N en formant l'équation des forces vives et celle des aires sur le plan horizontal.

J'ajoute les équations (23) après les avoir multipliées respectivement par $2dx$, $2dy$, $2dz$, ou bien par y, $-x$ et 0; j'ai ainsi

$$d\left(\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2}\right)=2g\,dz, \tag{24}$$

$$d\left(y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}\right)=-k\,d(x^2+y^2)-2k'x\,dz. \tag{25}$$

On voit que la force complémentaire a disparu dans l'équation (24) des forces vives, ce qui tient à sa direction.

Au lieu d'employer dans les équations (23), (24), (25) les coordonnées rectilignes, il peut être utile de faire usage de coordonnées polaires; aussi nous allons maintenant les transformer sous ce point de vue.

Je désigne par ψ l'angle que le vertical du pendule fait avec le méridien zox, et je compte cet angle à partir du méridien en allant du nord au sud par l'est. ψ est aussi l'angle que la projection horizontale du pendule fait avec la ligne du nord ox. Je désigne par θ l'angle que le pendule fait avec la verticale oz.

Les trois coordonnées polaires du point matériel du pendule sont l, θ, ψ; la première est constante; la deuxième est toujours positive et peut varier entre 0 et 180°; la troisième peut être positive ou négative et varier entre $+\infty$ et $-\infty$.

Dans ces conditions, on a

$$x = l \sin\theta \cos\psi, \quad y = l \sin\theta \sin\psi, \quad z = l \cos\theta.$$

De là on déduit les formules suivantes, qui sont, au reste, connues :

$$\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = l^2 \left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} \right),$$

$$y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} = -l \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt}.$$

Par le moyen de cette transformation, les équations (24), (25) deviennent

$$(26) \qquad d\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} - \frac{2g}{l} \cos\theta \right) = 0,$$

$$(27) \qquad d\left[\sin^2\theta \frac{d(\psi - kt)}{dt} \right] = -2k' \cos\psi \sin^2\theta \, d\theta.$$

Les équations (26), (27) ont le même degré de généralité que les équations (22); elles s'appliquent aux oscillations des pendules de toute longueur et de toute amplitude, pourvu que ces amplitudes ne dépassent pas les limites dans lesquelles on peut regarder la pesanteur comme une force constante. Ces équations ne diffèrent des équations tout à fait rigoureuses qu'on aurait pu tirer de l'équation (21), que par la suppression de termes dont la petitesse est de même ordre que la fraction n^2.

Je pose

$$\varphi = \psi - kt,$$

et j'ai

$$\frac{d\psi^2}{dt^2} = \frac{d\varphi^2}{dt^2} + 2k\frac{d\varphi}{dt} + k^2.$$

Je porte cette valeur dans l'équation (26), et j'ai

$$d\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{2g}{l}\cos\theta\right) = -2k\,d.\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt} - k^2\,d.\sin^2\theta$$

Cette équation se réduit, au moyen de l'équation (27), à

$$d\left(\frac{d\theta^2}{dt} + \sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{2g}{l}\cos\theta\right)$$

$$= 4kk'\cos(\varphi + kt)\sin^2\theta\,d\theta - k^2\,d\sin^2\theta.$$

Or

$$kk' = n^2\sin\eta\cos\eta;$$

donc les deux termes du second membre de cette équation ne contiennent, après avoir été divisés par dt, que des facteurs dont la valeur ne dépasse pas des limites fort restreintes, et, en outre, le facteur n^2; le second membre est donc du degré de petitesse qu'il est permis de négliger, et l'on peut le réduire à zéro. Alors les équations du mouvement du pendule se présentent sous cette forme :

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} &d\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{2g}{l}\cos\theta\right) = 0,\\ &d\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt} = -2k'\cos(\varphi + kt)\sin^2\theta\,d\theta.\\ &\psi = \varphi + kt.\end{aligned}\right.$$

Pour résoudre ces équations, on négligera, dans une première approximation, la fonction $2k'\cos(\varphi + kt)\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}$, qui est très-petite, et, dans une seconde approximation, par l'application de la méthode de la variation des constantes arbitraires, on examinera son influence.

Lorsqu'on n'a pas égard à la fonction perturbatrice, les équations

du mouvement du pendule se réduisent à

$$(29)\qquad d\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{2g}{l}\cos\theta\right) = 0.$$

$$(30)\qquad d.\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt} = 0,$$

$$(31)\qquad \psi = \varphi + kt.$$

C'est sous cette forme que je les considérerai d'abord. Les équations (29), (30) ne contiennent pas explicitement la vitesse n; elles restent les mêmes soit pour le vrai pendule, soit pour le pendule tel qu'on le considère ordinairement dans les Traités de Mécanique; c'est là un avantage qui permet d'étudier avec facilité les lois du vrai pendule en les comparant aux lois bien connues des pendules ordinaires.

Je fais d'abord abstraction du mouvement de rotation de la Terre, et je suppose un pendule de longueur l suspendu au point o et soumis à une force constante, égale à g et parallèle à la direction d'équilibre du vrai pendule; le mouvement de ce pendule est donné par les équations (29), (30). Lagrange a appris à intégrer ces équations; je représente leurs intégrales par

$$(32)\qquad \theta = f(t, a, b, c, d),$$

$$(33)\qquad \varphi = F(t, a, b, c, d),$$

a, b, c, d étant quatre constantes arbitraires qui peuvent être déterminées par les conditions initiales; l'équation (32) donne à chaque époque l'écart angulaire du pendule par rapport à la ligne d'équilibre, et l'équation (33) donne son azimut compté à partir du nord.

Lorsque l'on considère le vrai pendule, il faut prendre les trois équations (29), (30), (31), et l'on a pour leurs intégrales générales

$$(34)\qquad \theta = f(t, a, b, c, d),$$

$$(35)\qquad \psi = kt + F(t, a, b, c, d).$$

Supposons maintenant qu'on donne aux constantes arbitraires les mêmes valeurs dans les deux systèmes d'équations (32), (33) et (34), (35), et désignons, pour abréger, par pendule de comparaison le

pendule qui est alors représenté par les équations (32), (33); par la comparaison des deux systèmes d'équations, on arrive immédiatement aux conclusions suivantes.

Le vrai pendule et le pendule de comparaison partent en même temps de la même position initiale; à toute époque du mouvement, ils sont constamment à la même distance angulaire de la verticale, par conséquent, ils ont les mêmes maxima et minima d'amplitude et les atteignent simultanément. Les azimuts des deux pendules qui sont les mêmes à l'origine du temps se séparent immédiatement après; à une époque quelconque t, on passe du pendule de comparaison au vrai pendule en faisant tourner l'azimut du pendule de comparaison d'un angle égal à kt, rotation qui doit se faire dans le même sens que le mouvement apparent du Soleil, puisque kt est positif lorsque t est positif; la distance angulaire des deux verticaux est donc égale à kt, et elle croît uniformément avec la vitesse $k = n \sin \gamma$.

Si, par suite des conditions initiales, le vertical du pendule de comparaison reste invariable, les sommets de la spirale sphérique décrite par le vrai pendule s'écarteront, d'après ce qu'on vient de dire, de ce vertical primitif, en allant dans le sens du mouvement apparent du Soleil et avec une vitesse angulaire qui, rapportée à la verticale, est égale à $n \sin \gamma$.

Les considérations générales qui précèdent peuvent aussi être présentées sous la forme suivante. Je suppose que l'on ait décrit sur la sphère des pendules la spirale que doit parcourir le pendule de comparaison en vertu des données initiales, et qu'à partir de l'origine du temps on fasse tourner la sphère des pendules autour de son diamètre vertical avec la vitesse angulaire constante $k = n \sin \gamma$, le mouvement de la sphère s'exécutant dans le sens du mouvement apparent du Soleil; le vrai pendule restera constamment, pendant ses oscillations, sur cette spirale sphérique tournante.

Les oscillations infiniment petites des pendules ne sont qu'un cas particulier des mouvements généraux que nous venons d'examiner. C'est à propos d'un curieux Mémoire de Mairan sur les pendules, que Clairaut forma pour la première fois les équations différentielles du mouvement des pendules ordinaires considérés dans les conditions les plus générales : en examinant ce que devient la spirale décrite

par la projection horizontale du pendule, lorsque l'amplitude des oscillations décroît, il fut très-surpris de voir que cette spirale dégénère en une ellipse centrée sur la position d'équilibre du pendule et ayant des axes de grandeur et de direction invariables pour des conditions initiales données.

Puisque la projection horizontale de la spirale sphérique décrite par le pendule de comparaison est une ellipse fixe de position, si l'on fait tourner cette ellipse d'un mouvement de rotation commun avec celui que nous avons donné à la sphère des pendules, il est clair que la projection horizontale du vrai pendule devra se trouver constamment sur cette ellipse mobile; c'est en cela que consiste l'élégant théorème de M. Binet.

Je considère le vrai pendule dans une position quelconque définie par les coordonnées polaires θ, ψ, et je décompose sa vitesse suivant la tangente à l'arc $l\theta$ et suivant la normale au vertical dont l'azimut est ψ. En désignant par v et u ces deux composantes, j'ai

$$v = l\frac{d\theta}{dt}, \tag{36}$$

$$u = l\sin\theta\frac{d\psi}{dt}. \tag{37}$$

Pour la même époque, les composantes analogues de la vitesse que possède le pendule de comparaison étant désignées par v' et w, on aura

$$v' = l\frac{d\theta}{dt} = v, \tag{38}$$

$$w = l\sin\theta\frac{d\varphi}{dt} = u - kl\sin\theta. \tag{39}$$

On voit par là que le vrai pendule et le pendule de comparaison, qui partent en même temps de la même position avec la même vitesse mesurée suivant l'arc d'écart primitif, n'ont pas cependant la même vitesse initiale, puisque la composante de cette vitesse mesurée perpendiculairement au vertical primitif étant désignée par u_0 pour le vrai pendule, est $w_0 = u_0 - kl\sin\theta_0$ pour le pendule de comparaison. Cette différence $-kl\sin\theta_0$ dans les deux composantes sera négli-

geable lorsque les oscillations auront assez peu d'étendue pour qu'on puisse regarder le produit $k \sin \xi_0$ comme étant du même ordre de petitesse que la fraction n^2 : on verra, au reste, que, généralement, l'influence de la quantité $-kl \sin \theta_0$ est peu sensible.

Pour intégrer les équations (29), (30), (31), il n'y a qu'à suivre la méthode développée dans la *Mécanique analytique;* on a ainsi

$$(40)\quad \begin{cases} \cos\theta = \cos\alpha \cos^2\sigma + \cos\xi \sin^2\sigma, \\ t = c - A_0\sigma + \sum_1^\infty A_i \sin 2i\sigma, \\ \psi = d - kt \pm B_0\sigma \pm \sum_1^\infty B_i \sin 2i\sigma. \end{cases}$$

c, d sont deux constantes arbitraires;

α, ξ sont les écarts maximum et minimum du pendule par rapport à la verticale; on les détermine par l'équation du troisième degré en $\cos\theta$,

$$(41)\quad \left(\frac{w_0^2 - \alpha^2}{2gl} - \cos\xi_0 - \cos\xi\right)\sin^2\xi + \frac{w_0^2 \sin^2\xi_0}{2gl} = 0;$$

σ est une variable auxiliaire;

A_0, A_i, B_0, B_i sont des fonctions de α, ξ qu'on trouve dans la *Mécanique analytique;*

i est un nombre entier quelconque.

Le signe $+$ ou le signe $-$ dans la valeur de ψ sont choisis suivant que w_0 est positif ou négatif.

Si l'on désigne par T la durée commune à toutes les oscillations ascendantes ou descendantes, et par Ψ l'angle dont le vertical du pendule tourne pendant une quelconque de ces oscillations, on a, d'après les équations précédentes,

$$T = \frac{\pi}{2} A_0, \quad \Psi = kT \pm \frac{\pi}{2} B_0.$$

Si l'on développe A_0, B_0 en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de α, ξ, on trouve, lorsque ξ n'est pas nul et qu'on se borne aux termes d'un ordre inférieur aux quatrièmes puissances de

ces quantités,

$$(42)\quad \begin{cases} T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{16}\right). \\ \Psi = kT \pm \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{3\alpha\beta}{8}\right). \end{cases}$$

§ II.

Lorsque le pendule est abandonné sans vitesse initiale, il ne passe pas en tombant par la verticale; déterminer son écart minimum et la durée des oscillations.

Dans ce cas, ψ_0, θ_0 étant quelconques, on a

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0;$$

les trois racines A, B, C de l'équation générale (41) sont, en remarquant que $w_0 = -kl\sin\theta_0$,

$$A = \cos\theta_0,$$

$$B = -\frac{k^2 l \sin^2\theta_0}{4g} + \sqrt{\frac{k^4 l^2 \sin^4\theta_0}{16g^2} - \frac{k^2 l \sin^2\theta_0 \cos\theta_0}{2g} + 1},$$

$$C = -\frac{k^2 l \sin^2\theta_0}{4g} - \sqrt{\frac{k^4 l^2 \sin^4\theta_0}{16g^2} - \frac{k^2 l \sin^2\theta_0 \cos\theta_0}{2g} + 1}.$$

Les angles α, β étant les écarts maximum et minimum, on a donc

$$\alpha = \theta_0, \quad \cos\beta = 1 - \frac{k^2 l \sin^2\theta_0}{4g}(1 + \cos\theta_0) + \ldots,$$

d'où l'on tire

$$\beta = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot k \sin\theta_0 \cos\frac{1}{2}\theta_0,$$

en négligeant les puissances de k supérieures à la première.

Si l'on prend la seconde de temps moyen pour unité de temps, on a

$$n = \frac{1}{13713}; \quad \text{à Paris,} \quad k = 0{,}0000549081 = \frac{1}{18212}.$$

Si l'on suppose $\theta_0 = 1$ degré, on aura

$$\beta = 0{,}000000956\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Pour un pendule dont la longueur est égale a g, l'écart minimum $l\delta$ est un arc de $0^m,0000094$.

Si le pendule était de $88^m,2792$, pour une chute de 1 degré, l'écart minimum $l\delta$ serait une fraction de millimètre exprimée par 0,028.

D'apres la formule (42), on a pour la durée commune de chaque oscillation descendante ou ascendante,

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2 + \frac{k^2 l \sin^2 \theta_0 \cos^2 \frac{1}{2}\theta_0}{g}}{16}\right).$$

En négligeant les quatriemes puissances de l'amplitude, cette formule se réduit à

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\theta_0^2}{16}\right).$$

Cette expression montre que T est indépendant de k au degre d'approximation que nous adoptons. Il est facile de voir que les deux formules précédentes ne donnent pas une différence appréciable, meme par des observations qui dureraient dix heures. En effet, supposons $\theta_0 = 1$ degré, alors on a

$$\theta_0^2 = 0{,}000304686,$$

$$\frac{k^2 l}{g}\sin^2\theta_0 \cos^2\frac{1}{2}\theta_0 = 0{,}914007.10^{-13}.$$

$$T = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\left[1 + 0{,}000019040\,(1 + 10^{-13}.0{,}914007)\right].$$

D'après cela, la durée de 36 000 oscillations est

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[36000 + 0{,}685548\,(1 + 10^{-13}.0{,}914007)\right],$$

ce qui ne diffère pas sensiblement de

$$\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left[36000 + 0{,}685548\right].$$

§ III.

Lorsque le pendule est abandonné sans vitesse initiale, le vertical des positions culminantes qu'atteint le pendule après chaque oscillation complète se déplace dans le sens du mouvement des étoiles avec la vitesse angulaire $n \sin \gamma$.

D'après l'équation (42), l'angle décrit par le vertical du pendule dans une oscillation ascendante ou descendante est

$$\Psi = kT \pm \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{3\alpha\theta}{8}\right);$$

dans le cas actuel,

$$w_0 = -kl \sin \theta_0,$$

il faut donc prendre le signe $-$ dans la valeur de Ψ. Après un nombre quelconque p d'oscillations complètes, l'angle décrit par le vertical du pendule est égal à $4p\Psi$ ou à

$$4pkT - 2p\pi\left(1 + \frac{3}{8}k\sqrt{\frac{l}{g}}\,\theta_0 \sin\theta_0 \cos\frac{1}{2}\theta_0\right).$$

Cet angle diffère extrêmement peu de

$$4pkT - 2p\pi,$$

même lorsque p est égal à 1000, et il montre que la nouvelle position du pendule s'obtient par un mouvement direct donné au vertical du pendule avec la vitesse angulaire k.

§ IV.

Des conditions à remplir pour que les sommets de la spirale décrite par le pendule conservent une orientation fixe ou se déplacent avec une vitesse donnée par un mouvement direct ou rétrograde.

Lorsqu'on abandonne le pendule à lui-même, il est difficile d'obtenir rigoureusement qu'il parte sans vitesse initiale. Ordinairement, le pendule est maintenu hors de la verticale au moyen d'un fil qu'on brûle lorsqu'on suppose l'équilibre établi; mais le pendule et le fil qui le retient forment un système très-mobile qui est rarement en

équilibre parfait au moment où l'on brûle le fil. D'après cela, il est utile d'examiner quelle peut être l'influence de la très-petite vitesse initiale que possède ordinairement le pendule sur le déplacement de son vertical. Cet examen se fera aisément en résolvant le problème énoncé.

L'angle décrit par le vertical du pendule pendant une oscillation complète est, d'après l'équation (42), égal à

$$4\Psi = 4kT \pm 2\pi \pm \frac{3}{4}\pi\alpha\xi.$$

Si l'on supprime 2π, le reste $4kT \pm \frac{3}{4}\pi\alpha\xi$ désigne l'angle dont le vertical du pendule est déplacé à la fin d'une oscillation complète par rapport à sa position au commencement de l'oscillation; suivant que cet angle est positif ou négatif, le déplacement est direct ou rétrograde. Ce déplacement s'est opéré pendant le temps $4T$. Si donc on le divise par $4T$, on aura la vitesse angulaire de ce déplacement. Je désigne par U cette vitesse, et j'ai

$$U = k \pm \frac{3}{4}\pi\alpha\xi \cdot \frac{1}{4T}.$$

D'après l'équation (42), on a

$$4T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\alpha^2 + \xi^2}{16}\right).$$

d'où l'on conclut

$$U = k \pm \frac{3}{8}\alpha\xi \cdot \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

en négligeant les quantités d'un ordre supérieur à la troisième puissance de α ou de ξ. Je suppose maintenant que $v_0 = 0$; alors on tire de l'équation (41),

$$\xi = \frac{\alpha_0 \cos\frac{1}{2}\theta_0}{\sqrt{gl}} - \frac{u_0 \cos\frac{1}{2}\theta_0}{\sqrt{gl}} - k \sin\theta_0 \cos\frac{1}{2}\theta_0 \sqrt{\frac{l}{g}};$$

par suite,

$$U = k \mp \frac{3}{8} k\theta_0 \sin\theta_0 \cos\frac{1}{2}\theta_0 \pm \frac{3}{8}\frac{u_0}{l}\theta_0 \cos\frac{1}{2}\theta_0$$

Dans cette formule, on prendra les signes supérieurs ou les signes inférieurs suivant que w_0 sera positif ou négatif.

La première partie de U est indépendante de la longueur du pendule et des données initiales. La seconde partie est indépendante de la longueur du pendule, mais elle dépend de δ_0; lorsque δ_0 est de 1 degré, nous avons vu que cette seconde partie est insensible par rapport à la première, et il en est encore de même lorsque δ_0 est plus grand que 1 degré, mais reste néanmoins très-petit. On peut donc réduire l'expression précédente à

$$U = k \pm \frac{3}{8}\frac{u}{l}\delta_0 \cos\frac{1}{2}\delta_0.$$

Le second terme de la valeur de U dépend de u_0, mais sa valeur est d'autant plus petite que le pendule est plus long. Si $\frac{u}{l}$ est suffisamment petit, on conçoit qu'à cause du facteur δ_0, la seconde partie de U pourra être insensible par rapport à la première, cela aura lieu lorsqu'à l'origine le pendule n'a reçu qu'une très-petite vitesse directe ou rétrograde, surtout si le pendule est très-long. D'après cela, avec un pendule très-long, si l'on prend les précautions convenables pour qu'au moment où l'on brûle le fil qui retient le pendule il n'y ait qu'une très-petite vitesse, on pourra réduire U à k.

Lorsque $\frac{u}{l}$ n'est pas suffisamment petit, la différence de U et k peut être rendue sensible par l'expérience, et l'on conçoit que U pourra être nul, positif ou négatif.

Les sommets de la spirale auront une orientation fixe lorsque $U = 0$, ce qui exige que u_0 soit négatif.

Dans ce cas, on tire des formules précédentes

$$\varepsilon = -\frac{8k}{3\theta_0}\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Pour

$$\delta_0 = 3 \text{ degrés} \quad \text{et} \quad l = 88^{\text{m}},2792,$$

on a

$$\varepsilon = 0,0083886 \quad \text{et} \quad l\varepsilon = 0^{\text{m}},712.$$

D'où il suit que, pour avoir une orientation fixe, il faut lancer le pendule en sens contraire du mouvement des étoiles avec une vitesse telle, que le pendule partant de l'écart 3 degrés s'approche en tombant vers la verticale jusqu'à la distance de $0^m,712$. Avec une vitesse plus grande, le mouvement des sommets de la spirale serait rétrograde; avec une vitesse plus petite, ce mouvement serait direct et pourrait être plus petit que k, plus grand que k ou égal à cette quantité.

§ V.

Des conditions à remplir pour que le pendule passe en tombant par la verticale.

Les intégrales premières des équations (29) et (30) sont

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\varphi^2}{dt^2} - \frac{2g}{l}\cos\theta = a, \tag{43}$$

$$\sin^2\theta\frac{d\varphi}{dt} = b. \tag{44}$$

Les constantes arbitraires a, b, déterminées par les conditions initiales, ont pour valeurs

$$a = \frac{v_0^2 + w_0^2}{l^2} - \frac{2g}{l}\cos\theta_0, \quad b = \frac{w_0 \sin\theta_0}{l}. \tag{45}$$

L'équation (44) montre que le pendule ne peut passer par la verticale qu'autant que $b = 0$; cela aura donc lieu lorsque le pendule sera lancé de sa position d'équilibre stable en instable, ou bien lorsqu'il sera lancé d'une position quelconque avec une vitesse telle, que l'on ait

$$u_0 = kl\sin\theta_0.$$

Dans ces conditions, les équations (43), (44) se réduisent à

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2g}{l}\left(\cos\theta - \cos\theta_0 + \frac{v_0^2}{2l}\right), \tag{46}$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0. \tag{47}$$

De la dernière équation on tire, en vertu de l'équation (31),

$$\psi = \psi_0 + kt.$$

Cette équation montre que le vertical du pendule tourne uniformément dans le sens du mouvement des étoiles avec la vitesse angulaire $k = n \sin \gamma$. L'équation (46) montre que le pendule oscille dans ce vertical mobile suivant les lois des oscillations planes des pendules ordinaires.

§ VI.

Des oscillations infiniment petites.

On pourrait déduire les lois de ces oscillations des formules générales (40); mais il est plus simple de les obtenir directement, ce qu'on peut faire de la manière suivante.

Si l'on divise par dt l'équation (27), le facteur $\sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$ qui entrera dans le second membre sera du troisième ordre lorsque les oscillations seront infiniment petites; alors les équations (26), (27) se réduisent à

$$d\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \theta^2 \frac{d\psi}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta^2\right) = 0, \quad d.\rho^2 \frac{d(\psi - kt)}{dt} = 0.$$

Je désigne par ρ la projection horizontale de la tige du pendule et j'ai

$$\rho = l \sin \theta.$$

Dans le cas des oscillations infiniment petites, on pourra remplacer le système précédent par

$$d\left(\frac{d\rho^2}{dt^2} + \rho^4 \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{g}{l}\rho^2\right) = 0, \quad d.\rho^2 \frac{d(\psi - kt)}{dt} = 0;$$

les intégrales premières sont

$$(8) \qquad \frac{d\rho^2}{dt} + \rho^2 \frac{d\psi^2}{dt^2} + \frac{g}{l}\rho^2 = a, \quad \rho^2 \frac{d(\psi - kt)}{dt} = b,$$

a, b étant deux constantes arbitraires.

J'élimine $\frac{d\psi}{dt}$, et j'ai

$$\rho^2 \frac{d\rho^2}{dt^2} = -\left(\frac{g}{l} + k^2\right)\rho^4 + (a - 2bk)\rho^2 - b^2.$$

Le second membre de cette équation est un polynôme du quatrième

degré dont tous les termes sont de degré pair; on peut donc écrire ainsi l'équation précédente,

$$\rho^2 \frac{d\rho}{dt^2} = \left(\frac{g}{l} + k^2\right)(\rho_0^2 - \rho^2)(\rho^2 - \rho_1^2);$$

en désignant par ρ_0^2, ρ_1^2 la plus grande et la plus petite des racines de l'équation suivante,

$$(49) \qquad \left(\frac{g}{l} + k^2\right)x^2 - (a - 2bk)x + b^2 = 0.$$

il est facile de voir, en mettant dans cette équation à la place de a, b leurs valeurs en fonction des données initiales, que les deux racines sont réelles et positives.

L'équation différentielle précédente ayant son premier membre positif montre que ρ varie entre les limites extrêmes ρ_0, ρ_1: on en tire

$$(50) \qquad dt = \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\frac{g}{l} + k^2}\sqrt{(\rho_0^2 - \rho^2)(\rho^2 - \rho_1^2)}}.$$

Au moyen de cette valeur de dt, et en remarquant que l'équation (49) donne

$$b = \rho_0 \rho_1 \sqrt{\frac{g}{l} + k^2},$$

l'équation (48) devient

$$d(\psi - kt) = \frac{\rho_0 \rho_1\, d\rho}{\rho\sqrt{(\rho_0^2 - \rho^2)(\rho^2 - \rho_1^2)}}.$$

Sous cette forme, on reconnaît l'équation différentielle d'une ellipse dont les demi-axes sont ρ_0, ρ_1 lorsqu'on prend pour coordonnées polaires des différents points de l'ellipse le rayon vecteur mené du centre de la courbe et l'angle que ce rayon vecteur fait avec le demi-grand axe ρ_0; il suit de là que l'intégrale de l'équation précédente est

$$[\rho_0^2 \sin^2(\psi - \psi_0 - kt) + \rho_1^2 \cos^2(\psi - \psi_0 - kt)]\rho^2 = \rho_0^2 \rho_1^2,$$

ψ_0 étant une constante arbitraire qui désigne la valeur initiale de ψ.

Cette équation n'est autre chose que celle de l'ellipse mobile de M. Binet.

Quant à la durée des oscillations, on la tire facilement de l'équation (50), qui donne

$$\rho^2 = \frac{\rho_0^2 + \rho_1^2}{2} + \frac{\rho_0^2 - \rho_1^2}{2} \cos 2(t - c)\sqrt{\frac{q}{l} + k^2};$$

c est une constante arbitraire qui désigne le temps écoulé, lorsque le pendule passe par l'un de ses points culminants.

TROISIÈME SECTION.

Mouvement d'un système de corps rapporté à trois axes rectangulaires mobiles.

§ Ier.

Équation des forces vives relatives.

Nous avons vu dans la première section que, dans tout mouvement relatif, on a

$$(1) \quad \sum m(u\delta x + v\delta y + w\delta z) = \sum m(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z);$$

en posant

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \frac{d^2x}{dt^2} + 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) + u'', \\ v &= \frac{d^2y}{dt^2} + 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right) + v'', \\ w &= \frac{d^2z}{dt^2} + 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right) + w'', \end{aligned} \right.$$

les quantités u'', v'', w'' sont données par les formules (15) de la première section.

Lorsque les conditions imposées au système mobile ne contiennent pas le temps explicitement, on peut prendre pour déplacement virtuel de chaque point m le déplacement relatif qui a effectivement lieu

pendant l'instant dt, et, par suite, poser dans l'équation (1),

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz;$$

alors la formule (1) devient

$$(3) \qquad \sum m(u\,dx + v\,dy + w\,dz) = \sum m(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz).$$

On tire des équations (2)

$$(4) \qquad u\,dx + v\,dy + w\,dz = \frac{1}{2}\,d\,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} + u''\,dx + v''\,dy + w''\,dz,$$

et l'équation (3) devient

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} & d\sum m\,\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \\ & = 2\sum\left[(X - u'')\,dx + (Y - v'')\,dy + (Z - w'')\,dz\right]. \end{aligned} \right.$$

C'est là l'équation des forces vives relatives.

§ II.

Équations des moments par rapport aux axes mobiles.

Supposons que les conditions du système mobile permettent à ce système un mouvement commun de rotation autour de l'axe oz; par une rotation virtuelle autour de cet axe, on aura

$$\delta x = -y\varepsilon, \quad \delta y = x\varepsilon, \quad \delta z = 0,$$

en désignant par ε un facteur arbitraire et commun à tous les points matériels. Ces expressions réduisent la formule (1) à

$$(6) \qquad \sum m(xv - yu) = \sum m(xY - yX);$$

les équations (2) donnent

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} & xv - yu = x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} + r\,\frac{d(x^2 + y^2)}{dt} \\ & \quad - 2qy\frac{dz}{dt} - 2px\frac{dz}{dt} + xv'' - yu''. \end{aligned} \right.$$

par suite,

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \sum m(xv - yu) &= \frac{d.\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)}{dt} + \frac{d.\sum m(x^2+y^2)}{dt} \\ &\quad - 2q\sum mq\frac{dz}{dt} - 2p\sum mx\frac{dz}{dt} + \sum m(xv'' - yu'') \end{aligned}\right.$$

alors l'équation (6) devient

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} d.\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= \sum m[x(Y - v'') - y(X - u'')]dt \\ &\quad - rd\sum m(x^2+y^2) + 2q\sum my\,dz + 2p\sum mx\,dz. \end{aligned}\right.$$

On pourrait former une équation analogue à la précédente pour chacun des axes oy, ox; nous n'écrirons pas ces équations, parce que nous n'aurons pas à en faire usage dans les problèmes que nous traiterons.

§ III.

Propriétés générales du mouvement relatif de rotation pour un corps solide invariablement fixé à l'origine des axes mobiles.

Par l'origine mobile o je mène trois axes rectangulaires ox_1, oy_1, oz_1 invariablement liés au corps solide que l'on considère, et je désigne par x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point m de ce corps par rapport à ces nouveaux axes. Soient α, α', α'', β, β', β'', γ, γ', γ'' les cosinus que les axes du corps ox_1, oy_1, oz_1 font respectivement avec chacun des axes ox, oy, oz à l'époque quelconque t.

Par les règles de la transformation des coordonnées, on a

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \alpha x_1 + \alpha' y_1 + \alpha'' z_1, \\ y &= \beta x_1 + \beta' y_1 + \beta'' z_1, \\ z &= \gamma x_1 + \gamma' y_1 + \gamma'' z_1. \end{aligned}\right.$$

Si l'on traite ces équations comme on a déjà traité les équations ana-

logues (5) de la première section, et qu'on pose

$$(11)\quad \begin{cases} \varpi = \dfrac{\alpha'' d\alpha' + \beta'' d\beta' + \gamma' d\gamma'}{dt}, \\ \chi = \dfrac{\alpha d\alpha + \beta d\beta'' + \gamma d\gamma'}{dt}, \\ \rho = \dfrac{\alpha' d\alpha + \beta' d\beta + \gamma' d\gamma}{dt}, \end{cases}$$

$$(12)\quad \begin{cases} U_2 = \chi z_1 - \rho y_1, \\ V_2 = \rho x_1 - \varpi z_1, \\ W_2 = \varpi y_1 - \chi x_1, \end{cases}$$

on aura

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha U_2 + \alpha' V_2 + \alpha'' W_2, \\ \dfrac{dy}{dt} = \beta U_2 + \beta' V_2 + \beta'' W_2, \\ \dfrac{dz}{dt} = \gamma U_2 + \gamma' V_2 + \gamma'' W_2. \end{cases}$$

Les équations (11), (12), (13) sont analogues aux équations (9), (11), (12) de la première section.

En posant

$$(14)\quad \Omega^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2},$$

on aura, par les équations (13),

$$(15)\quad \Omega^2 = U_2^2 + V_2^2 + W_2^2.$$

D'après l'équation (14), la quantité Ω désigne la vitesse relative du point m. Les équations (15) et (12) montrent qu'à toute époque t les points du corps situés sur la droite que déterminent les équations

$$(16)\quad \frac{x_1}{\varpi} = \frac{y_1}{\chi} = \frac{z_1}{\rho},$$

sont sans vitesse relative, c'est-à-dire conservent pendant l'instant suivant dt une position fixe par rapport aux axes mobiles ox, oy, oz, auxquels les mouvements sont rapportés. A cause de cette propriété, la droite (16) sera appelée l'*axe instantané de rotation apparente*

Je pose

$$\bar{\omega} = \sqrt{\varpi^2 + \bar{\chi}^2 + \rho^2}. \tag{17}$$

alors les quantités

$$\frac{\varpi}{\bar{\omega}}, \quad \frac{\chi}{\bar{\omega}}, \quad \frac{\rho}{\bar{\omega}} \tag{18}$$

désignent les cosinus des angles que l'axe instantané apparent fait à l'époque t avec les axes du corps ox_1, oy_1, oz_1, et les quantités

$$\frac{\alpha\varpi + \alpha'\chi + \alpha''\rho}{\bar{\omega}}, \quad \frac{\beta\varpi + \beta'\chi + \beta''\rho}{\bar{\omega}}, \quad \frac{\gamma\varpi + \gamma'\chi + \gamma''\rho}{\bar{\omega}} \tag{19}$$

sont les cosinus des angles que l'axe instantané et apparent fait avec les axes ox, oy, oz. En prenant $\bar{\omega}$ en valeur absolue, ces cosinus donnent la direction de l'une des deux parties dans lesquelles l'origine o divise l'axe instantané; c'est cette partie seulement que nous appellerons désormais l'*axe instantané et apparent du corps*.

Les équations (13) montrent que U_2, V_2, W_2 sont les projections sur ox_1, oy_1, oz_1 de la vitesse apparente Ω du point m. Les équations (12) montrent que l'on a

$$U_2 x_1 + V_2 y_1 + W_2 z_1 = 0, \tag{20}$$

$$U_2 \varpi + V_2 \chi + W_2 \rho = 0, \tag{21}$$

et ces équations font voir que la vitesse apparente Ω est à la fois perpendiculaire au rayon vecteur du point m et à l'axe instantané; elle est donc perpendiculaire au plan de ces deux lignes, ou, ce qui est la même chose, elle est tangente à la circonférence qui passe par le point m, dont le plan est perpendiculaire à l'axe instantané apparent et dont le centre est sur cet axe.

On tire des équations (15) et (12)

$$\left\{\begin{aligned} \Omega^2 = {} & \varpi^2(y_1^2 + z_1^2) + \chi^2(z_1^2 + x_1^2) + \rho^2(x_1^2 + y_1^2) \\ & - 2\chi\rho y_1 z_1 - 2\varpi\rho x_1 z_1 - 2\varpi\chi y_1 x_1. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Je désigne par δ le rayon vecteur du point m et par ε l'angle qu'il

fait avec l'axe instantané apparent, et j'ai

$$\delta^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

$$\cos\varepsilon = \frac{\varpi x_1 + \chi y_1 + \rho z_1}{\bar{\omega}\delta}.$$

Au moyen de ces valeurs, on peut écrire l'équation (22) successivement comme il suit :

$$\Omega^2 = (\varpi^2 + \chi^2 + \rho^2)\,\delta^2 - (\varpi x_1 + \chi y_1 + \rho z_1)^2,$$

$$\Omega^2 = \bar{\omega}^2\delta^2 - \omega^2\delta^2\cos^2\varepsilon,$$

$$\frac{\Omega}{\delta\sin\varepsilon} = \bar{\omega}; \tag{23}$$

$\delta\sin\varepsilon$ est la perpendiculaire abaissée de m sur l'axe instantané apparent : l'équation (23) montre donc que le rapport de la vitesse apparente de chaque point du corps à la distance qui sépare ce point de l'axe instantané est une quantité constante dans toute l'étendue du corps à l'époque quelconque t. D'après les diverses propriétés que nous venons d'indiquer, on peut conclure que le mouvement apparent du corps pendant l'instant dt consiste en une rotation apparente exécutée autour de l'axe instantané apparent ; la vitesse angulaire de cette rotation apparente est égale à la quantité ω définie par l'équation (17). Menons par l'axe instantané apparent deux plans A, B de même direction, le premier étant invariablement lié aux axes ox, oy, oz, et le second au corps solide même : ces deux plans coïncidant à l'époque t ne coïncident plus généralement à l'époque $t + dt$ et font entre eux un angle égal à ωdt, en sorte que le plan B, qui est fixe dans le corps, a tourné autour de l'axe instantané apparent avec la vitesse apparente ω.

Lorsque l'on considère le mouvement relatif d'un corps solide invariablement lié à l'origine des axes mobiles, il est facile de transformer d'une manière utile l'équation des forces vives relatives et celle des moments que nous avons déjà données.

On tire des équations (14) et (22),

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum m \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} &= A\varpi^2 + B\chi^2 + C\rho^2 - 2A'\chi\rho \\ &\quad - 2B'\rho\varpi - 2C'\varpi\chi, \end{aligned} \right.$$

en posant

$$(25)\quad \left\{ \begin{aligned} A &= \sum m(z_1^2 + y_1^2), \\ B &= \sum m(z_1^2 + x_1^2), \\ C &= \sum m(x_1^2 + y_1^2), \\ A' &= \sum m y_1 z_1, \\ B' &= \sum m z_1 x_1, \\ C' &= \sum m x_1 y_1. \end{aligned} \right.$$

En portant l'équation (24) dans l'équation (15), on a, pour l'équation des forces vives relatives,

$$(26)\quad \left\{ \begin{aligned} & d(A\varpi^2 + B\chi^2 + C\rho^2 - 2A'\chi\rho - 2B'\rho\varpi - 2C'\varpi\chi) \\ & = 2\sum m[(X - u'')dx + (Y - v'')dy + (Z - w'')dz]. \end{aligned} \right.$$

Quant à l'équation des moments, c'est-à-dire l'équation (9), on peut faire subir à ses diverses parties les transformations suivantes.

On a, par les formules (10), (13),

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = (x_1 V_2 - y_1 U_2)(\alpha b - \alpha' b)$$

$$+ (z_1 U_2 - x_1 W_2)(\alpha'' b - \alpha b'') + (y_1 W_2 - z_1 V_2)(\alpha' b' - \alpha b').$$

On sait que les seconds facteurs qui entrent dans le second membre de cette équation sont respectivement égaux à γ, γ', γ''; ce qu'on peut, au reste, facilement démontrer. Si donc on a égard à l'équation (12),

cette équation devient

$$\begin{aligned} x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = {} & \gamma[\varpi(y_1^2 + z_1^2) + \chi y_1 x_1 - \rho z_1 x_1] \\ & + \gamma'[\chi(z_1^2 + x_1^2) - \rho z_1 y_1 - \varpi x_1 y_1] \\ & + \gamma''[\rho(x_1^2 + y_1^2) - \varpi z_1 x_1 - \chi z_1 y_1]. \end{aligned}$$

Je désigne par P, Q, R les dérivées de $\frac{1}{2}\sum m\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt}$ par rapport à ϖ, χ, ρ; c'est-à-dire que je pose

$$(27)\qquad \left\{\begin{aligned} P &= A\varpi - C'\chi - B'\rho, \\ Q &= B\chi - C'\varpi - A'\rho, \\ R &= C\rho - A'\chi - B'\varpi: \end{aligned}\right.$$

alors je tire de l'équation précédente,

$$(28)\qquad \sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \gamma P + \gamma' Q + \gamma'' R,$$

formule qui est connue.

La quantité $\sum m(x^2 + y^2)$ est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe oz. Par les calculs connus et relatifs à la théorie des moments d'inertie, on a

$$(29)\qquad \left\{\begin{aligned} \sum m(x^2 + y^2) = {} & A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2 \\ & - 2A'\gamma'\gamma' - 2B'\gamma''\gamma - 2C'\gamma\gamma'. \end{aligned}\right.$$

On peut, au reste, former directement cette expression au moyen des équations (10).

Je tire des équations (10),

$$(30)\qquad \left\{\begin{aligned} 2\sum mx\,dz = {} & (B + C - A)\alpha\,d\gamma + (A + C - B)\alpha'\,d\gamma' \\ & + (A + B - C)\alpha''\,d\gamma'' + 2C'(\alpha\,d\gamma' + \alpha'\,d\gamma) \\ & - 2B'(\alpha''\,d\gamma + \alpha\,d\gamma'') + 2A'(\alpha'\,d\gamma'' + \alpha''\,d\gamma'). \end{aligned}\right.$$

De là on déduit $2\sum myz\,dz$, en changeant α, α', α'' respectivement en β, β', β''.

D'après les formules (28), (29), (30), l'équation des moments (9) devient

$$
(31)\quad
\begin{cases}
d(P\gamma + Q\gamma' + R\gamma'') = \sum m[x(Y - y(Z - z(X - u)]\,dt \\
- r\,d(A\gamma^2 + B\gamma'^2 + C\gamma''^2 - 2A'\gamma'\gamma'' - 2B'\gamma''\gamma - 2C'\gamma\gamma') \\
+ q\left[\begin{array}{l}(B + C - A)\xi\,d\gamma + (A + C - B)\xi'\,d\gamma' + (A + B - C)\xi''\,d\gamma \\ \quad + 2C'(\xi\,d\gamma' + \xi'\,d\gamma) + 2B'(\xi''\,d\gamma + \gamma''\,d\xi) \\ \quad + 2A'(\xi'\,d\gamma'' + \gamma'\,d\xi'')\end{array}\right] \\
- p\left[\begin{array}{l}(B + C - A)\alpha\,d\gamma + (A + C - B)\alpha'\,d\gamma' + (A + B - C)\alpha''\,d\gamma'' \\ \quad + 2C'(\alpha\,d\gamma' + \alpha'\,d\gamma) + 2B'(\alpha\,d\gamma'' + \alpha\,d\gamma'') \\ \quad + 2A'(\alpha'\,d\gamma'' + \alpha''\,d\gamma')\end{array}\right].
\end{cases}
$$

Nous emploierons, dans les problèmes que nous traiterons plus loin, une autre équation qui convient à tout corps solide capable de tourner librement autour de la droite oz_1, qui est invariablement liée au corps. C'est maintenant cette équation que nous allons former.

§ IV.

Équation des moments par rapport à l'axe du corps solide.

Je suppose que les conditions imposées au corps ne l'empêchent pas de pouvoir tourner autour de oz_1, et je donne au solide un mouvement virtuel de rotation autour de cette ligne. Je désigne par δx_1, δy_1, δz_1 les projections sur ox_1, oy_1, oz_1 du déplacement virtuel du point m, et j'ai

$$\delta x_1 = -y_1\varepsilon, \quad \delta y_1 = x_1\varepsilon, \quad \delta z_1 = 0,$$

ε étant un facteur indéterminé et commun à tous les points du corps.

On tire de ces équations et des formules (10),

$$\delta x = \varepsilon(\alpha' x_1 - \alpha y_1),$$

$$\delta y = \varepsilon(\xi' x_1 - \xi y_1),$$

$$\delta z = \varepsilon(\gamma' x_1 - \gamma y_1):$$

et alors la formule (1) devient

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum m[x_1(\alpha' u + \beta' v + \gamma' w) - y_1(\alpha u + \beta v + \gamma w)] \\ &= \sum m[x_1(X\alpha' + Y\beta' + Z\gamma') - y_1(X\alpha + Y\beta + Z\gamma)]. \end{aligned}\right.$$

Je poserai, pour plus de simplicité,

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} p_1 &= \alpha\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma\frac{d^2z}{dt^2}, \\ q_1 &= \alpha'\frac{d^2x}{dt^2} + \beta'\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma'\frac{d^2z}{dt^2}, \end{aligned}\right.$$

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} X_1 &= \alpha(X - u'') + \beta(Y - v'') + \gamma(Z - w''), \\ Y_1 &= \alpha'(X - u'') + \beta'(Y - v'') + \gamma'(Z - w''). \end{aligned}\right.$$

Il est clair que p_1, q_1 sont les projections sur ox_1, oy_1 de l'accélération apparente du point m.

Par les équations (2) on a

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = p_1 + 2r\left(\beta\frac{dx}{dt} - \alpha\frac{dy}{dt}\right)$$
$$- 2q\left(\alpha\frac{dz}{dt} - \gamma\frac{dx}{dt}\right) + 2p\left(\gamma\frac{dy}{dt} - \beta\frac{dz}{dt}\right) + \alpha u'' + \beta v'' + \gamma w''.$$

Si l'on change dans cette formule α, β, γ respectivement en α', β', γ', on aura la valeur de $\alpha' u + \beta' v + \gamma' w$; et au moyen de ces deux expressions et de l'équation (34), l'équation (32) deviendra

$$(35)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum m(x_1 q_1 - y_1 p_1) = \sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1) \\ &- 2r\sum m\left[x_1\left(\beta'\frac{dx}{dt} - \alpha'\frac{dy}{dt}\right) - y_1\left(\beta\frac{dx}{dt} - \alpha\frac{dy}{dt}\right)\right] \\ &- 2q\sum m\left[x_1\left(\alpha'\frac{dz}{dt} - \gamma'\frac{dx}{dt}\right) - y_1\left(\alpha\frac{dz}{dt} - \gamma\frac{dx}{dt}\right)\right] \\ &- 2p\sum m\left[x_1\left(\gamma'\frac{dy}{dt} - \beta'\frac{dz}{dt}\right) - y_1\left(\gamma\frac{dy}{dt} - \beta\frac{dz}{dt}\right)\right]. \end{aligned}\right.$$

Si l'on opère sur les équations (10), en faisant les mêmes calculs qui, dans la première section, ont fait passer des équations (5) aux équations (14), et qu'on ait égard aux équations (12) de la section actuelle,

on obtient

$$p_1 = \frac{dU_2}{dt} + \chi W_2 - \rho V_2, \quad q_1 = \frac{dV_2}{dt} + \rho U_2 - \varpi W_2,$$

ou, en effectuant les calculs,

$$p_1 = z_1 \frac{d\chi}{dt} - y_1 \frac{d\rho}{dt} + \varpi\chi y_1 + \rho\varpi z_1 - x_1(\chi^2 + \rho^2),$$

$$q_1 = x_1 \frac{d\rho}{dt} - z_1 \frac{d\varpi}{dt} + \rho\chi z_1 + \varpi\chi x_1 - y_1(\rho^2 + \varpi^2);$$

de là on tire

$$\sum m(x_1 q_1 - y_1 p_1) = C\frac{d\rho}{dt} - B'\frac{d\varpi}{dt} - A'\frac{d\chi}{dt}$$
$$+ (B - A)\varpi\chi - A'\varpi\rho + B'\chi\rho + C'(\chi^2 - \varpi^2).$$

Au moyen des équations (27), cette expression devient

$$(36) \qquad \sum m(x_1 q_1 - y_1 p_1) = \frac{dR}{dt} + \varpi Q - \chi P;$$

cette transformation est au reste connue.

Au moyen des équations (10), on a

$$(37) \quad \left\{ \begin{aligned} 2\sum m\left(\beta'\frac{dx}{dt} - \alpha'\frac{dy}{dt}\right)x_1 &= (B + C - A)\frac{\beta' d\alpha - \alpha' d\beta}{dt} \\ &\quad + 2C'\frac{\beta' d\alpha' - \alpha' d\beta'}{dt} + B'\frac{\beta' d\alpha'' - \alpha' d\beta''}{dt}. \\ 2\sum m\left(\beta\frac{dx}{dt} - \alpha\frac{dy}{dt}\right)y_1 &= (A + C - B)\frac{\beta d\alpha' - \alpha d\beta'}{dt} \\ &\quad + 2C'\frac{\beta d\alpha - \alpha d\beta}{dt} + A'\frac{\beta d\alpha' - \alpha d\beta''}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Si on fait la différence de ces deux équations, on a pour le coefficient de C la dérivée par rapport à t de $\alpha\beta' - \alpha'\beta$, ou, comme on l'a déjà dit, de γ''.

Au moyen des équations (11) et des relations connues qui lient les neuf cosinus, on a

$$\sigma = \frac{\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma}{dt},$$

$$\rho = \frac{\alpha' d\alpha + \beta' d\beta + \gamma' d\gamma}{dt},$$

$$\chi = -\frac{\alpha'' d\alpha + \beta'' d\beta + \gamma'' d\gamma}{dt}.$$

Si on multiplie ces équations respectivement par α, α', $-\alpha''$, et qu'on les ajoute, on obtient

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha'\rho - \alpha''\chi,$$

d'où l'on conclut, par la permutation des lettres,

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta'\rho - \beta''\chi.$$

Si on a égard à l'expression de γ déjà citée, on voit que l'on a

$$\frac{\beta' d\alpha - \alpha' d\beta}{dt} = \gamma\chi.$$

On obtient de la même manière

$$\frac{\beta d\gamma - \gamma d\beta}{dt} = \gamma'\varpi, \quad \frac{\beta' d\alpha'' - \alpha' d\beta''}{dt} = \gamma''\chi, \quad \frac{\beta d\alpha - \alpha d\beta}{dt} = \gamma\varpi,$$

et aussi

$$\alpha' d\beta - \beta\, d\alpha' = \gamma\varpi + \gamma'\rho, \quad \frac{\alpha d\beta - \beta d\alpha}{dt} = \gamma'\chi + \gamma''\rho;$$

au moyen de ces diverses expressions, la différence des deux équations (37) devient

$$C\frac{d\gamma'}{dt} + (B - A)(\gamma\chi + \gamma'\varpi) + 2C'(\gamma'\chi - \gamma\varpi) + 2\gamma''(B'\chi - A'\varpi).$$

Cette quantité est le coefficient de $-r$ dans l'équation (35); on en déduit les coefficients de $-q$ et $-p$ dans la même équation en changeant γ, γ', γ'', respectivement en β, β', β'', ou en α, α', α'', et de cette manière l'équation (35) devient

$$\frac{dR}{dt} + \varpi Q - \chi P = \sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1)$$

$$(38)\quad \left\{ \begin{aligned} &- r\left[\begin{aligned} &C\frac{d\gamma''}{dt} + (B - A)(\gamma\chi + \gamma'\varpi) \\ &+ 2C'(\gamma'\chi - \gamma\varpi) + 2\gamma''(B'\chi - A'\varpi) \end{aligned}\right] \\ &- q\left[\begin{aligned} &C\frac{d\beta''}{dt} + (B - A)(\beta\chi + \beta'\varpi) \\ &+ 2C'(\beta'\chi - \beta\varpi) + 2\beta''(B'\chi - A'\varpi) \end{aligned}\right] \\ &- p\left[\begin{aligned} &C\frac{d\alpha''}{dt} + (B - A)(\alpha\chi + \alpha'\varpi) \\ &+ 2C'(\alpha'\chi - \alpha\varpi) + 2\alpha''(B'\chi - A'\varpi) \end{aligned}\right]. \end{aligned} \right.$$

On peut déduire de l'équation (38) deux équations analogues relatives aux axes ox_1, oy_1; mais nous n'aurons pas occasion de nous en servir.

Cette équation (38) peut s'écrire de la manière suivante :

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{dR}{dt} + \varpi Q - \chi P = &\sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1) - C\frac{pd\alpha'' + qd\beta'' + rd\gamma''}{dt} \\ &- (B - A)[\chi(\alpha p + \beta q + \gamma r) + \varpi(\alpha' p + \beta' q + \gamma' r)] \\ &+ 2C'[\chi(\alpha' p + \beta' q + \gamma' r) - \varpi(\alpha p + \beta q + \gamma r)] \\ &+ 2(B'\chi - A'\varpi)(\alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r). \end{aligned}\right.$$

On peut remarquer que les trinômes $\alpha p + \beta q + \gamma r$, $\alpha' p + \beta' q + \gamma' r$, $\alpha'' p + \beta'' q + \gamma'' r$, sont les composantes suivant ox_1, oy_1, oz_1, de la vitesse angulaire instantanée de la rotation des axes mobiles ox, oy, oz, auxquels on rapporte le mouvement du solide.

Je désigne par θ l'angle que oz_1 fait avec oz, par $\psi - 90^\circ$ l'angle que la projection de oz_1 sur le plan xoy fait avec ox, par φ l'angle que ox_1 fait avec la partie de l'intersection des plans $x_1 y_1$ et xy qui est déterminée par l'angle ψ; on a, par la trigonométrie sphérique

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ \alpha' &= -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ \alpha'' &= \sin\psi\sin\theta; \\ \beta &= \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \\ \beta' &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta, \\ \beta'' &= -\cos\psi\sin\theta; \\ \gamma &= \sin\varphi\sin\theta, \\ \gamma' &= \cos\varphi\sin\theta, \\ \gamma'' &= \cos\theta. \end{aligned}\right.$$

On tire de là les formules connues

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} \varpi &= \sin\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi\frac{d\theta}{dt}, \\ \chi &= \cos\varphi\sin\theta\frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi\frac{d\theta}{dt}, \\ \rho &= \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta\frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}\right.$$

Au moyen des équations (40) et (41), les premiers membres des équations (26), (31) et (39) peuvent être considérés comme des fonctions des trois angles θ, ψ, φ qui servent à déterminer à chaque instant la position apparente du corps solide.

Lorsque le corps solide est de révolution autour d'une droite passant par le point o, les équations (25) et (27) donnent, en plaçant oz_1 sur cette droite,

$$(42)\quad \begin{cases} A = B, \quad A' = 0, \quad B' = 0, \quad C' = 0, \\ R = C\rho, \quad Q = B\chi, \quad P = A\varpi, \end{cases}$$

et les équations (26), (31), (39) deviennent

$$(43)\quad \begin{cases} d[A(\varpi^2 + \chi^2) + C\rho^2] = 2\sum m[(X - u'')dx + (Y - v'')dy \\ \qquad\qquad + (Z - w'')dz], \\ d[A(\varpi\gamma + \chi\gamma') + C\rho\gamma''] = \sum m[x(Y - v'') - y(X - u'')]dt \\ \qquad\qquad - rd[A(\gamma^2 + \gamma'^2) + C\gamma''^2] \\ \qquad\qquad + q[C(\beta d\gamma + \beta' d\gamma') + (2A - C)\beta'' d\gamma''] \\ \qquad\qquad + p[C(\alpha d\gamma + \alpha' d\gamma') + (2A - C)\alpha'' d\gamma''], \\ C(dp + pd\alpha'' + qd\beta'' + rd\gamma'') = \sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1)dt. \end{cases}$$

Au moyen des équations (40) et (41), on a

$$(44)\quad \begin{cases} \varpi^2 + \chi^2 = \frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2}, \\ \varpi\gamma + \chi\gamma' = \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt}, \quad \gamma^2 + \gamma'^2 = \sin^2\theta, \\ \alpha d\gamma + \alpha' d\gamma' = -\sin\psi\cos^2\theta\, d\theta + \cos\psi\sin\theta\, d\varphi \\ \qquad\qquad = \rho\cos\psi\sin\theta\, dt - \cos\theta\, d(\sin\psi\sin\theta), \\ \alpha'' d\gamma'' = -\sin\psi\sin^2\theta\, dt. \end{cases}$$

Ces expressions réduisent les équations (43) à

$$(45)\quad \begin{cases} d\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta \frac{d\psi^2}{dt^2} + \mu\rho^2\right) \\ = \frac{2}{A}\sum m[(X - u'')dx + (Y - v'')dy + (Z - w'')dz], \end{cases}$$

$$(46)\quad \left\{\begin{aligned} & d.\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt} \\ & = \frac{1}{A}\sum m[x(Y-v')-y(X-u'')]dt + r(\mu-1)\,d.\sin^2\theta \\ & + q\left\{\begin{array}{l} \mu[\rho\sin\psi\sin\theta\,dt+\cos\theta\,d(\cos\psi\sin\theta)] \\ +(2-\mu)\cos\psi\sin^2\theta\,d\theta \end{array}\right\} \\ & + p\left\{\begin{array}{l} \mu[\rho\cos\psi\sin\theta\,dt-\cos\theta\,d(\sin\psi\sin\theta)] \\ -(2-\mu)\sin\psi\sin^2\theta\,d\theta \end{array}\right\}. \end{aligned}\right.$$

$$(47)\quad C(d\rho + p\,d\alpha'' + q\,d\beta'' + r\,d\gamma'') = \sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1)\,dt.$$

On a posé, pour plus de simplicité,

$$(48)\qquad \mu = \frac{C}{A}.$$

L'équation (47) montre que lorsque p, q, r sont constants, et qu'en même temps

$$\sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1) = 0,$$

la composante suivant l'axe de révolution oz_1 de la vitesse de rotation instantanée des axes mobiles ox, oy, oz, forme, avec la composante suivant ox_1 de la vitesse instantanée et apparente du solide, une somme constante pendant toute la durée du mouvement.

§ V.

Application des formules générales aux mouvements relatifs terrestres, lorsqu'on rapporte les mouvements à trois axes rectangulaires fixes sur la Terre, et qu'on n'a égard qu'au mouvement diurne.

Le point o est maintenant fixe sur la Terre; je prends arbitrairement un plan quelconque aussi fixe sur la Terre et passant par le point o, pour y placer les axes ox, oy; de cette manière oz est entièrement arbitraire. Par le point o je mène une parallèle à la partie septentrionale de l'axe terrestre, je la projette sur le plan xoy, et je place l'axe ox sur cette projection; l'axe oy sera à gauche de ox.

Dans ces conditions, nous avons vu, dans la première section, que

l'on a les équations

$$(9) \qquad p = n \sin \omega, \quad q = 0, \quad r = -n \cos \omega;$$

n désigne la vitesse angulaire de rotation de la Terre, et ω l'angle que oz fait avec la partie australe de l'axe terrestre.

Je supposerai que l'attraction de la Terre est la seule force appliquée aux différents points du corps solide; alors $X - u''$, $Y - v''$, $Z - w''$ sont les projections sur ox, oy, oz de la pesanteur proprement dite, et relative à la position déterminée par les coordonnées x, y, z. Je supposerai, en outre, que la pesanteur est constante dans toute l'étendue du corps; alors $X - u''$, $Y - v''$, $Z - w''$ sont constantes, et je pose

$$E = X - u'', \quad F = Y - v'', \quad G = Z - w''.$$

Je désigne par M la masse du corps, par x', y', z' les coordonnées de son centre de gravité rapportées aux axes ox, oy, oz, par x'_1, y'_1, z'_1 les coordonnées de ce centre par rapport à ox_1, oy_1, oz_1, et par l la distance de ce point à l'origine o; alors j'ai

$$\sum m[(X - u'')dx + (Y - v'')dy + (Z - w'')dz]$$
$$= M(E\,dx' + F\,dy' + G\,dz').$$

Mais, x'', y'', z'' étant constantes, j'ai

$$dx = x''\,d\alpha + y''\,d\alpha' + z''\,d\alpha'',$$
$$dy = x''\,d\beta + y''\,d\beta' + z''\,d\beta'',$$
$$dz' = x''\,d\gamma + y''\,d\gamma' + z''\,d\gamma''.$$

Lorsque le solide est de révolution, on a

$$x'' = 0, \quad y'' = 0, \quad z'' = l,$$

et, par suite,

$$E\,dx' + F\,dy' + G\,dz' = Ml(E\,d\alpha'' + F\,d\beta'' + G\,d\gamma'').$$

J'ai aussi

$$\sum m[x(Y - v'') - y(X - u'')] = M(Fx' - Ey') = Ml(F\alpha'' - E\beta''),$$

$$\sum m(x_1 Y_1 - y_1 X_1) = M(x'_1 Y_1 - y'_1 X_1) = 0.$$

Au moyen de ces réductions, les équations (45), (46), (47), deviennent

$$(50)\quad \begin{cases} d\left(\frac{d\zeta}{dt} - \sin^2\zeta\frac{d\psi}{dt} - \mu\rho^2\right) = \frac{2M\ell}{A}d(E\alpha' + F\beta' + G\gamma) \\ d\left(\sin^2\zeta\frac{d\psi}{dt} + \mu\rho\cos\zeta\right) = \frac{M\ell}{A}(F\alpha' - E\beta') \\ \qquad - n\cos\omega(\mu - 1)d.\sin^2\zeta \\ \qquad + n\sin\omega\left[\begin{array}{r}\mu\rho\cos\psi\sin\zeta\,dt - \mu\cos\zeta d.\sin\psi\sin\zeta \\ -(2-\mu)\sin\psi\sin^2\zeta\,d\zeta\end{array}\right] \\ d(\rho - n\cos\omega\cos\zeta - n\sin\omega\sin\zeta\sin\psi) = 0. \end{cases}$$

Il est clair qu'on arriverait plus rapidement à ces dernières équations si, dès le commencement, on introduisait dans les formules les conditions exprimées par les équations (42), (49).

§ VI.

Application au pendule composé.

Je dirige l'axe oz suivant la verticale du point o, qui sera le point de suspension, et je le suppose dans le sens de la pesanteur; je désigne par γ la latitude de l'origine o, et j'ai

$$E = 0,\quad F = 0,\quad G = g,\quad \omega = \frac{\pi}{2} - \gamma,\quad \gamma' = \cos\zeta.$$

En posant

$$K = n\sin\gamma,\quad K' = n\cos\gamma,\quad \frac{1}{\lambda} = \frac{M\ell}{A}$$

les équations (50) deviennent

$$(51)\qquad d\left(\frac{d\zeta}{dt} + \sin^2\zeta\frac{d\psi}{dt} - \mu\rho^2 - \frac{2g}{\lambda}\cos\zeta\right) = 0,$$

$$(52)\quad \begin{cases} d\left(\sin^2\zeta\frac{d\psi}{dt} - \mu\rho\cos\zeta\right) = -K(\mu - 1)d.\sin^2\zeta \\ + K'[\mu\rho\cos\psi\sin\zeta\,dt - \mu\cos\zeta d.\sin\zeta\sin\psi - (2-\mu)\sin\psi\sin^2\zeta\,d\zeta]. \end{cases}$$

$$(53)\qquad d(\rho - K\cos\zeta + K'\sin\zeta\sin\psi) = 0.$$

Je multiplie l'équation (53) par $\mu\cos\zeta$, et je la retranche ensuite de

l'équation (52); j'ai ainsi

$$(54)\quad \left\{\begin{aligned} &d.\sin^2\theta\,\frac{d\psi-Kt}{dt} = 2K'\sin\psi\sin^2\theta\,d\theta + \mu\rho\sin\theta\,d\theta \\ &-\frac{1}{2}K\mu\,d.\cos^2\theta + K'\mu\rho\cos\psi\sin\theta\,dt + K'\mu\sin\psi\sin^2\theta\,d\theta. \end{aligned}\right.$$

L'intégrale de l'équation (53) est

$$(55)\quad \rho = \rho_0 + K(\cos\theta - \cos\theta_0) - K'(\sin\theta\sin\psi - \sin\theta_0\sin\psi_0),$$

en désignant par l'indice o les valeurs initiales des variables.

Je porte cette valeur de ρ dans les équations (51) et (54), et j'ai, en supprimant les termes qui correspondent au degré de petitesse de n^2,

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} &d\left\{\frac{d\theta}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\psi}{dt^2} - 2\mu\rho_0\left[\begin{matrix} K(\cos\theta - \cos\theta_0) \\ -K'(\sin\theta\sin\psi - \sin\theta_0\sin\psi_0)\end{matrix}\right] - \frac{2g}{\lambda}\cos\theta\right\} = 0, \\ &d.\sin^2\theta\,\frac{d\psi-Kt}{dt} = 2K'\sin\psi\sin^2\theta\,d\theta \\ &+\mu\sin\theta\,d\theta\,[\rho_0 + K(\cos\theta - \cos\theta_0) - K'(\sin\theta\sin\psi - \sin\theta_0\sin\psi_0)] \\ &-\frac{1}{2}K\mu\,d\cos^2\theta + K'\mu\rho_0\cos\psi\sin\theta\,dt + \mu K'\sin^2\theta\sin\psi\,d\theta. \end{aligned}\right.$$

Si a l'origine ρ_0 est nul, les équations précédentes se réduisent à

$$d\left(\frac{d\theta}{dt^2} + \sin^2\theta\frac{d\psi}{dt^2} - \frac{2g}{\lambda}\cos\theta\right) = 0,$$

$$d.\sin^2\theta\,\frac{d\psi-Kt}{dt} = -2K'\sin\psi\sin\theta\,d\theta$$

$$+\mu\sin\theta\,d\theta\,[K(\cos\theta - \cos\theta_0) - K'(\sin\psi\sin\theta - \sin\psi_0\sin\theta_0)]$$

$$+\frac{1}{2}K\mu\,d\cos^2\theta + \mu K'\sin^2\theta\sin\psi\,d\theta.$$

Dans les pendules tels qu'on les construit pour les expériences destinées à rendre sensible aux yeux le mouvement de rotation de la Terre, le rapport des deux moments d'inertie $\mu = \frac{C}{A}$ est une fraction extrêmement petite du même ordre de grandeur que n. Lorsqu'il s'agit de ces pendules, en négligeant les quantités de l'ordre de n^2, on

peut réduire les équations à

$$(57)\quad \begin{cases} d\left(\dfrac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\,\dfrac{d\psi^2}{dt^2} - \dfrac{2g}{\lambda}\cos\theta\right) = 0, \\ d.\sin^2\theta\,\dfrac{d(\psi - \mathrm{K}t)}{dt} = -2\mathrm{K}'\sin\psi\sin\theta\,d\theta. \end{cases}$$

Si l'on compare ces équations avec celles que l'on a obtenues pour les pendules simples, et que l'on remarque que l'angle désigné par ψ dans ce dernier cas est égal à l'exces sur 90 degrés de l'angle désigné par ψ dans l'équation (57), on en conclura que le mouvement du pendule composé suit les mêmes lois que celui d'un pendule simple de longueur $\lambda = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{M}l}$.

Cette conclusion exige que $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A}}$ soit très-petit, et que ρ_0 soit nul, ou au moins assez petit pour qu'on puisse le regarder du même ordre de grandeur que n.

QUATRIÈME SECTION.

APPLICATIONS DIVERSES.

§ Ier.

Problème. *Un corps solide de révolution tourne autour de son axe de figure; son centre de gravité est fixe sur la Terre; l'axe du corps est astreint à ne pas sortir d'un plan déterminé qui est aussi fixe sur la Terre, mais il a la liberté de tourner dans ce plan directeur: il s'agit de déterminer les oscillations de l'axe mobile, lorsque le centre de gravité et le plan directeur sont emportés dans le mouvement diurne.*

Je rapporte le mouvement du corps à trois axes ox, oy, oz fixes sur la Terre, et dont l'origine est au centre de gravité du solide. Je place les deux premiers axes dans le plan directeur qui est donné: alors ω est l'inclinaison de ce plan sur l'équateur de la Terre. Par le point o, je mène une parallèle à la partie septentrionale de l'axe terrestre, je la projette sur le plan directeur et je place sur sa direction

l'axe ox. Les équations (50) de la section précédente s'appliquent au mouvement du corps solide que je considère, puisque ce corps a la liberté de tourner soit autour de oz, soit autour de son axe de figure. Seulement il faut adjoindre à ces équations les conditions

$$l = 0, \quad \theta = 90^\circ,$$

qui expriment que le centre de gravité est au point o, et que l'axe de figure ne peut pas sortir du plan directeur xoy. De cette manière, les formules (50) de la section précédente se réduisent à

$$(1) \qquad d\left(\frac{du^2}{dt^2} + \mu\rho^2\right) = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{d^2u}{dt^2} = -\mu n \sin\omega\rho \sin u,$$

$$(3) \qquad d(\rho + n\sin\omega\cos u) = 0;$$

on a posé

$$(4) \qquad u = \psi - 90^\circ.$$

Cet angle u désigne celui que l'axe du corps fait avec ox.

Les intégrales premieres des equations (1) et (3) sont, en désignant par a, b deux constantes arbitraires,

$$(5) \qquad \frac{du^2}{dt^2} + \mu\rho^2 = a,$$

$$(6) \qquad \rho + n\sin\omega\cos u = b;$$

l'équation (5) fait voir que la force vive relative du corps tournant reste constante pendant le mouvement.

L'équation (6) montre que la composante suivant l'axe du corps de la vitesse instantanée et apparente du solide, fait avec la composante suivant le même axe de la vitesse de rotation de la Terre, une somme qui reste constante.

Je désigne par c, u_0 et ρ_0 les valeurs initiales de $\frac{du}{dt}$, u, ρ et j'ai pour les valeurs des constantes arbitraires,

$$(7) \qquad a = c^2 + \mu\rho_0^2, \quad b = \rho_0 + n\sin\omega\cos u_0.$$

$\sqrt{a}$ désigne la force vive initiale. L'équation (7) fait voir que lorsque

ρ_0 et c sont nuls, a l'est aussi, et l'équation (5) montre que $\frac{du^2}{dt^2} + \mu\rho^2$ étant constamment nuls, on a

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \rho = 0.$$

Ce qui signifie que le mobile conserve sa position apparente et son équilibre apparent, lorsqu'à l'origine la force vive est nulle.

J'élimine ρ entre les équations (5) et (6), et j'ai, en ayant égard aux équations (7),

$$\frac{du^2}{dt^2} - 2\mu\rho_0 n \sin\omega \cos u$$
$$= c^2 - \mu\rho_0 n \sin\omega \cos u_0 - \mu n^2 \sin^2\omega (\cos u - \cos u_0)^2.$$

Dans les expériences, on donne au corps tournant une vitesse initiale de rotation ρ_0, très-grande par rapport à n; mais on voit que cette vitesse n'entre pas dans le dernier terme de l'équation précédente, et que ce terme a pour facteur le carré de la fraction excessivement petite n. Dans une première approximation qui sera suffisante ici, nous négligerons ce terme et nous réduirons l'équation à

$$(8) \qquad \frac{du^2}{dt^2} - 2\mu\rho_0 n \sin\omega \cos u = c^2 - 2\mu\rho_0 n \sin\omega \cos u_0.$$

Sous cette forme on reconnaît l'équation d'un pendule simple dont la longueur est égale à l'unité, oscillant autour du point o dans le plan xoy, en vertu d'une force constante, parallèle à ox ou à son prolongement suivant que ρ_0 est positif ou négatif, et dont la grandeur est égale à $\mu\rho_0 n \sin\omega$.

On arriverait au même résultat, si l'on employait les équations (2), (3), au lieu de (1), (3).

La durée des oscillations très-petites de l'axe oz, du corps tournant est, d'après l'équation (8),

$$(9) \qquad T = \frac{\pi}{\sqrt{\mu n \rho_0 \sin\omega}};$$

de là on tire

$$(10) \qquad n = \frac{\pi^2}{\mu\rho_0 \sin\omega\, T^2}.$$

Dans ces équations, ω désigne l'angle que la normale au plan directeur fait avec l'axe de la Terre.

Les équations (8), (9), (10) conduisent facilement aux résultats suivants :

1°. Lorsque le plan directeur est horizontal, l'axe du corps ne peut être en équilibre relatif que suivant la méridienne; cet équilibre est stable, si la rotation du mobile projetée sur l'équateur terrestre est de même sens que celle de la Terre : il est instable dans le cas opposé.

2°. Lorsque le plan directeur est le méridien, l'axe du corps ne peut être en équilibre relatif que s'il est parallèle à l'axe terrestre : l'équilibre est stable si la rotation du corps est de même sens que celle de la Terre.

Ces cas particuliers correspondent aux deux expériences connues de M. Foucault.

3°. Pour que l'axe du solide se dirige parallèlement à l'axe de la Terre, il n'est pas nécessaire que son plan directeur soit le méridien; il suffit que ce plan directeur, quelle que soit son inclinaison sur l'horizon, se trouve lui-même parallèle à l'axe de la Terre.

4°. L'axe du solide est indifférent dans son plan directeur, lorsque ce plan est perpendiculaire à l'axe terrestre.

Dans cette condition, l'appareil présente un cas analogue à celui de l'aiguille astatique imaginée par Ampère.

5°. Généralement, quelle que soit la direction du plan directeur, si l'on projette sur lui l'axe de la Terre, on aura la direction d'équilibre relatif que peut prendre l'axe du corps tournant.

Cette règle générale est analogue à celle qui donne la direction de l'aiguille aimantée, lorsque le plan de la boussole est quelconque.

6°. Lorsque l'axe du corps est hors de sa ligne d'équilibre, il oscille dans le plan directeur autour de sa position d'équilibre stable. Ses oscillations, grandes et petites, suivent les mêmes lois que celles des pendules.

7°. Si l'on fait osciller l'axe du corps tour à tour dans le méridien et dans le plan horizontal, la rotation primitivement donnée au mobile autour de son axe restant la même, on trouve que les oscillations dans le méridien sont plus rapides que les autres.

8°. La durée des oscillations dans le méridien peut servir à déter-

miner la durée de la révolution de la Terre. On tire, en effet, de l'équation (10),

$$n = \frac{\pi}{\mu\rho_0 T}, \text{ lorsque } \omega = 90^\circ.$$

9°. Si l'on compare les carrés des nombres d'oscillations exécutées dans le plan horizontal et dans le méridien pour une même vitesse initiale de rotation du corps, leur rapport donne le cosinus de la latitude; si les rotations initiales n'étaient pas les mêmes, il n'y aurait qu'à multiplier le rapport précédent par le rapport renversé des vitesses de rotation.

Il suit de ces diverses propositions, qu'un expérimentateur, sans sortir de son cabinet, sans voir le ciel, peut déterminer la direction suivant laquelle le ciel paraît immobile, le sens dans lequel les étoiles paraissent tourner, la durée de leur révolution, ou plutôt la durée de la révolution terrestre.

Sans doute, ces déterminations ne peuvent atteindre la précision qu'on obtient dans la mesure des éléments du mouvement terrestre; cependant il est bon de les signaler, parce que je ne crois pas que, jusqu'ici, on ait indiqué qu'elles peuvent se faire, au moins au point de vue spéculatif, par l'observation des oscillations d'un corps. Au reste, il me semble qu'une personne, même obstinée, ne pourrait pas résister à ce mode de démonstration du mouvement de la Terre.

Au lieu d'astreindre l'axe du corps solide à rester sur un plan directeur fixe, on pourrait l'obliger à ne pas sortir de la surface d'un cône droit dont l'axe passe par le point o et a une direction fixe sur la Terre. En prenant cet axe pour la ligne oz, il est clair que θ restera constant et égal au demi-angle du cône, que je désignerai par ε. D'après cela, les équations (50) de la section précédente donnent, lorsque le point o est le centre de gravité du corps,

$$d\left(\sin^2\varepsilon\,\frac{d\psi}{dt} + \mu\rho^2\right) = 0,$$

$$\sin^2\varepsilon\,\frac{d^2\psi}{dt^2} = \mu n\rho \sin\omega \cos\psi,$$

$$d(\rho + n\sin\omega\sin\varepsilon\sin\psi) = 0.$$

Ces équations se discutent de la même manière que les précédentes, et l'on en déduit les résultats suivants :

L'axe du solide tournant a sa position d'équilibre dans un plan mené par l'axe du cône parallèlement à l'axe terrestre. Ses oscillations autour de la position d'équilibre stable ont pour durée

$$T = \pi \sqrt{\frac{\sin \varepsilon}{\mu n \rho_0 \sin \omega}}.$$

Cette formule coïncide avec l'équation (9), lorsque $\varepsilon = 90^\circ$, auquel cas le cône directeur se change en un plan directeur.

En discutant les équations (1), (2), (3), j'ai supposé que ρ_0 est très-grand par rapport à n, afin d'arriver aux résultats qu'on peut obtenir par l'expérience ; mais on pourrait examiner les particularités curieuses que présentent ces équations, lorsque ρ_0 est très-petit : cet examen n'offre au reste aucune difficulté.

§ II.

Problème. *Un corps solide de révolution peut librement tourner autour de son centre de gravité, qui est un point fixe de la Terre; on place son axe de figure suivant une direction quelconque, fixe par rapport à la Terre, et pendant qu'on le maintient dans cette position, on imprime, par un procédé quelconque, un mouvement de rotation apparente au solide; on abandonne ensuite le corps à lui-même en délivrant l'axe de figure, et l'on demande de déterminer le mouvement relatif de ce corps, lorsqu'on suppose le centre de gravité emporté dans le mouvement diurne.*

Je rapporte le mouvement du corps à trois axes rectangulaires ox, oy, oz fixes sur la Terre; je place l'origine o au centre de gravité, et je dirige l'axe oz parallèlement à la partie australe de l'axe terrestre. Dans ces conditions, $\omega = 0$, et les équations (50) de la section précédente se réduisent à

$$(1)\quad \begin{cases} d\left(\dfrac{d\psi}{dt} + \sin^2\theta \dfrac{d\varphi}{dt}\right) + \mu\rho^2 = 0, \\ d\left(\sin^2\theta \dfrac{d\varphi}{dt} - \mu\rho\cos\theta\right) = n\left(1 - \mu\right)\left(d\sin^2\theta \cdot d\rho - n\cos\theta\right) = 0 \end{cases}$$

m, m', m'' étant des constantes arbitraires, les intégrales premières des équations (1) sont

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\,\frac{d\psi^2}{dt^2} + \mu\rho^2 = m,\\ &\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt} + \mu\rho\cos\theta = n(1-\mu)\sin^2\theta - m',\\ &\rho = n\cos\theta + m. \end{aligned}\right.$$

Si l'on remarque que, d'après la section précédente, la force vive apparente du solide est

$$A\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\,\frac{d\psi^2}{dt} + \mu\rho^2\right),$$

on peut conclure des équations (2) que la force vive relative est constante, et que la composante suivant l'axe de figure de la vitesse instantanée de la rotation apparente du corps fait, avec la composante suivant cet axe de la vitesse angulaire de la Terre $-n\cos\theta$, une somme constante.

Si l'on pose

$$n = 0,$$

les équations (2) se réduisent à trois équations connues de la Mécanique.

La vitesse angulaire et instantanée de la rotation apparente du solide est à une époque quelconque, d'après l'équation (17) de la section précédente,

$$(3)\qquad \bar{\omega} = \sqrt{\varpi^2 + \chi^2 + \rho^2};$$

les cosinus des angles que l'axe instantané apparent fait avec les axes ox_1, oy_1, oz_1, ou avec le système ox, oy, oz, sont donnés par les expressions (18), (19) de la section précédente. D'après l'énoncé du problème, l'axe de figure est, à l'origine, l'axe instantané apparent : on a donc, d'après les valeurs (18), pour $t = 0$,

$$(4)\qquad \varpi_0 = 0,\quad \chi_0 = 0,\quad \rho_0 = \bar{\omega}_0.$$

On indique ici par l'indice 0 les valeurs initiales des quantités variables.

Au moyen des valeurs (4), les équations (41) de la section précédente donnent, pour $t = 0$,

$$(5)\qquad \frac{d\theta_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_0}{dt} = 0,$$

conditions qui sont évidemment remplies à l'origine, d'après l'énoncé du problème.

Les constantes arbitraires déterminées par les données initiales ont pour valeur

$$(6)\qquad \begin{cases} m = \mu\rho_0^2, \\ m' = \mu\rho_0 \cos\theta_0 + n(\mu - 1)\sin^2\theta_0, \\ m'' = \rho_0 - n\cos\theta_0, \end{cases}$$

et les équations (2) deviennent

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} + \sin^2\theta\dfrac{d\psi^2}{dt^2} = \mu(\rho_0^2 - \rho^2), \\ \sin^2\theta\dfrac{d\psi}{dt} = \mu(\rho_0\cos\theta_0 - \rho\cos\theta) - n(\mu - 1)(\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta), \\ \rho = \rho_0 - n(\cos\theta - \cos\theta_0). \end{cases}$$

Pour séparer les variables, j'élimine d'abord ρ, et j'ai

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\theta^2}{dt^2} + \sin^2\theta\dfrac{d\psi^2}{dt^2} \\ \qquad = \mu n(\cos\theta_0 - \cos\theta)[2\rho_0 - n(\cos\theta_0 - \cos\theta)], \\ \sin^2\theta\dfrac{d\psi}{dt} \\ \qquad = (\cos\theta_0 - \cos\theta)[\mu\rho_0 + n(\cos\theta_0 + \cos\theta) - \mu n\cos\theta_0]. \end{cases}$$

Je multiplie la première de ces équations par $\sin^2\theta$, et je retranche le carré de la seconde,

$$(9)\qquad \begin{cases} \sin^2\theta\dfrac{d\theta^2}{dt^2} = (\cos\theta_0 - \cos\theta)\left[\begin{array}{l} \mu^2\rho_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)(\cos\theta - \cos\theta_0) \\ \quad + 2n\mu\rho_0\sin^2\theta_0 \end{array}\right] \\ \qquad - n^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)^2\{\mu\sin^2\theta + [(\mu - 1)\cos\theta_0 - \cos\theta]^2\}. \end{cases}$$

Cette équation peut servir pour déterminer θ en fonction de t. En

éliminant dt entre l'équation (9) et la deuxième équation (8), on aura une relation entre ψ, θ, qui servira à déterminer ψ.

Lorsque ρ_0 est nul, l'équation (9) se réduit à

$$\sin^2\theta \frac{d\theta}{dt^2}$$
$$= -n^2 (\cos\theta_0 - \cos\theta)^2 \{\mu \sin^2\theta + [(\mu - 1)\cos\theta_0 - \cos\theta]^2\}$$

Pour que le second membre soit positif en même temps que le premier, il faut que θ soit constamment égal à θ_0, puisque $-n^2$ est multiplié par des facteurs essentiellement positifs. Cette condition de $\theta = \theta_0$ entraîne, dans la deuxième équation (8),

$$\frac{d\psi}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \psi = \psi_0.$$

Ainsi, dans le cas particulier que nous considérons, l'axe du corps reste fixe par rapport à la Terre, malgré le mouvement diurne; le corps lui-même ne prend aucune rotation relative, car la troisième équation (7) donne

$$\varphi = 0.$$

C'est, au reste, ce que l'on peut conclure aussi de l'équation (2) des forces vives relatives; car si, à l'origine, la force vive est nulle, cette force vive devra rester constamment nulle, ce qui exige que les trois termes $\frac{d\theta}{dt^2}$, $\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt^2}$, $\mu\rho^2$ du premier membre de la première équation (2) soient séparément nuls.

Dans les expériences, on donne à ρ_0 une très-grande valeur par rapport à n; lorsque cela a lieu, comme la dernière partie de l'équation (9) ne contient pas le facteur ρ_0, et qu'elle a le facteur excessivement petit n^2, je négligerai cette partie de l'équation (9) dans une première approximation qui sera ici suffisante; on pourrait au reste aller au delà par la méthode des approximations successives. Nous verrons plus loin qu'en conservant les équations complètes, on arrive aux mêmes conséquences générales. Je réduis, d'après cela, l'équation (9) à

$$(10)\quad \sin^2\theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = (\cos\theta_0 - \cos\theta)\left[\begin{array}{c}\mu^2\rho_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)(\cos\theta - \cos\theta_0) \\ + 2n\mu\rho_0 \sin^2\theta_0\end{array}\right];$$

la quantité $\frac{2n\sin^2\theta_0}{\mu(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)}$ est extrêmement petite : par conséquent, la différence $\cos\theta_0 - \frac{2n\sin^2\theta_0}{\mu(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)}$ sera généralement comprise entre $+1$ et -1 : il en sera toujours ainsi lorsqu'à l'origine la partie de l'axe du corps pour laquelle ρ_0 est positif ne sera pas placée de manière à être presque parallèle à la partie nord de l'axe terrestre. En admettant ces conditions remplies, et en désignant par α un angle compris entre 0 et 180°, je poserai

$$(11)\qquad \cos\alpha = \cos\theta_0 - \frac{2n\sin^2\theta_0}{\mu(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)} \quad \text{et} \quad h^2 = \mu^2\rho_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0);$$

de cette manière l'équation (10) devient

$$(12)\qquad \sin^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} = h^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\alpha).$$

On voit par là que l'axe du corps ne conserve pas une inclinaison rigoureusement constante sur l'axe de la Terre, que cette inclinaison varie entre les limites excessivement rapprochées θ_0 et α. Je pose

$$(13)\qquad \cos\theta = \cos\theta_0\cos^2 x + \cos\alpha\sin^2 x,$$

en désignant par x une variable auxiliaire; par ce changement de variable, je tire de l'équation (12),

$$(14)\qquad h\,dt = 2\,dx \quad \text{ou} \quad x = \frac{ht}{2}.$$

J'ai supposé la constante arbitraire nulle, car, d'après l'équation (13), on peut faire commencer en même temps les variables t et x. Les équations (13) et (14) donnent

$$(15)\qquad \cos\theta = \frac{\cos\theta_0 + \cos\alpha}{2} + \frac{\cos\theta_0 - \cos\alpha}{2}\cos ht;$$

en ayant égard à l'équation (11), on a

$$(16)\qquad \cos\theta - \cos\theta_0 = \frac{n\sin^2\theta_0}{\mu(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)} + \frac{n\sin^2\theta_0}{\mu(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)}\cos ht.$$

En portant cette valeur de $\cos\theta$ dans la deuxième équation (8),

on a

$$(17)\quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{n\sin\theta_0}{\mu\rho_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)}\,\frac{1-\cos ht}{\sin^2\theta}\,[\mu\rho_0 + n\cos\theta - \cos\theta_0 - \mu\cos\theta_0].$$

On pourrait intégrer cette équation par la méthode des séries, et nous en donnerons un exemple plus loin ; mais il suffira ici d'obtenir la valeur de ψ par l'approximation qui correspond à la suppression des termes d'un ordre de petitesse plus élevé que celui de n. Ainsi, nous réduirons l'équation (17) à

$$(18)\qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{n\rho_0}{\rho_0 - 2n\cos\theta_0}\,(1-\cos ht);$$

l'intégrale de cette équation est

$$\psi - \psi_0 = \frac{n\rho_0}{\rho_0 - 2n\cos\theta_0}\,t - \frac{n\rho_0}{\rho_0 - 2n\cos\theta_0} + \frac{1}{h}\sin ht,$$

ou sensiblement

$$(19)\qquad \psi - \psi_0 = nt - \frac{n}{\mu\rho_0}\sin ht.$$

Considérons d'abord les équations (16) et (19) dans leurs parties principales $\cos\theta_0$ et nt. Ces équations représenteront alors le mouvement d'un axe qui tourne uniformément autour d'une parallèle à l'axe terrestre, en allant en sens opposé du mouvement de la Terre, avec une vitesse angulaire égale à celle de la Terre, et en conservant une inclinaison constante sur la ligne du monde : en d'autres termes, ces équations représentent le mouvement d'une lunette parallatique. Si on prend les équations complètes, on voit que l'axe du corps tournant suit le chemin d'une lunette parallatique avec un mouvement de nutation circulaire excessivement peu étendu. Le diamètre du cercle de nutation est la quantité très-petite $\frac{2n\sin\theta_0}{\mu\rho_0}$, et la durée de la nutation est $\frac{2\pi}{h}$ ou sensiblement $\frac{2\pi}{\mu\rho_0}$.

Les calculs qui précèdent conduisent aux résultats suivants :

1°. Si le corps mobile ne reçoit aucune rotation artificielle et est placé en équilibre relatif sur la Terre, lorsqu'on l'abandonnera à lui-

même, il persistera dans son état d'équilibre relatif, soit que la Terre tourne ou qu'elle ne tourne pas.

2°. Si le corps a primitivement reçu une vitesse de rotation très-considérable autour de son axe de figure et qu'on ait placé cet axe en équilibre relatif sur la Terre avant d'abandonner le mobile à lui-même, cet axe persistera indéfiniment dans son état d'équilibre relatif, si la Terre ne tourne pas; mais si la Terre tourne, cet axe sortira de lui-même de la position d'équilibre relatif qu'on lui a donnée, il prendra en quelque sorte un mouvement spontané, un mouvement sans cause extérieure apparente pour un observateur qui ne connaîtrait pas le mouvement terrestre.

3°. Le sens dans lequel se fait le déplacement relatif de l'axe, dans ce mouvement spontané apparent, ne dépend pas du sens dans lequel la rotation artificiellement donnée au corps s'effectue; il est toujours contraire à celui du mouvement de la Terre, et peut, par cela même, faire connaître ce dernier.

4°. La rotation de la Terre est si bien empreinte dans le mouvement relatif que l'axe du corps tournant semble prendre spontanément, que si l'on pouvait exécuter l'expérience dans toute la rigueur des conditions abstraites du problème, on en déduirait et la direction de l'axe terrestre et même la vitesse de rotation de la Terre.

5°. Tant que la rotation du corps persiste à des degrés divers, pourvu qu'elle reste notable, si l'axe est arrêté un moment par suite d'un obstacle quelconque, aussitôt que l'obstacle disparaîtra, l'axe du corps sortira de nouveau de l'état d'équilibre relatif, et il en sortira chaque fois que les mêmes conditions se renouvelleront; c'est dans cette tendance persistante qu'a l'axe du corps à sortir de son équilibre relatif, qu'on trouve la raison d'espérer qu'on pourra réussir à manifester expérimentalement ce résultat du mouvement de la Terre. On connaît sur ce sujet les expériences de M. Foucault.

Les conclusions générales auxquelles nous venons d'arriver étant obtenues en réduisant les équations à leurs parties principales, il est bon maintenant d'examiner jusqu'à quel point elles sont indépendantes de ces réductions. Pour cela, je traiterai d'abord d'une manière complète le cas particulier où le solide de révolution est une sphère

homogène ou un corps composé de couches sphériques homogènes : dans ce cas, on a

$$\mu = 1 ;$$

je considérerai ensuite ce qui a lieu lorsque μ n'est pas égal à l'unité.

Lorsque $\mu = 1$, les équations générales deviennent

$$(20)\quad \left\{ \begin{aligned} &\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt^2} = [\rho_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0) + n^2](\cos\theta_0 - \cos\theta) \\ &\times \left[\left(\cos\theta - \cos\theta_0 + \frac{2n\rho_0\sin^2\theta_0}{\rho_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0) + n^2}\right)\right], \end{aligned} \right.$$

$$(21)\quad \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = (\cos\theta_0 - \cos\theta)(\rho_0 + n\cos\theta_0).$$

La quantité

$$\rho_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0) + n^2$$

peut s'écrire ainsi :

$$(\rho_0 - n)^2 + 4n\rho_0\sin^2\tfrac{1}{2}\theta_0 ;$$

or, rien n'empêche de placer l'axe oz_1 sur la partie de l'axe de figure pour laquelle la rotation initiale s'effectue de droite à gauche, et, par suite, de regarder ρ_0 comme positif : en agissant ainsi, on voit que la quantité précédente est toujours positive ; on la représentera par h^2 et on posera

$$(22)\quad h^2 = \rho_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0) + n^2.$$

Je pose, en outre,

$$(23)\quad \mathrm{H} = \cos\theta_0 - \frac{2n\rho_0\sin\theta_0}{h^2} ;$$

H est, d'après cette expression, toujours compris entre $+1$ et -1, par suite, il peut être représenté par le cosinus d'un angle θ' compris entre 0 et 180° ; je pose

$$(24)\quad \mathrm{H} = \cos\theta'.$$

D'après l'équation (23), on voit que θ' est plus grand que θ_0 ou égal à θ_0 lorsque $\theta_0 = 0$; j'écris maintenant l'équation (20) de la manière

suivante :

$$(25)\qquad \sin^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} = h^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta').$$

Cette équation montre que les seules valeurs admissibles de θ, c'est-à-dire celles qui rendent le second membre positif, sont comprises entre θ_0 et θ'. En général, θ_0 et θ' different de 0° ou de 180°, en sorte que $\sin\theta$ n'est pas nul. On voit par l'équation (25) que $\frac{d\theta}{dt}$ ne peut etre nul que lorsque θ est égal à θ_0 ou à θ'. Il suit de là, que l'inclinaison de l'axe primitif de rotation sur l'axe terrestre est continuellement variable et oscille entre les limites extrêmes θ_0 et θ'.

Pour connaître les oscillations de l'axe du corps par rapport à la direction de l'axe terrestre, je pose

$$(26)\qquad \cos\theta = \cos\theta_0\cos^2 x + \cos\theta'\sin^2 x;$$

d'où je tire

$$(27)\qquad \begin{cases} \cos\theta_0 - \cos\theta = (\cos\theta_0 - \cos\theta')\sin^2 x, \\ \cos\theta - \cos\theta' = (\cos\theta_0 - \cos\theta')\cos^2 x, \\ \sin\theta\, d\theta = (\cos\theta_0 - \cos\theta')\, 2\sin x\cos x\, dx. \end{cases}$$

L'équation (25) donne

$$(28)\qquad h\,dt = \frac{\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{(\cos\theta_0 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta')}},$$

lorsque dt est positif; on prendra le radical avec le signe + ou le signe −, suivant que $d\theta$ sera positif ou négatif. Quel que soit ce signe, l'équation (28) donne, au moyen des équations (27),

$$(29)\qquad h\,dt = 2\,dx,$$

d'où

$$x = \frac{ht}{2}.$$

On suppose, dans cette intégrale, que la variable auxiliaire x commence en même temps que t; cette supposition est autorisée par l'équation (26) qui définit la variable x. Au moyen de cette valeur de x,

on a, d'après l'équation (26),

$$(30)\qquad \cos\theta = \frac{\cos\theta_0 + \cos\theta'}{2} + \frac{\cos\theta_0 - \cos\theta'}{2}\cos ht;$$

on voit par là que la variable θ suit les mêmes lois que l'écart d'un pendule conique par rapport à la verticale, et que la durée de la période est

$$(31)\qquad T = \frac{2\pi}{h}.$$

J'élimine dt entre les équations (29) et (21), et j'ai

$$h\,d\psi = \frac{2(\cos\theta_0 - \cos\theta)(\rho_0 + n\cos\theta)\,dx}{\sin^2\theta};$$

au moyen de l'équation (27), cette équation devient d'abord

$$h\,d\psi = \frac{(\cos\theta_0 - \cos\theta')(1 - \cos 2x)\left[\rho_0 + \frac{n(\cos\theta_0 + \cos\theta')}{2} + \frac{n(\cos\theta_0 - \cos\theta')}{2}\cos 2x\right]dx}{\sin^2\theta}.$$

Je pose

$$(32)\qquad \left\{\begin{aligned} A_0 &= \rho_0 + \frac{n(\cos\theta_0 + 3\cos\theta')}{4}, \\ A_1 &= -\rho_0 - n\cos\theta', \\ A_2 &= \frac{n(\cos\theta_0 - \cos\theta')}{4}, \end{aligned}\right.$$

et l'équation précédente devient

$$(33)\qquad \left\{\begin{aligned} 2h\,d\psi = {} & (\cos\theta_0 - \cos\theta')(A_0 + A_1\cos 2x + A_2\cos 4x) \\ & \times\left(\frac{1}{1-\cos\theta} + \frac{1}{1+\cos\theta}\right)dx. \end{aligned}\right.$$

On tire de l'équation (26)

$$1 + \cos\theta = \frac{2 + \cos\theta_0 + \cos\theta' + (\cos\theta_0 - \cos\theta')\cos 2x}{2},$$

$$1 - \cos\theta = \frac{2 - \cos\theta_0 - \cos\theta' - (\cos\theta_0 - \cos\theta')\cos 2x}{2}.$$

Je désigne par 2μ et 2ν deux angles plus petits que 90°, et tels que l'on ait

$$(34)\quad \begin{cases} \sin 2\mu = \dfrac{\cos\theta - \cos\theta'}{2 + \cos\theta - \cos\theta'}, \\[2ex] \sin 2\nu = \dfrac{\cos\theta_0 - \cos\theta'}{2 - \cos\theta_0 - \cos\theta'}; \end{cases}$$

on déduit de là

$$2 - \cos\theta_0 + \cos\theta' = (\cos\theta_0 - \cos\theta')\frac{1 + \operatorname{tang}^2\mu}{2\operatorname{tang}\mu},$$

$$2 - \cos\theta_0 - \cos\theta' = (\cos\theta_0 - \cos\theta')\frac{1 + \operatorname{tang}^2\nu}{2\operatorname{tang}\nu}.$$

D'après ces valeurs, on a

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{1 + \cos\theta} = \dfrac{4\operatorname{tang}\mu}{\cos\theta_0 - \cos\theta'}(1 + \operatorname{tang}^2\mu + 2\operatorname{tang}\mu\cos 2x)^{-1}, \\[2ex] \dfrac{1}{1 - \cos\theta} = \dfrac{4\operatorname{tang}\nu}{\cos\theta_0 - \cos\theta'}(1 + \operatorname{tang}^2\nu - 2\operatorname{tang}\nu\cos 2x)^{-1}; \end{cases}$$

on connaît les formules suivantes, qu'on peut déduire d'un théorème d'Euler:

$$(36)\quad \begin{cases} (1 + \operatorname{tang}^2\mu + 2\operatorname{tang}\mu\cos 2x)^{-1} \\ \quad = \dfrac{1}{1 - \operatorname{tang}^2\mu}(1 - 2\operatorname{tang}\mu\cos 2x + 2\operatorname{tang}^2\mu\cos 4x - \ldots), \\[2ex] (1 + \operatorname{tang}^2\nu - 2\operatorname{tang}\nu\cos 2x)^{-1} \\ \quad = \dfrac{1}{1 - \operatorname{tang}^2\nu}\left[\begin{array}{l} 1 + 2\operatorname{tang}\nu\cos 2x + 2\operatorname{tang}^2\nu\cos 4x \\ \quad + 2\operatorname{tang}^3\nu\cos 6x + 2\operatorname{tang}^4\nu\cos 8x + \ldots \end{array}\right]. \end{cases}$$

Si l'on multiplie chacune des équations (36) par le trinôme

$$A_0 + A_1\cos 2x + A_2\cos 4x,$$

on obtient deux nouvelles séries, que je désignerai par

$$\frac{B_0 + B_1\cos 2x + B_2\cos 4x + B_3\cos 6x + \ldots + B_n\cos 2nx + \ldots}{1 - \operatorname{tang}^2\mu},$$

$$\frac{C_0 + C_1\cos 2x + C_2\cos 4x + \ldots + C_n\cos 2nx + \ldots}{1 - \operatorname{tang}^2\nu}.$$

et les coefficients de ces séries sont

$$(37)\quad \begin{cases} B_0 = A_0 - A_1 \operatorname{tang}\mu + A_2 \operatorname{tang}^2\mu, \\ B_1 = -2A_0 \operatorname{tang}\mu + (A_1 - A_2 \operatorname{tang}\mu)(1 + \operatorname{tang}^2\mu), \\ B_2 = 2A_0 \operatorname{tang}^2\mu - A_1 \operatorname{tang}\mu(1 - \operatorname{tang}\mu) + A_2(2 + \operatorname{tang}^2\mu); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$(38)\quad \begin{cases} C_0 = A_0 + A_1 \operatorname{tang}\nu + A_2 \operatorname{tang}^2\nu, \\ C_1 = 2A_1 \operatorname{tang}\nu + (A_1 + A_2 \operatorname{tang}\nu)(1 + \operatorname{tang}^2\nu), \\ C_2 = 2A_0 \operatorname{tang}^2\nu + A_1 \operatorname{tang}\nu(1 + \operatorname{tang}\nu) + A_2(2 + \operatorname{tang}^2\nu); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Au moyen de ces expressions, l'équation (33) devient

$$(39)\quad \begin{aligned} \int h\,d\psi = {} & 2\frac{\operatorname{tang}\mu}{1-\operatorname{tang}^2\mu}(B_0 + B_1\cos 2x + B_2\cos 4x + \dots)\,dx \\ & + \frac{2\operatorname{tang}\nu}{1-\operatorname{tang}^2\nu}(C_0 + C_1\cos 2x + C_2\cos 4x + \dots)\,dx. \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{h}{2}(\psi - \psi_0) = {} & \frac{\operatorname{tang}\mu}{1-\operatorname{tang}^2\mu}\left(B_0 x + \frac{1}{2}B_1 \sin 2x + \frac{1}{4}B_2 \sin 4x + \dots\right) \\ & + \frac{\operatorname{tang}\nu}{1-\operatorname{tang}^2\nu}\left(C_0 x + \frac{1}{2}C_1 \sin 2x + \frac{1}{4}C_2 \sin 4x + \dots\right). \end{aligned}$$

ou bien, à cause de l'équation (29),

$$(40)\quad \begin{cases} \psi - \psi_0 = \dfrac{\operatorname{tang}\mu}{1-\operatorname{tang}^2\mu}\left(B_0 t + \dfrac{1}{h}\sum_1^\infty \dfrac{B_i}{i}\sin iht\right) \\ \qquad + \dfrac{\operatorname{tang}\nu}{1-\operatorname{tang}^2\nu}\left(C_0 t + \dfrac{1}{h}\sum_1^\infty \dfrac{C_i}{i}\sin iht\right). \end{cases}$$

Je désigne par $\frac{1}{2}\Psi$ la différence des valeurs de ψ correspondant à $t = \frac{j\pi}{h}$ et à $t = \frac{(j+1)\pi}{h}$, j étant un nombre entier; l'équation (40)

donne

$$(41)\qquad \frac{1}{2}\Psi = \frac{\pi}{h}\left(B_0 \frac{\operatorname{tang}\mu}{1-\operatorname{tang}^2\mu} + C_0 \frac{\operatorname{tang}\nu}{1-\operatorname{tang}^2\nu}\right).$$

On voit que cette valeur de $\frac{1}{2}\Psi$ est indépendante du nombre entier j. Il suit de là que la projection de l'axe du corps sur le parallèle terrestre tourne en décrivant, autour du centre de gravité, des angles qui croissent suivant les termes d'une progression arithmétique dont la raison est $\frac{1}{2}\Psi$, lorsque le temps croît suivant les termes d'une progression arithmétique commençant par zéro et ayant pour raison la quantité

$$\frac{1}{2}T = \frac{\pi}{h}.$$

Nous pouvons appeler vitesse moyenne le quotient des raisons de ces deux progressions, et en désignant par V cette vitesse, on a

$$(42)\qquad V = B_0 \frac{\operatorname{tang}\mu}{1-\operatorname{tang}^2\mu} + C_0 \frac{\operatorname{tang}\nu}{1-\operatorname{tang}^2\nu};$$

pour connaître le sens de cette vitesse et sa grandeur, il suffit d'examiner le signe de V ; la rotation se fera de droite à gauche ou en sens contraire du mouvement terrestre, lorsque V sera positif.

Les angles μ et ν sont plus petits que 45 degrés, par conséquent les quotients $\frac{\operatorname{tang}\mu}{1-\operatorname{tang}^2\mu}$, $\frac{\operatorname{tang}\nu}{1-\operatorname{tang}^2\nu}$ sont positifs; il est facile de transformer ces valeurs de la manière suivante. On tire des équations (34)

$$\cos 2\mu = \frac{\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta'}{2}}{1 + \cos\theta + \cos\theta'};$$

or, on a en général

$$\operatorname{tang}^2\mu = \frac{1-\cos 2\mu}{1+\cos 2\mu}.$$

Au moyen de l'expression précédente, on en déduit

$$
43 \quad \left\{
\begin{aligned}
\operatorname{tang} \mu &= \frac{\cos\frac{\theta_0}{2} - \cos\frac{\theta'}{2}}{\cos\frac{\theta_0}{2} + \cos\frac{\theta'}{2}}, \\
1 - \operatorname{tang}^2 \mu &= \frac{4\cos\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\theta'}{2}}{\left(\cos\frac{\theta_0}{2} + \cos\frac{\theta'}{2}\right)^2}, \\
1 + \operatorname{tang}^2 \mu &= \frac{2 + \cos\theta_0 + \cos\theta'}{\left(\cos\frac{\theta_0}{2} + \cos\frac{\theta'}{2}\right)^2}, \\
\frac{\operatorname{tang}\mu}{1 - \operatorname{tang}^2\mu} &= \frac{\cos\theta_0 - \cos\theta'}{8\cos\frac{\theta_0}{2}\cos\frac{\theta'}{2}};
\end{aligned}
\right.
$$

de la même manière, on obtient

$$
44 \quad \left\{
\begin{aligned}
\operatorname{tang} \nu &= -\frac{\sin\frac{1}{2}\theta_0 - \sin\frac{1}{2}\theta'}{\sin\frac{1}{2}\theta_0 + \sin\frac{1}{2}\theta'}, \\
1 - \operatorname{tang}^2 \nu &= \frac{4\sin\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\theta'}{2}}{\left(\sin\frac{\theta_0}{2} + \sin\frac{\theta'}{2}\right)^2}, \\
1 + \operatorname{tang}^2 \nu &= \frac{2 - \cos\theta_0 - \cos\theta'}{\left(\sin\frac{\theta_0}{2} + \sin\frac{\theta'}{2}\right)^2}, \\
\frac{\operatorname{tang}\nu}{1 - \operatorname{tang}^2\nu} &= \frac{\cos\theta_0 - \cos\theta'}{8\sin\frac{\theta_0}{2}\sin\frac{\theta'}{2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Pour abréger, je pose

$$
45 \quad \left\{
\begin{aligned}
P &= \frac{\rho_0^2 \sin^2\theta_0}{\rho_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0) + n^2} = \frac{\sin^2\theta_0}{1 - 2\frac{n}{\rho_0}\cos\theta_0 + \left(\frac{n}{\rho_0}\right)^2}, \\
Q &= \frac{1}{\cos\frac{\theta_0}{2} + \cos\frac{\theta'}{2}}, \qquad R = \frac{1}{\sin\frac{\theta_0}{2} + \sin\frac{\theta'}{2}};
\end{aligned}
\right.
$$

au moyen des équations (22), (23), (24), (43), (44), (45), la valeur de V donnée par l'équation (42) devient

$$(46)\quad \begin{cases} V = n\,\dfrac{P}{4\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi_0}{2}}\left\{1 - \frac{n}{\varphi_0}\cos\varphi_0 - PQ^2 - \left(\frac{n}{\varphi_0}\right)^2 P\left(Q^2\cos\varphi_0 - \frac{3}{2}\right) - 2\left(\frac{n}{\varphi_0}\right)^2 P^2 Q^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\varphi_0}\right)^3 P^3 Q^4\right\} \\ \quad + n\,\dfrac{P}{4\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi_0}{2}}\left\{1 - \frac{n}{\varphi_0}\cos\varphi_0 - PR^2 - \left(\frac{n}{\varphi_0}\right)^2 P\left(R^2\cos\varphi_0 - \frac{3}{2}\right) - 2\left(\frac{n}{\varphi_0}\right)^2 R^2 P^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{n}{\varphi_0}\right)^3 R^3 P^3\right\}. \end{cases}$$

La valeur de V que nous venons d'obtenir est indépendante de toute hypothèse faite sur les grandeurs relatives de φ_0 et n. Dans les applications, la vitesse angulaire de la Terre est une fraction très-petite, la vitesse angulaire φ_0 est un nombre plus grand que l'unité, puisque, si le corps solide tournant ne faisait qu'un demi-tour par seconde, on aurait

$$\varphi_0 = \pi,$$

et que pour un nombre quelconque p de tours par seconde, on a

$$\varphi_0 = 2p\pi.$$

D'après cela, on peut négliger dans la valeur de V, développée suivant les puissances de $\frac{n}{\varphi_0}$, le produit de $\frac{n}{\varphi_0}$ et de ses diverses puissances par n, et alors l'équation (46) donne

$$(47)\qquad V = \varphi_0.$$

Dans les conditions que nous venons d'indiquer et qui sont celles des expériences, la projection sur un parallèle terrestre de l'axe du corps solide tourne en sens contraire de la rotation terrestre, avec une vitesse moyenne égale à la vitesse angulaire de la Terre. Au même degré d'approximation, on a

$$(48)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \cos\varphi_0 - \dfrac{n\sin^2\varphi_0}{\varphi_0} - \dfrac{n\sin^2\varphi_0}{\varphi_0}\cos ht, \\ \varphi - \varphi_0 = nt - \dfrac{n}{\varphi_0}\sin ht. \end{cases}$$

Ces expressions nous montrent que θ est sensiblement constant, et que $\psi - \psi_0$ est égal sensiblement à nt. Si l'on fait d'abord abstraction des parties périodiques qui entrent dans les équations (48), on dira que l'axe du solide tournant se meut autour d'une parallèle à l'axe terrestre, en conservant sur cette ligne une inclinaison constante, que sa vitesse angulaire est égale à celle de la Terre, et dirigée en sens contraire de la rotation terrestre; en d'autres termes, l'axe du solide se mouvra comme une lunette parallatique. En tenant compte des parties périodiques dans les équations (48), on voit que l'axe du solide décrit le chemin d'une lunette parallatique avec un mouvement de nutation circulaire d'une étendue excessivement petite, le diamètre du cercle de nutation étant $\frac{2n\sin\theta_0}{\rho_0}$, et la durée de la période ayant pour valeur $\frac{\lambda\pi}{h}$ ou sensiblement $\frac{2\pi}{\rho}$. Si l'on suppose $\rho_0 = 60$, l'angle $\frac{2n}{\rho}$ correspond à $\frac{1'}{2}$. Pour ce cas, le diamètre du cercle de nutation, pris sur un cercle de $0^m.36$ de contour, s'étendrait sur une longueur plus petite que $\frac{1}{72000}$ de millimètre. Dans les expériences, telles qu'on les a exécutées jusqu'ici, on peut évidemment faire abstraction de la nutation que nous venons d'indiquer.

Je considère maintenant le mouvement du solide, lorsque les moments principaux d'inertie C, A ne sont pas égaux, et j'écris l'équation (9) comme il suit :

$$(49)\quad \begin{aligned} \sin^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} &= \mu^2\rho_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)(\cos\theta_0 - \cos\theta) \\ &\times \left\{\cos\theta - \cos\theta_0 + \frac{2n\sin\theta_0}{2(\rho_0 - 2n\cos\theta)} + \frac{n}{\mu^2\rho_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)}(\cos\theta - \cos\theta_0)\right. \\ &\times \left.\{\mu\sin^2\theta + [(\mu - 1)\cos\theta_0 - \cos\theta]^2\}\right. \end{aligned}$$

On peut placer oz_1 sur l'une ou l'autre des deux parties de l'axe de figure du corps tournant; nous le mettrons de manière que θ_0 soit positif. Dans les expériences, ρ_0 est une très-grande quantité par rapport à n; nous pourrons donc regarder $\mu^2\rho_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)$ comme positif; il serait, au reste, aisé de discuter les cas particuliers où $\rho_0 = 2n\cos\theta_0$ et où ρ_0 est plus petit que $2n\cos\theta_0$. Dans cette suppo-

sition, je pose

$$(50)\qquad h^2 = \mu^2 \rho_0 (\varrho_0 - 2n\cos\theta_0),$$

et l'équation précédente devient

$$(51)\qquad \sin^2\theta \frac{d\theta^2}{dt} = \pm h^2 (\cos\theta_0 - \cos\theta)(\cos\theta - M)(\cos\theta - N)(P - \cos\theta),$$

en désignant par M, N, P les racines de l'équation

$$(52)\qquad \left\{ \begin{aligned} & x - \cos\theta_0 + \frac{2\mu\varrho_0 n \sin^2\theta}{h^2} \\ & + \frac{n^2}{h^2}(x - \cos\theta_0)\left\{\mu(1 - x^2) + [x - (\mu - 1)\cos\theta_0]^2\right\} = 0, \end{aligned} \right.$$

et en prenant le signe + ou le signe −, suivant que le coefficient du terme du troisième degré dans le polynôme précédent est négatif ou positif.

L'équation (51) convient à tous les cas qui peuvent se présenter: dans les expériences, on donne à ϱ_0 non pas une valeur très-petite et de même ordre que n, mais une valeur très-grande par rapport à n, en sorte que la quantité

$$\frac{2\mu\varrho_0 n \sin^2\theta}{h^2} = 2\frac{n}{\varrho_0}\sin^2\theta_0 \frac{1}{\mu\left(1 - 2\frac{n}{\varrho_0}\cos\theta_0\right)}$$

est une fraction extrêmement petite. Si on ne place pas, à l'origine du mouvement, l'axe de figure du solide extrêmement près de la direction parallèle à la partie nord de l'axe terrestre, si $\cos\theta_0$ diffère assez de -1 pour que la différence soit plus grande que $\frac{2\mu\varrho_0 n \sin^2\theta}{h}$, alors la quantité $\cos\theta_0 - \frac{2n\varrho_0\mu\sin^2\theta_0}{h}$ sera comprise entre -1 et $+1$, et pourra être représentée par le cosinus d'un angle α, compris entre 0 et 180 degrés. Les conditions que nous venons de considérer sont toujours réalisées dans les expériences; lorsqu'elles ont lieu, nous poserons

$$(53)\qquad \cos\alpha = \cos\theta_0 - \frac{2\mu n\varrho_0 \sin^2\theta_0}{h}.$$

et l'équation (52) deviendra

$$(54)\quad x - \cos\alpha + \frac{n}{h^2}(x - \cos\theta_0)\{\mu(1 - x^2) + [x - (\mu - 1)\cos\theta_0]^2\} = 0.$$

Si l'on fait

$$x = \cos\theta_0 \quad \text{et} \quad x = \cos\alpha,$$

le premier membre de l'équation (54) donne

$$\frac{2\mu n(\alpha - \theta_0)\sin^2\theta}{h^2}, \quad -\frac{n^2}{h^2}(\alpha - \theta_0)\left\{\mu\sin^2\alpha - [\cos\alpha - (\mu - 1)\cos\theta_0]^2\right\}.$$

Ces deux résultats sont de signes contraires: donc l'équation (54) a toujours une racine réelle comprise entre $\cos\theta_0$ et $\cos\alpha$: cette racine peut donc être représentée par le cosinus d'un angle θ', plus grand que θ_0 et plus petit que α, et d'ailleurs extrêmement peu différent de θ_0, puisque $\alpha - \theta_0$ est une très-petite quantité.

Pour avoir quelques notions sur les deux autres racines de l'équation (54), je considère d'abord le cas où μ est plus grand que l'unité : c'est ce cas qui est ordinairement réalisé dans les expériences. Si l'on remplace, dans le premier membre de l'équation (54), x par un nombre positif suffisamment grand, comme le terme du troisième degré a un coefficient négatif, on sait, par la théorie des équations, qu'on aura un résultat négatif; d'une autre part, si l'on fait

$$x = 1,$$

on obtient

$$1 - \cos\alpha + \frac{n^2}{h^2}(1 - \cos\theta_0)[1 - (\mu - 1)\cos\theta_0]^2,$$

quantité qui est positive : donc l'équation (54) a une racine réelle comprise entre $+1$ et $+\infty$. On voit, de la même manière, que la troisième racine réelle de l'équation (54) est comprise entre -1 et $-\infty$. On peut donc représenter les racines de l'équation (54) par

$$\cos\theta', \quad 1 + \varepsilon^2, \quad -1 - \delta^2,$$

ε^2 et δ^2 étant des nombres positifs.

Alors l'équation (51) peut s'écrire ainsi :

$$(55)\quad \sin^2\theta\frac{d\theta^2}{dt^2} = h^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta')(\cos\theta + 1 + \delta^2)(1 + \varepsilon^2 - \cos\theta).$$

Le produit $h^2(\cos\theta + 1 + \delta^2)(1 + \rho^2 - \cos\theta)$ est positif pour toute valeur de θ; donc les valeurs admissibles de θ doivent rendre positif le produit $(\cos\theta_0 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta')$, ce qui exige que θ soit compris entre les valeurs très-rapprochées θ_0, θ'. L'équation (55) montre, en outre, que θ_0, θ' sont les limites de θ, et qu'à ces limites $\frac{d\theta}{dt}$ est nul.

Il résulte de là que l'axe de figure du corps conserve, par rapport à l'axe terrestre, une inclinaison sinon rigoureusement constante, au moins sensiblement constante.

θ étant égal à θ_0 ou plus grand que θ_0, $\cos\theta_0 - \cos\theta$ est toujours positif; d'une autre part, ρ_0 étant très-grand par rapport à n, la quantité $\mu\rho_0 + n(\cos\theta_0 + \cos\theta) - \mu n\cos\theta_0$ est aussi positive; d'où il suit que la valeur $\frac{d\psi}{dt}$, donnée par la deuxième équation (8), est toujours positive. De là on conclut que la projection, sur un parallèle terrestre, de l'axe de figure du corps, tourne d'un mouvement continu toujours dans le même sens et en sens contraire du mouvement terrestre.

Pour connaître la loi des variations de θ et ψ, on s'y prendra comme dans le cas déjà examiné pour un corps sphérique. En effet, en posant

$$\cos\theta = \cos\theta_0\cos^2 x + \cos\theta'\sin^2 x, \tag{56}$$

l'équation (55) donne

$$h\,dt = 2\,dx\left(1 + \delta^2 + \frac{\cos\theta_0 + \cos\theta'}{2} + \frac{\cos\theta_0 - \cos\theta'}{2}\cos 2x\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\left(1 + \varepsilon^2 - \frac{\cos\theta_0 + \cos\theta'}{2} - \frac{\cos\theta_0 - \cos\theta'}{2}\cos 2x\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

et en posant

$$\sin 2\lambda = \frac{\cos\theta_0 - \cos\theta'}{2 + 2\delta^2 + \cos\theta_0 + \cos\theta'}, \qquad \sin 2\nu = \frac{\cos\theta_0 - \cos\theta'}{2 + 2\varepsilon^2 - \cos\theta_0 - \cos\theta'},$$

cette équation devient

$$h\,dt = \frac{8\sqrt{\tang\lambda\,\tang\nu}}{\cos\theta_0 - \cos\theta'}\left(1 + \tang^2\lambda + 2\tang\lambda\cos 2x\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times\left(1 + \tang^2\nu - 2\tang\mu\cos 2x\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

D'après le théorème d'Euler, on a

$$(1 + \tang^2 \nu - 2 \tang \nu \cos 2x)^{-\frac{1}{2}} = A_0 + \sum_1^\infty A_i \cos 2ix,$$

$$1 - \tang^2 \nu - 2 \tang \nu \cos 2x)^{-\frac{1}{2}} = B_0 + \sum_1^\infty B_i \cos 2ix,$$

i étant un nombre entier pris entre 1 et ∞ ; A_0, A_i, B_0, B_i étant des coefficients que le théorème apprend à former. Si l'on multiplie les deux séries, on a une nouvelle série de la forme

$$C_0 + \sum_1^\infty C_i \cos 2ix,$$

dont les coefficients sont faciles à former, et alors l'équation précédente devient

$$h\,dt = \frac{8\sqrt{\tang \nu \tang \nu}}{\cos \theta_0 - \cos \theta'} \left(C_0 + \sum_1^\infty C_i \cos 2ix\right),$$

d'où

$$(57) \qquad ht = \frac{8\sqrt{\tang \nu \tang \nu}}{\cos \theta_0 - \cos \theta'} \left(C_0 x + \sum_1^\infty \frac{C_i}{2i} \sin 2ix\right).$$

et les équations (56), (57) donnent la loi des variations de θ. Au moyen des expressions (56), (57), on pourra trouver la valeur de ψ, en s'y prenant de la même manière que dans le cas déjà traité de la sphère.

Nous venons d'examiner ce qui a lieu, au moins d'une manière générale, lorsque μ est plus petit que l'unité, et nous pourrions nous borner à ce cas, puisque c'est celui dans lequel les expériences sont ordinairement établies; néanmoins il est bon de considérer maintenant ce qui a lieu lorsque μ est plus grand que l'unité.

Dans ce cas, l'équation (54) a toujours une racine réelle comprise entre $\cos \theta_0$ et $\cos \alpha$, racine que nous désignerons par $\cos \theta'$: mais on ne peut plus dire que les deux autres racines sont réelles et comprises entre $+1$ et $+\infty$, ou entre -1 et $-\infty$. Pour avoir quelques notions sur les deux autres racines, j'ordonne d'abord l'équation (54), et

j'ai

$$x^3 + x^2 \cos\theta_0 + x \left\{ 1 + \frac{n^2}{h^2}\left[\mu - (1-\mu^2)\cos^2\theta_0\right] \right\} \frac{h^2}{n^2(1-\mu)}$$

$$- \frac{h^2}{n^2(1-\mu)} \left\{ \cos\alpha + \frac{n^2}{h^2}\cos\theta_0 \left[\mu + (\mu-1)^2\cos^2\theta_0\right] \right\},$$

ou

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^3 + x^2\cos\theta_0 + x \left\{ \frac{h^2}{n^2(1-\mu)} + \left[\frac{\mu}{1-\mu} + (1-\mu)\cos^2\theta_0 \right] \right\} \\ - \frac{h^2\cos\alpha}{n^2(1-\mu)} - \cos\theta_0 \left[\frac{\mu}{1-\mu} + (1-\mu)\cos^2\theta_0 \right] = 0. \end{array} \right.$$

Je pose

$$P = \frac{h^2}{n^2(1-\mu)} + \frac{\mu}{1-\mu} - (1-\mu)\cos^2\theta_0,$$

$$Q = -\frac{h^2\cos\alpha}{n^2(1-\mu)} - \cos\theta_0 \left[\frac{\mu}{1-\mu} + (1-\mu)\cos^2\theta_0 \right].$$

et l'équation (58) devient

$$(59) \qquad x^3 + x^2\cos\theta_0 + Px + Q = 0.$$

Je pose

$$(60) \qquad x = y - \frac{\cos\theta_0}{3}.$$

et l'équation (59) se réduit à

$$(61) \qquad x^3 - 3px - 2q = 0;$$

en posant

$$p = \frac{P}{3} - \frac{\cos^2\theta_0}{9},$$

$$q = \frac{1}{2}\left(-\frac{2\cos^3\theta_0}{27} + \frac{P\cos\theta_0}{3} - Q \right).$$

Lorsqu'on se place dans les conditions ordinaires des expériences, μ est très-grand par rapport à n, alors p est positif, et les racines de l'équation (58) sont, l'une réelle, et les deux autres imaginaires, on peut donc représenter ces racines par

$$\cos\theta', \quad a + b\sqrt{-1}, \quad a - b\sqrt{-1}.$$

et l'équation (51) deviendra

$$(62)\quad \sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt} = h^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)(\cos\theta - \cos\theta')\left[(\cos\theta - a)^2 + b^2\right].$$

Le produit $h^2[(\cos\theta - a)^2 + b^2]$ étant positif pour toutes les valeurs de θ, on conclura comme précédemment que θ varie entre les limites extrêmes θ_0, θ', et que $\frac{d\psi}{dt}$ est constamment positif.

§ III.

Mouvement des diverses pièces d'un gyroscope.

PROBLÈME. *Un appareil est composé de deux anneaux et d'un corps solide de révolution; les trois pièces sont liées entre elles de telle sorte qu'elles ont leur centre de gravité commun, et que chacune peut tourner autour d'un axe. Cette liaison est établie de la manière suivante : le plus grand anneau ou l'anneau extérieur peut librement tourner autour d'un de ses diamètres qui est fixe sur la Terre et qui a une direction quelconque par rapport à elle; le diamètre perpendiculaire à cette ligne fixe sert d'axe de rotation à l'anneau intérieur dont l'un des diamètres coïncide avec cet axe. L'axe du corps tournant est porté par le deuxième anneau suivant le diamètre de cet anneau qui est perpendiculaire à l'axe même de l'anneau. Cette construction posée, on donne au corps tournant un mouvement de rotation quelconque, on place l'anneau qui le porte sur le support qui lui est destiné dans l'anneau extérieur, on dirige l'axe du corps tournant suivant telle ligne qu'on veut, puis, après avoir constaté que les deux anneaux sont immobiles par rapport à la Terre, on délivre l'appareil en l'abandonnant à lui-même; il s'agit maintenant de déterminer le mouvement que prennent les diverses pièces de ce système mobile en supposant que l'appareil est emporté par la Terre dans son mouvement diurne.*

PP′ est l'axe fixe sur la Terre autour duquel l'anneau extérieur peut tourner.

PNP′N′ est une position quelconque du cercle moyen de cet anneau, et donne ce qu'on appelle le plan de l'anneau.

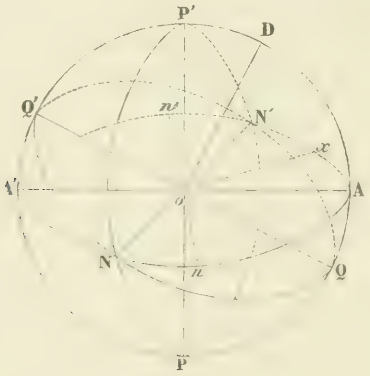
NoN′ est le diamètre de l'anneau extérieur perpendiculaire PP′. Ce

diamètre ne peut se mouvoir que suivant un plan perpendiculaire à PP′, et qui est représenté dans la figure par ANA′N′; ce plan est évidemment fixe sur la Terre.

La ligne NN′ sert d'axe de rotation à l'anneau intérieur.

QNQ′N′ représente une position quelconque du plan de l'anneau intérieur, et NN′ est la direction d'un diamètre de cet anneau dont le centre est au point o.

QQ′ est la direction du diamètre de l'anneau intérieur perpendiculaire à NN′. C'est suivant QQ′ que l'axe du corps tournant est soutenu par l'anneau intérieur, et ce corps a son centre de gravité en o; il est clair que le point o, se trouvant sur la ligne PP′ qui est fixe sur la Terre, se trouve aussi lui-même invariablement lié à la Terre et emporté avec elle.



Je place au point o l'origine des axes déjà désignés par ox, oy, oz; je place oz sur oP, et, par suite, les axes ox, oy dans le plan ANA′N′. Si, par le point o, on mène la partie nord de la parallèle à l'axe terrestre, et qu'on la projette sur le plan ANA′N′, on aura la direction que nous prendrons pour l'axe ox. Dans ces conditions, en désignant par ω l'angle que oP fait avec l'axe austral de la Terre, par n la vitesse angu-

laire terrestre, on aura

$$p = n \sin \omega, \quad q = 0, \quad r = -n \cos \omega,$$

d'après les équations (17) de la première section. Alors les équations (5) et (9) de la troisième section deviennent

$$(1)\quad \begin{cases} d \sum m \dfrac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} \\ = 2 \sum m [(X - u'') dx + (Y - v'') dy + (Z - w'') dz], \\ d \sum m \left(x \dfrac{dy}{dt} - y \dfrac{dx}{dt} \right) \\ = \sum m [x(Y - v'') - y(X - u'')] dt + n \cos \omega \, d \sum m (x^2 + y^2) \\ + 2 n \sin \omega \sum m x \, dz; \end{cases}$$

les sommes indiquées par le signe $\sum$ s'étendent à toutes les pièces du gyroscope : m est la masse d'un point quelconque de l'appareil ; $X - u''$, $Y - v''$, $Z - w''$ sont les composantes de la pesanteur suivant ox, oy, oz, en supposant que l'attraction terrestre est la seule force appliquée à l'appareil. Comme la pesanteur est considérée invariable dans toute l'étendue du système, et que le centre de gravité est au point o, ces équations se réduisent à

$$(2)\quad \begin{cases} d \sum m \dfrac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2} = 0, \\ d \sum m \left(x \dfrac{dy}{dt} - y \dfrac{dx}{dt} \right) = n \cos \omega \, d \sum m (x^2 + y^2) \\ + 2 n \sin \omega \sum m x \, dz. \end{cases}$$

Je désignerai par les caractéristiques S, S_1, S_2 les parties de ces diverses sommes qui se rapportent respectivement au corps tournant, à l'anneau intérieur et au grand anneau. Pour former ces sommes partielles, je rappellerai quatre propositions qui ont été démontrées dans la section précédente.

Un corps solide de révolution quelconque a son centre de gravité au point o ; on prend dans ce solide trois axes rectangulaires qui lui sont invariablement liés, savoir : ox_1, oy_1, oz_1, et tels que oz_1 coïn-

cide avec l'axe de figure. On désigne par $\xi, \xi', \xi'', \eta, \eta', \eta'', \zeta, \zeta', \zeta''$ les cosinus des angles que ces axes font respectivement avec ox, oy, oz : par Θ, Φ, Ψ les trois angles caractéristiques qui servent à déterminer la position du solide par rapport à ces axes; par $\Pi, \mathfrak{X}, \Psi$ les composantes suivant ox_1, oy_1, oz_1 de la vitesse angulaire de rotation apparente du corps; par $\mathfrak{C}$ le moment d'inertie relatif à l'axe de figure; par $\mathfrak{A}$ le moment d'inertie relatif à une droite quelconque perpendiculaire à cet axe et menée par le centre de gravité. Cela posé, on sait que l'on a

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\xi &= \cos\Phi\cos\Psi - \sin\Phi\sin\Psi\cos\Theta,\\
\xi' &= -\sin\Phi\cos\Psi - \cos\Phi\sin\Psi\cos\Theta,\\
\xi'' &= -\sin\Psi\sin\Theta,\\
\eta &= \cos\Phi\sin\Psi + \sin\Phi\cos\Psi\cos\Theta,\\
\eta' &= -\sin\Phi\sin\Psi + \cos\Phi\cos\Psi\cos\Theta,\\
\eta'' &= -\cos\Psi\sin\Theta,\\
\zeta &= \sin\Phi\sin\Theta,\\
\zeta' &= \cos\Phi\sin\Theta,\\
\zeta'' &= \cos\Theta;
\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
\Pi &= \sin\Psi\sin\Theta\frac{d\Phi}{dt} + \cos\Psi\frac{d\Theta}{dt},\\
\mathfrak{X} &= \sin\Phi\cos\Theta\frac{d\Psi}{dt} - \sin\Phi\frac{d\Theta}{dt},\\
\Psi &= \frac{d\Phi}{dt} + \cos\Theta\frac{d\Psi}{dt}.
\end{aligned}\right.$$

Nous avons démontré dans la troisième section que l'on a

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sum m\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt}\right) = \mathfrak{A}\left(\frac{d\Theta}{dt}^2 + \sin^2\Theta\frac{d\Psi}{dt}^2\right) + \mathfrak{C}\Psi^2,\\
&\sum m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) = \mathfrak{A}\sin^2\Theta\frac{d\Psi}{dt} + \mathfrak{C}\Psi\cos\Theta,\\
&\sum m(x^2 + y^2) = (\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\sin^2\Theta + \mathfrak{C},\\
&\sum mx\frac{dz}{dt} = \mathfrak{C}\Psi\cos\Psi\sin\Theta - \mathfrak{C}\cos\Theta\frac{d(\sin\Psi\sin\Theta)}{dt}\\
&\qquad - (2\mathfrak{A} - \mathfrak{C})\sin\Psi\sin^2\Theta\frac{d\Theta}{dt}.
\end{aligned}\right.$$

le signe $\sum$ indiquant une somme qui s'étend à tout le corps solide que l'on considère. Les équations (5) se déduisent des équations (24), (28), (29), (30), (42) et (44) de la troisième section, §§ III et IV.

Appliquons maintenant les propositions contenues dans les équations (5) tour à tour au solide tournant et aux deux anneaux.

Pour le solide tournant, l'axe de figure est oQ. Je désigne par θ l'angle que cet axe fait avec oz. Je projette cet axe sur le plan xoy: oA étant cette projection, je désigne par $\psi - 90^0$ l'angle xoA qu'elle fait avec ox, en sorte que ψ détermine la partie oN de l'intersection NON′ du plan xoy avec un plan mené par o, perpendiculairement à oQ. C'est sur oQ que je place l'axe oz_1. Je désigne par φ l'angle Nox_1 que l'axe mobile ox_1 du corps fait avec oN. Les trois angles caractéristiques du solide sont θ, ψ, φ; je nomme ρ la composante de la vitesse angulaire de rotation du solide par rapport à oQ, et A, C les deux moments d'inertie de ce corps. J'ai donc

$$(6)\qquad \Theta = \theta,\quad \Psi = \psi,\quad \Phi = \varphi,\quad \Omega = \rho,\quad \mathcal{A} = \mathrm{A},\quad \mathcal{C} = \mathrm{C},$$

et les équations (5) deviennent

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{S}\,m\,\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dt^2} = \mathrm{A}\left(\frac{d\theta^2}{dt} + \sin^2\theta\,\frac{d\psi^2}{dt^2}\right) + \mathrm{C}\rho^2,\\ &\mathrm{S}\,m\left(x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}\right) = \mathrm{A}\sin^2\theta\,\frac{d\psi}{dt} + \mathrm{C}\rho\cos\theta,\\ &\mathrm{S}\,m\,(x^2+y^2) = (\mathrm{A}-\mathrm{C})\sin^2\theta + \mathrm{C},\\ &2\,\mathrm{S}\,mx\,dz = \mathrm{C}\rho\cos\psi\sin\theta\,dt - \mathrm{C}\cos\theta\,d(\sin\psi\sin\theta)\\ &\qquad\qquad - (2\,\mathrm{A}-\mathrm{C})\sin\psi\sin^2\theta\,d\theta. \end{aligned}\right.$$

Pour l'anneau intérieur, l'axe de figure est une droite oD perpendiculaire au plan QNQ′N′. La droite oN est donc perpendiculaire à oD, et comme elle est perpendiculaire au plan QoA, il en résulte que ce plan contient oD, et que, par suite, DA est la projection de oD sur le plan xoy ou du prolongement de oD. Nous prendrons pour axe de figure de l'anneau la partie de cet axe qui se projette sur oA et qui est désignée par oD sur la figure. Alors l'angle que cet axe fait avec oz est $\theta + 90^0$; le plan QNQ′N′, qui est perpendiculaire à l'axe de figure de l'anneau, coupe le plan xoy suivant NoN′, et la partie oN de cette trace est déterminée par l'angle xoN $= \psi$. Rien n'empêche de mettre

sur oN l'axe ox_1 relatif à cet anneau, alors l'angle Nox_1 est nul. Les angles caractéristiques de cet anneau sont donc

$$\Theta = \delta + 90^\circ, \quad \Psi = \psi, \quad \Phi = 0.$$

On a, en outre, par l'équation (4),

$$\Psi = -\sin\delta \frac{d\psi}{dt},$$

et si l'on désigne par C_1, A_1 les moments d'inertie principaux de l'anneau, en sorte que l'on ait

$$\mathfrak{C} = C_1, \quad \mathfrak{A} = A_1,$$

les équations (5) deviendront

$$(8)\quad \begin{cases} S_1 m \dfrac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt} = A_1 \left(\dfrac{d\delta^2}{dt^2} + \cos^2\delta \dfrac{d\psi^2}{dt^2}\right) + C_1 \sin^2\delta \dfrac{d\psi^2}{dt^2}, \\ S_1 m \left(x \dfrac{dy}{dt} - y \dfrac{dx}{dt}\right) = A_1 \cos^2\delta \dfrac{d\psi}{dt} + C_1 \sin^2\delta \dfrac{d\psi}{dt}, \\ S_1 m (x^2 + y^2) = (A_1 - C_1) \cos^2\delta + C_1, \\ 2 S_1 mx\,dz = -C_1 \cos\psi \cos\delta \sin\delta\, d\psi + C_1 \sin\delta (\sin\psi \cos\delta) \\ \qquad - (2A_1 - C_1) \sin\psi \cos^2\delta\, d\delta. \end{cases}$$

L'axe de figure de l'anneau extérieur est la droite AA' qui est perpendiculaire au plan de l'anneau ; l'intersection de ce plan avec xoy est NoN'. Si l'on prend oA pour oz_1 et qu'on place ox_1 sur oN, les angles caractéristiques de cet anneau seront

$$\Theta = 0, \quad \Psi = \psi, \quad \Phi = 0;$$

on aura

$$\Psi = 0,$$

et les équations (5) deviendront

$$(9)\quad \begin{cases} S_2 m \dfrac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt} = A_2 \dfrac{d\psi^2}{dt^2}, \\ S_2 m \left(x \dfrac{dy}{dt} - y \dfrac{dx}{dt}\right) = A_2 \dfrac{d\psi}{dt}, \\ S_2 m (x^2 + y^2) = A_2, \\ 2 S_2 mx\,dx = 0; \end{cases}$$

A_2 est le moment d'inertie de l'anneau extérieur par rapport à PP'.

Au moyen des équations (7), (8), (9), les équations (2) deviennent

$$(10)\quad \begin{cases} d\left\{(A + A_1)\dfrac{d\theta}{dt} + \left[A + C_1 - A_1\right)\sin^2\theta + A_1 - A_2\right]\dfrac{d\psi^2}{dt} + C\rho^2\right\} = 0, \\ d\left\{\left[A + C_1 - A_1\right)\sin^2\theta + A_1 + A_2\right]\dfrac{d\psi}{dt} + C\rho\cos\theta\right\} \\ \quad = n\cos\omega\left(A + C_1 - A_1 + C_1\right)d\sin^2\theta \\ \quad + n\sin\omega\left[\begin{array}{l} C\rho\cos\psi\sin\theta\,dt - C\cos\theta\,d(\sin\psi\sin\theta \\ - C_1\sin^2\theta\sin\psi\,d\theta - (2A - C)\sin^2\theta\sin\psi\,d\theta \\ - (2A_1 - C_1)\cos^2\theta\sin\psi\,d\theta \end{array}\right]. \end{cases}$$

Pour abréger, je poserai

$$(11)\quad \begin{cases} A + A_1 = a, \quad A + C_1 - A_1 = b, \quad A_1 + A_2 = \delta, \\ u^2 = b\sin^2\theta + \delta, \quad k = n\cos\omega, \quad k' = n\sin\omega; \end{cases}$$

alors les équations (10) deviendront

$$(12)\quad \begin{cases} d\left(a\dfrac{d\theta^2}{dt^2} + u^2\dfrac{d\psi^2}{dt} + C\rho^2\right) = 0, \\ d\left(u^2\dfrac{d\psi}{dt} + C\rho\cos\theta\right) = k\left(b - C\right)d.\sin^2\theta \\ \quad - k'\left[\begin{array}{l} C\rho\cos\psi\sin\theta\,dt - C\cos\theta\,d(\sin\psi\sin\theta \\ - (2b - C)\sin^2\theta\sin\psi\,d\theta - (a - b)\cos^2\theta\sin\psi\,d\theta \end{array}\right]. \end{cases}$$

On peut avoir une troisième équation entre les angles ψ, θ et la vitesse ρ, en remarquant que, d'après les liaisons du système, rien n'empêche de donner un mouvement de rotation virtuelle au solide autour de oQ, sans faire mouvoir les deux anneaux. On obtiendra ainsi la formule (32) de la section précédente, la somme $\sum$ ne s'étendant qu'au solide tournant, et cette équation deviendra, par les transformations indiquées dans cette section, celle qui est écrite la dernière au n° 50, § V : c'est-à-dire qu'indépendamment des équations (12), on aura

$$(13)\quad d(\rho - k\cos\theta + k'\sin\theta\sin\psi) = 0.$$

§ IV.

Mouvement du gyroscope lorsque les deux anneaux sont invariablement liés entre eux et sont perpendiculaires l'un à l'autre.

Dans ce cas, l'angle θ ou QoP est constant et égal à 90 degrés : par suite, les équations (11), (12), (13) se réduisent à

$$(14)\quad \begin{cases} d\left(\dfrac{d\psi^2}{dt^2} + \dfrac{C}{A + 2A_1 + A_2}\rho^2\right) = 0, \\ d\left(\dfrac{d\psi}{dt}\right) = n\sin\omega\,\dfrac{C}{A + 2A_1 + A_2}\rho\cos\psi\,dt, \\ d(\rho + n\sin\omega\sin\psi) = 0. \end{cases}$$

Ces équations sont analogues aux équations (1), (2), (3) du premier probleme et conduisent à des conséquences semblables. Ainsi l'axe oQ oscillera autour de ox comme ligne d'équilibre, lorsque la rotation du solide se fera de droite à gauche autour de oQ, et la durée des oscillations très-petites sera

$$T = \pi\sqrt{\frac{A + 2A_1 + A_2}{Cn\rho_0\sin\omega}}.$$

Lorsque l'axe PP′ de l'anneau extérieur sera vertical, on aura

$$\cos\gamma = \sin\omega.$$

La ligne ox sera la partie nord de la méridienne, et la durée des oscillations autour de la méridienne deviendra

$$T' = \pi\sqrt{\frac{A + 2A_1 + A_2}{Cn\rho_0\cos\gamma}}.$$

Supposons qu'on fixe l'anneau extérieur perpendiculairement au méridien, son axe PP′ étant vertical, et qu'on laisse à l'anneau intérieur la liberté de tourner autour de NN′, qui est alors perpendiculaire au méridien; dans ce cas, θ n'est plus constant, mais $\psi = 90^\circ$, et les formules (12), (13) se réduisent à

$$d\left(\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{C}{A + A}\rho^2\right) = 0,$$

$$d(\rho - n\sin\gamma\cos\theta + n\cos\gamma\sin\theta) = 0.$$

La deuxième formule (12) ne sert pas ici, puisque le système ne peut pas tourner librement autour de oz. La dernière équation peut s'écrire ainsi :

$$d\rho = nd\cos(\theta + \omega);$$

or θ est l'angle que oQ fait avec oz ou oP, ω est l'angle que oz fait avec la parallèle à la partie australe de l'axe terrestre, $\omega + \theta$ est donc l'angle que oQ fait avec cette parallèle; si l'on désigne par u l'angle que oQ fait avec le prolongement septentrional de cette parallèle, on a

$$\theta + \omega = \pi - u, \quad d\theta = -du,$$

et nos équations deviennent

$$\frac{du\,d^2u}{dt\,dt^2} + \frac{C}{A + A_1}\rho\frac{d\rho}{dt} = 0,$$

$$d\rho = -nd.\cos u = n\sin u\,du,$$

d'où

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{Cn\rho}{A + A_1}\sin u = 0, \quad \rho = \rho'_0 - n(\cos u - \cos u_0);$$

par suite, en négligeant les quantités de l'ordre n^2,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{Cn\rho'_0}{A + A_1}\sin u = 0.$$

D'où l'on voit que l'axe oQ oscillera autour de l'axe du monde, et que la durée de ses oscillations sera

$$T'' = \pi\sqrt{\frac{A + A_1}{Cn\rho'_0}};$$

les valeurs de T′, T″ pourront servir pour déterminer n et γ.

On aurait pu placer l'axe PP′ perpendiculairement au méridien, et laisser à l'anneau extérieur la liberté de tourner autour de PP′; alors la valeur générale de T s'applique à ce cas, en faisant $\omega = 90^0$, ce qui réduit T à

$$T''' = \pi\sqrt{\frac{A + 2A_1 + A_2}{Cn\rho_0}}.$$

§ V.

Mouvement du gyroscope lorsque l'axe fixe de l'appareil est parallèle à l'axe terrestre, et que l'anneau intérieur peut librement tourner dans le grand anneau.

Je suppose que la ligne PP′ est parallèle à l'axe terrestre; alors j'ai

$$\omega = 0, \quad h = n, \quad k' = 0,$$

et les formules (12), (13) du § III deviennent

$$(1)\quad \begin{cases} d\left(a\dfrac{d\theta}{dt} + n^2\dfrac{d\psi^2}{dt^2} - C\zeta^2\right) = 0, \\ d\left(u^2\dfrac{d\psi}{dt} - C\zeta\cos\theta\right) = n(b - C\zeta)\sin^2\theta, \\ d(\zeta - n\cos\theta) = 0; \end{cases}$$

les intégrales premières sont

$$(2)\quad \begin{cases} a\dfrac{d\theta^2}{dt^2} + n^2\dfrac{d\psi^2}{dt^2} - C\zeta^2 = m, \\ u^2\dfrac{d\psi}{dt} - C\zeta\cos\theta = n(b - C\zeta)\sin^2\theta + m', \\ \zeta = n\cos\theta + m''; \end{cases}$$

m, m', m'' sont trois constantes arbitraires.

Je suppose qu'on imprime au corps tournant un mouvement de rotation autour de son axe de figure, qu'on place ensuite l'anneau qui porte cet axe dans l'anneau extérieur du gyroscope sur les supports destinés à porter les couteaux mobiles; on fait alors tourner l'anneau extérieur autour de PP′, l'anneau intérieur autour du tranchant des couteaux, et de cette manière on dirige l'axe du corps tournant suivant telle direction fixe sur la Terre qu'on veut choisir; ces préparatifs étant achevés et l'immobilité des anneaux par rapport à la Terre étant d'abord maintenue et vérifiée, on délivre l'appareil sans lui donner d'impulsion et on l'abandonne à lui-même; je compte le temps à partir de ce dernier instant et je désigne par θ_0, ψ_0 les valeurs initiales de θ, ψ; à cette époque, on a

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = 0;$$

j'indique par ρ_0 la valeur initiale de ρ, qui n'est autre chose que la vitesse apparente de rotation du corps lorsque $t = 0$, et je détermine les constantes m, m', m'' par les équations suivantes :

$$(3)\quad \begin{cases} m = C\rho_0^2, \\ m' = C\rho_0 \cos\theta_0 - n(b - C)\sin^2\theta_0, \\ m'' = \rho_0 - n\cos\theta_0; \end{cases}$$

alors les équations (2) deviennent

$$(4)\quad \begin{cases} a\dfrac{d\theta^2}{dt^2} + u^2\dfrac{d\psi^2}{dt^2} = C(\rho_0^2 - \rho^2), \\ u^2\dfrac{d\psi}{dt} = C(\rho_0\cos\theta_0 - \rho\cos\theta) + n(C - b)(\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta), \\ \rho = \rho_0 + n(\cos\theta - \cos\theta_0); \end{cases}$$

j'élimine ρ, et j'ai

$$(5)\quad \begin{cases} a\dfrac{d\theta^2}{dt^2} + u^2\dfrac{d\psi^2}{dt^2} = 2C\rho_0 n(\cos\theta_0 - \cos\theta) - Cn^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)^2, \\ u^2\dfrac{d\psi}{dt} = (\cos\theta_0 - \cos\theta)[C\rho_0 - Cn\cos\theta_0 + bn(\cos\theta_0 + \cos\theta)]. \end{cases}$$

Je multiplie par u^2 la première de ces équations, et je retranche le carré de la deuxième, afin d'éliminer $\dfrac{d\psi}{dt}$: j'ai, après avoir divisé par a,

$$(6)\quad \begin{cases} u^2\dfrac{d\theta^2}{dt^2} = \lambda^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)(\cos\theta - H) \\ - n^2(\cos\theta_0 - \cos\theta)^2[Cu^2 + (C\cos\theta_0 - b\cos\theta_0 - b\cos\theta)^2]. \end{cases}$$

On a posé, pour plus de simplicité,

$$(7)\quad \begin{cases} \lambda^2 = \dfrac{C^2\rho_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)}{a}, \\ H = \cos\theta_0 - \dfrac{2n(b\sin^2\theta_0 - d)}{C(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)}. \end{cases}$$

Je suppose, ce qui est permis, qu'on a placé l'axe oz_1 sur la partie de l'axe de figure du corps tournant pour laquelle ρ_0 est positif; alors λ^2 est positif, lorsque ρ_0 est plus grand que $2n\cos\theta$; nous admettrons que la vitesse primitive de rotation est assez grande pour qu'il en soit ainsi, et même qu'elle est telle, que H est compris entre $+1$ et -1 :

cela aura lieu toutes les fois que φ_0 sera notablement plus grand que n, et que $\cos\varphi_0$ ne sera pas très-peu différent de -1. La quantité H peut être regardée, dans ces conditions, comme égale au cosinus d'un angle θ' compris entre 0 et 180 degrés, et on peut poser

$$\text{(8)} \qquad H = \cos\theta'.$$

En négligeant les quantités de l'ordre de n^2, l'équation (6) peut s'écrire ainsi :

$$\text{(9)} \qquad u^2 \frac{d\varphi^2}{dt} = \lambda^2 (\cos\varphi_0 - \cos\varphi)(\cos\varphi - \cos\varphi').$$

Comme il est permis de regarder b comme positif, puisque l'appareil peut toujours être disposé de manière qu'il en soit ainsi, u^2 sera une quantité positive, et l'équation (9) montre que φ se trouvera toujours compris entre les valeurs extrêmes φ_0, φ'. La valeur de H donnée par l'équation (7) fait voir que la différence des angles φ_0, φ est extrêmement petite et du même ordre que n en général ; d'après cela, on peut dire que l'axe de figure du corps tournant reste incliné sur l'axe terrestre d'une quantité sinon rigoureusement, au moins sensiblement constante. Pour connaître les variations de θ, je pose

$$\text{(10)} \qquad \cos\varphi = \cos\varphi_0 \cos^2 x + \cos\varphi' \sin^2 x;$$

au moyen de cette nouvelle variable, on tire de l'équation (9)

$$\text{(11)} \qquad \lambda\, dt = \frac{2\, u\, d\varphi}{(\cos\varphi_0 - \cos\varphi')\sin 2x}.$$

Si l'on porte dans cette équation la valeur de $u\,d\varphi$, qu'on déduit de l'équation (10), et qu'on néglige les quantités de l'ordre de n^2, on a

$$\text{(12)} \qquad \lambda\, dt = \frac{2\sqrt{b\sin^2\varphi_0 + \partial}}{\sin\varphi_0}\left[1 - \frac{n\partial\cos\varphi_0}{C\sin^2\varphi_0(\varphi_0 - 2n\cos\varphi_0)}(1 - \cos 2x)\right]dx;$$

d'où l'on tire, en faisant commencer x en même temps que t,

$$\text{(13)} \qquad \begin{aligned} \lambda t = \frac{2\sqrt{b\sin^2\varphi_0 + \partial}}{\sin\varphi_0}\Bigg[& 1 - \frac{n\partial\cos\varphi_0}{C\sin^2\varphi_0(\varphi_0 - 2n\cos\varphi_0)}\Bigg]x \\ & + \frac{n\partial\cos\varphi_0\sqrt{b\sin^2\varphi_0 - \partial}\,\sin 2x}{C\sin^2\varphi_0(\varphi_0 - 2n\cos\varphi_0)}. \end{aligned}$$

les équations (10) et (13) donnent la valeur de θ pour chaque époque t au moyen de l'auxiliaire x. L'équation (10) fait voir que θ est égal à θ_0, ou a θ', suivant que x est un nombre pair ou un nombre impair de fois $\frac{\pi}{2}$. Si l'on désigne par T la différence des valeurs de t correspondant à

$$x = j\frac{\pi}{2}, \quad \text{et} \quad x = (j+1)\frac{\pi}{2}.$$

j étant un nombre entier, on a, par l'équation (13),

$$(14) \qquad T = \frac{\pi\sqrt{b\sin^2\theta_0 + \partial}}{\lambda\sin\theta_0}\left[1 - \frac{n\partial\cos\theta_0}{C\sin^2\theta_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)}\right].$$

Cette valeur de T est indépendante de j, et donne le temps périodique des variations de θ.

La deuxième équation (5) donne, lorsqu'on y met la valeur de u^2, qu'on tire de l'équation (10), celle de dt fournie par l'équation (12), et qu'on néglige les termes de l'ordre de n^2,

$$(15) \qquad d\psi = \frac{2n\rho_0\sqrt{b\sin^2\theta_0 + \partial}}{\lambda\sin\theta_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)}(1 - \cos 2x)\,dx;$$

d'où

$$(16) \qquad \psi - \psi_0 = \frac{2n\rho_0\sqrt{b\sin^2\theta_0 + \partial}}{\lambda\sin\theta_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right):$$

ψ_0 est la valeur initiale de ψ.

Je désigne par Ψ la différence des valeurs de ψ correspondant à

$$x = j\frac{\pi}{2}, \quad x = (j+1)\frac{\pi}{2}.$$

et j'ai

$$(17) \qquad \Psi = \frac{n\pi\rho_0\sqrt{\partial + b\sin^2\theta_0}}{\lambda\sin\theta_0(\rho_0 - 2n\cos\theta_0)}.$$

Cette valeur de Ψ est indépendante de j; elle exprime la variation constante qu'éprouve l'angle ψ, lorsque l'angle θ passe de l'une à l'autre de ses valeurs extrêmes θ_0, θ'.

Les valeurs de t, T, ψ, Ψ données par les équations précédentes reproduisent celles que nous avons trouvées lorsque nous avons traité

le problème analogue à celui-ci, sans avoir égard à l'influence des anneaux du gyroscope.

Si l'on divise Ψ par T, on aura, en négligeant les quantités d'un ordre supérieur à celui de n,

$$\frac{\Psi}{T} = n.$$

Ce quotient est positif et égal à la vitesse angulaire de la Terre. On conclut de là que, si l'on projette sur un parallèle terrestre l'axe du corps tournant, cette projection tournera avec une vitesse moyenne égale à n, de sorte que si le temps croît en progression arithmétique dont la raison est T, l'angle dont tournera la projection variera suivant une progression arithmétique dont la raison est n; ces variations auront lieu en sens contraire du mouvement de la Terre.

—

Le travail qui précède est extrait de divers Mémoires que j'ai présentés à l'Académie des Sciences, et dans lesquels j'ai donné, en outre :

1°. Deux nouvelles démonstrations des formules fondamentales (19) et (20) de la première section ;

2°. L'application de la méthode de la variation des constantes arbitraires pour déterminer l'influence de la fonction perturbatrice dans le mouvement du pendule simple;

3°. Les lois du pendule lorsqu'on a égard à la fois à la résistance de l'air et au mouvement diurne.

REMARQUES

Sur les différences qui distinguent l'interpolation de M. Cauchy *de la méthode des moindres carrés, et qui assurent la supériorité de cette méthode;*

PAR M. JULES BIENAYMÉ.

Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XXXVII, séance du 4 juillet 1853.

« Depuis quelque temps, l'attention de plusieurs observateurs s'est portée sur une *méthode d'interpolation* que M. Cauchy a publiée en 1835 [*], et il semble qu'on ait regardé cette méthode comme ayant quelque chose d'analogue aux avantages de la célèbre méthode des moindres carrés. Il serait fâcheux que les observateurs fussent trompés à cet égard par ce qui a pu être dit des deux méthodes, car elles diffèrent complétement; et si le procédé de M. Cauchy témoigne, comme tout ce qui sort de sa plume, de l'ingénieuse industrie qu'il sait apporter jusque dans les questions pratiques, ce procédé n'en est pas moins tout à fait en contradiction avec les principes du calcul des probabilités. Ce désaccord ne paraît pas être connu, quoiqu'il soit très-facile de l'apercevoir. Mais c'est ce que le temps limité dont les observateurs font le sacrifice à l'analyse, ne leur permet pas de rechercher. Un avertissement peut donc leur être utile; et sans toucher le moins du monde à la valeur que chacun attachera au procédé de M. Cauchy, comme moyen d'interpolation (de séries convergentes surtout), il sera permis de montrer que ce procédé n'est qu'une modification de l'élimination ordinaire entre plusieurs équations du premier degré; modification déjà prescrite par les auteurs qui se sont

[*] *Voir* le tome II de ce Journal, page 193, année 1837.

occupés des moindres carrés, et que M. Gauss a réduite en algorithme; qu'il n'offre aucun degré spécial de probabilité quand on l'applique à des équations plus nombreuses que les inconnues à déterminer; qu'au contraire, il ajoute alors aux risques d'erreur, et n'en assigne pas la mesure; enfin, que, comme moyen d'élimination, il s'appliquerait parfaitement à la méthode des moindres carrés, si par hasard le nombre des inconnues était trop considérable pour qu'on voulût les calculer toutes, et que les dernières ne donnassent d'ailleurs que des termes moindres que les erreurs des quantités observées, supposées seules dans un membre de l'équation. Il est vrai qu'alors rien ne serait plus simple que de supprimer d'avance ces inconnues, que ferait reconnaître l'examen préalable qui doit toujours être fait des équations considérées, avant d'y appliquer un procédé quelconque.

» Pour montrer, aussi simplement que la matière le comporte, comment le procédé de M. Cauchy n'est qu'une modification de l'élimination ordinaire, il suffit de reprendre cette élimination. Soit donc un nombre n d'équations, entre tout autant d'inconnues, de la forme

$$(1)\qquad x_1 a_h + x_2 b_h + x_3 c_h + \ldots + x_n l_h = \omega_h.$$

» Si l'on multiplie toutes ces équations par un premier système de facteurs arbitraires $k_{1,h}$, et qu'on ajoute les produits; puis par un second système de facteurs $k_{2,h}$, et qu'on ajoute de même les produits; et qu'on répète cette opération n fois, il est visible qu'on obtiendra n équations de la forme

$$(2)\qquad x_1 \mathrm{S}.a_h k_{i,h} + x_2 \mathrm{S}.b_h k_{i,h} + x_3 \mathrm{S}.c_h k_{i,h} + \ldots + x_n \mathrm{S}.l_h k_{i,h} = \mathrm{S}.\omega_h k_{i,h};$$

$$(3)\qquad x_1 \mathrm{S}.a_h k_{i,h} + x_2 \mathrm{S}.b_h k_{i,h} + x_3 \mathrm{S}.c_h k_{i,h} + \ldots + x_n \mathrm{S}.l_h k_{i,h} = \mathrm{S}.\omega_h k_{i,h}.$$

» Quels que soient les facteurs arbitraires k, ces équations pourront remplacer les premières, pourvu que chaque système de facteurs soit différent, afin que les nouvelles équations ne rentrent pas les unes dans les autres. Mais il est palpable que le choix de ces facteurs n'influera pas sur les valeurs finales des inconnues, dont ils disparaîtront entièrement lorsqu'il y aura autant d'inconnues que d'équations primitivement données. Il n'en serait pas de même s'il y avait plus d'équations que d'inconnues; mais c'est un point sur lequel il suffira de

revenir plus tard, car rien n'empêche, dans ce cas même, de supposer d'abord autant d'inconnues que l'on voudra, sauf à annuler ensuite les coefficients d'une partie de ces inconnues.

» Maintenant on procédera à l'élimination de x_1 entre la première des nouvelles équations et chacune des $(n-1)$ autres, comme à l'ordinaire, en rendant égaux les coefficients de cette inconnue, et retranchant successivement la première équation de chacune des $(n-1)$ autres.

» Par exemple, pour retrancher de l'équation de rang i, qui a été écrite ci-dessus (3) comme type de toutes, on multiplie la première par le rapport des coefficients de x_1,

$$\frac{S.a_h k_{i,h}}{S.a_h k_{1,h}},$$

et l'on obtient sans peine une équation ne renfermant plus x_1 :

$$\begin{aligned}
&x_2\left(S.b_h k_{i,h} - S.b_h k_{1,h}\frac{S.a_h k_{i,h}}{S.a_h k_{1,h}}\right)\\
&+ x_3\left(S.c_h k_{i,h} - S.c_h k_{1,h}\frac{S.a_h k_{i,h}}{S.a_h k_{1,h}}\right) + \ldots\\
&+ x_n\left(S.l_h k_{i,h} - S.l_h k_{1,h}\frac{S.a_h k_{i,h}}{S.a_h k_{1,h}}\right)\\
&= S.\omega_h k_{i,h} - S.\omega_h k_{1,h}\frac{S.a_h k_{i,h}}{S.a_h k_{1,h}}.
\end{aligned}$$

» Il y aura $(n-1)$ équations de cette forme, et elles ne renfermeront plus que $(n-1)$ inconnues.

» Si l'on fait attention à la composition des coefficients de ces équations, on voit que l'un quelconque

$$S.c_h k_{i,h} - S.c_h k_{1,h}\frac{S.a_h k_{i,h}}{S.a_h k_{1,h}}$$

peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
&S.c_h k_{i,h} - S.a_h k_{i,h}\frac{S.c_h k_{1,h}}{S.a_h k_{1,h}}\\
&= S.k_{i,h}\left(c_h - a_h\frac{S.c_h k_{1,h}}{S.a_h k_{1,h}}\right)\\
&= S.k_{i,h}\,\Delta c_h,
\end{aligned}$$

pourvu qu'on ait dénommé, avec M. Cauchy, par Δc_h, les différences entre parentheses, et qu'on ait formé toutes ces différences. Ce seront

$$b_h - a_h \frac{\mathrm{S}.b_h k_{1,h}}{\mathrm{S}.a_h k_{1,h}} = \Delta b_h.$$

$$c_h - a_h \frac{\mathrm{S}.b_h k_{2,h}}{\mathrm{S}.a_h k_{2,h}} = \Delta c_h.$$

. . . . . .

$$\omega_h - a_h \frac{\mathrm{S}.\omega_h k_{1,h}}{\mathrm{S}.a_h k_{1,h}} = \Delta \omega_h.$$

» Alors les $(n-1)$ équations, entre les $(n-1)$ inconnues, prennent la forme

$$x_2 \mathrm{S}.\Delta b_h k_{2,h} + x_3 \mathrm{S}.\Delta c_h k_{2,h} + \ldots = \mathrm{S}.\Delta \omega_h k_{2,h}.$$

$$x_2 \mathrm{S}.\Delta b_h k_{i,h} + x_3 \mathrm{S}.\Delta c_h k_{i,h} + \ldots = \mathrm{S}.\Delta \omega_h k_{i,h}.$$

» Il est manifeste que l'on formerait ces équations, en retranchant la somme (2) des produits par les facteurs $k_{1,h}$ des n équations (1) données, de chacune de ces équations, apres avoir multiplié cette somme par $\frac{a_h}{\mathrm{S}.a_h k_{1,h}}$. Il viendrait ainsi $(n-1)$ équations de la forme

$$x_2 \Delta b_h + x_3 \Delta c_h + \ldots + x_n \Delta l_h = \Delta \omega_h;$$

et en les multipliant par les facteurs du systeme $k_{2,h}$, on retomberait sur la premiere des $(n-1)$ équations déja obtenues. Les autres dépendraient des systèmes de facteurs désignés par $k_{i,h}$, etc.

» Rien ne vient donc mêler le second systeme de facteurs avec le premier; et il est placé de même que si l'on ne l'avait introduit qu'apres l'élimination de la premiere inconnue x_1; mais, comme on l'a vu, c'est absolument comme si on l'avait introduit tout d'abord.

» A présent, rien n'est plus aisé que de poursuivre l'élimination des inconnues les unes apres les autres. En représentant par Δ^2 des différences formées avec les différences Δ et le systeme de facteurs $k_{2,h}$, comme les Δ l'ont été avec les coefficients et les facteurs $k_{1,h}$; par

exemple,

$$\Delta^2 c_h = \Delta c_h - \Delta b_h \frac{\mathrm{S}.\Delta c_h k_{2,h}}{\mathrm{S}.\Delta b_h k_{2,h}},$$

$$\Delta^2 \omega_h = \Delta \omega_h - \Delta b_h \frac{\mathrm{S}.\Delta \omega_h k_{2,h}}{\mathrm{S}.\Delta b_h k_{2,h}},$$

il est clair qu'on parviendra à $(n-2)$ équations entre $(n-2)$ inconnues, de la forme

$$x_3 \mathrm{S}.\Delta^2 c_h k_{3,h} + \ldots + \mathrm{S}.\Delta^2 l_h k_{3,h} = \mathrm{S}.\Delta^2 \omega_h k_{3,h},$$
$$x_3 \mathrm{S}.\Delta^2 c_h k_{i,h} + \ldots + \mathrm{S}.\Delta^2 l_h k_{i,h} = \mathrm{S}.\Delta^2 \omega_h k_{i,h}.$$

» En agissant ensuite de la même manière sur ces équations, on éliminerait encore une inconnue; et il est superflu de pousser plus loin l'opération. Le but est actuellement atteint : c'était de montrer que les facteurs $k_{i,h}$, quels qu'ils soient (M. Cauchy, on le sait, les prend égaux à ± 1), peuvent être introduits dès le commencement de l'opération, sans modifier le moins du monde les résultats. On pouvait penser que M. Cauchy n'introduisant le deuxième système de facteurs qu'après avoir formé les différences Δ, ce système aurait à subir quelque condition spéciale si l'on voulait remonter à la combinaison des équations primitives qui, basée sur ce deuxième système, laisserait pourtant chacun des $k_{2,h}$ tout à fait arbitraire. On pouvait craindre que les $k_{2,h}$ ne vinssent à exiger des facteurs compliqués par les opérations qui conduisent aux équations successives. Il est à présent facile de reconnaître que les choses ne se compliquent pas ainsi, et que l'élimination successive d'une inconnue laisse en dehors des calculs tous les systèmes de facteurs d'un indice plus élevé que l'indice de cette inconnue. Si bien que ces facteurs jouent le même rôle que s'ils venaient d'être introduits arbitrairement.

» Or ils donnent les mêmes résultats que les équations (2) et (3), où ils sont introduits dès l'origine. Et il est très-aisé de voir qu'ils donnent les mêmes résultats, à quelque nombre $m < n$ qu'on réduise ces équations, et les inconnues qu'elles renferment. Car on parviendra successivement (et c'est là le côté ingénieux du procédé, qu'on l'attribue à M. Cauchy ou à M. Gauss [*]), on parviendra aux n équa-

[*] Ce qui distingue surtout le procédé de M. Cauchy, c'est le calcul des restes $\Delta^2 \omega_h$ à chaque élimination d'inconnues.

tions :

$$x_1 S.a_h k_{1,h} + x_2 S.b_h k_{1,h} + x_3 S.c_h k_{1,h} + \ldots + x_n S.l_h k_{1,h} = S.\omega_h k_{1,h},$$
$$x_2 S.\Delta b_h k_{2,h} + x_3 S.\Delta c_h k_{2,h} + \ldots + x_n S.\Delta l_h k_{2,h} = S.\Delta\omega_h k_{2,h},$$
$$x_3 S.\Delta^2 c_h k_{3,h} + \ldots + x_n S.\Delta^2 l_h k_{3,h} = S.\Delta^2 \omega_h k_{3,h},$$
$$\vdots$$
$$x_n S.\Delta^{n-1} l_h k_{n,h} = S.\Delta^{n-1} \omega_h k_{n,h}.$$

» Que si l'on s'arrête à m inconnues, les premiers termes, dans lesquels entrent ces inconnues, seront précisément les mêmes que si l'on eût pris les équations entières.

» D'un autre côté, on voit très-clairement que ces premiers termes, déduits de n équations de la forme

$$x_1 a_h + x_2 b_h + \ldots + x_n g_h = \omega_h,$$

présentent le résultat ordinaire de l'élimination entre ces équations réduites au nombre m, par la multiplication de m systèmes de n facteurs arbitraires et par l'addition des produits.

» Or on sait, par la méthode des moindres carrés, quels doivent être ces m systèmes chacun de n facteurs, pour que l'erreur finale due aux erreurs partielles des quantités observées ω_h soit un minimum : en d'autres termes, pour que le résultat soit tel, que la somme des carrés des différences entre les ω_h et les premiers membres des n équations données devienne un minimum. Les facteurs $k_{i,h}$, pour satisfaire à cette condition évidemment avantageuse, doivent être les coefficients mêmes des inconnues. Les facteurs de M. Cauchy sont, au contraire, tous égaux à ± 1 : ils ne sauraient donc donner un résultat aussi probable ni aussi avantageux que l'est celui de la méthode des moindres carrés.

» Il y a plus : ces facteurs n'assignent aux résultats aucune probabilité spéciale ; car ils prennent leurs signes de manière que toujours $\Delta^{i-1} g_h k_{i,h}$ soit positif, si g_h indique précisément les coefficients de l'inconnue x_i de rang i, avec laquelle apparaissent les facteurs $k_{i,h}$, dans l'ordre d'élimination suivi par M. Cauchy. Or il n'y a là rien qui assigne plutôt une grandeur qu'une autre aux erreurs qu'on laisse subsister.

» Que l'on considère effectivement le premier résultat

$$\frac{S.\omega_h k_{1,h}}{S.a_h k_{1,h}}.$$

Les facteurs $k_{1,h}$ sont ± 1, pris de manière que $S.a_h k_{1,h}$ est égale à la somme des valeurs absolues des a_h. Partant

$$\frac{S.\omega_h k_{1,h}}{S.a_h k_{1,h}}$$

est une moyenne entre la plus grande et la plus petite des fractions à dénominateur positif,

$$\frac{\omega_h}{a_h}.$$

» Si ε_h est l'erreur de ω_h, l'erreur de

$$\frac{S.\omega_h k_{1,h}}{S.a_h k_{1,h}} \quad \text{sera} \quad \frac{S.\varepsilon_h k_{1,h}}{S.a_h k_{1,h}}.$$

c'est-à-dire une moyenne entre les fractions $\frac{\varepsilon_h}{a_h}$. Il en résulte que l'erreur de

$$\Delta\omega_h = \omega_h - a_h \frac{S.\omega_h k_{1,h}}{S.a_h k_{1,h}}$$

sera

$$\varepsilon_h - a_h \frac{S.\varepsilon_h k_{1,h}}{S.a_h k_{1,h}};$$

et comme $\frac{S.\varepsilon_h k_{1,h}}{S.a_h k_{1,h}}$ est tout au plus égale à $\frac{\varepsilon_u}{a_u}$, la plus grande des fractions $\frac{\varepsilon_h}{a_h}$, on aura seulement

$$\varepsilon_h - a_h \frac{\varepsilon_u}{a_u}.$$

Or, à cause du signe et de la grandeur de a_h relativement à la valeur absolue de a_u, il se pourra que $\varepsilon_h - a_h \frac{\varepsilon_u}{a_u}$ fasse une somme supérieure à la plus grande des erreurs ε_h.

» Ce qui vient d'être dit s'applique à tous les degrés de l'opération, de sorte que rien ne garantit que les erreurs n'iront pas en croissant.

» Mais ce n'est pas tout : si l'opération est arrêtée à une inconnue quelconque, elle introduit par sa nature même une autre espèce d'erreur; puisqu'on néglige alors une suite de termes qui, dans chaque équation, devraient non pas être négligés, mais retranchés des ω_h avant de procéder à l'élimination. Appelant ces quantités négligées δ_h, il est manifeste qu'il arrivera aux δ_h ce que l'on vient de reconnaître pour les ε_h; et que les combinaisons $\Delta\delta_h$, $\Delta^2\delta_h$, $\Delta^3\delta_h$, etc., pourront grandir et non décroître dans la suite des calculs. Il sera fort difficile d'en être averti; car les quantités $\Delta\omega_h$, $\Delta^2\omega_h$, etc., que M. Cauchy prend pour indices du terme de l'opération, sont sujettes elles-mêmes à croître et à décroître. On en voit un exemple dans l'interpolation même faite par l'auteur, et publiée dans les *Nouveaux Exercices de Mathématiques*, Prague, 1835. Ainsi l'on n'est pas sûr qu'il faille arrêter les calculs d'après la grandeur de ces indices.

» Il faut se hâter d'ajouter que M. Cauchy n'a proposé sa méthode que pour interpoler des séries dont la convergence est assurée préalablement; et que dans cette circonstance particulière, les $\Delta\omega_h$, $\Delta^2\omega_h$, etc., iront sans doute en diminuant. Mais son exemple même prouve que ce cas spécial n'est pas exempt de la difficulté signalée : et cependant la convergence était très-grande. Il est bien clair que cette difficulté affectera à bien plus forte raison l'emploi qu'on pourra faire de sa méthode à des équations de condition, où les inconnues et leurs coefficients ne forment pas une suite très-convergente dans le premier membre. On en semble aujourd'hui vouloir faire de cette méthode une règle générale, également bonne dans tous les cas.

» On voit que cela n'est pas; que c'est uniquement un moyen d'élimination qui peut offrir des avantages dans certaines circonstances. L'interpolation est un problème tellement indéterminé, qu'il est bon d'avoir divers procédés, même pour éliminer entre les équations auxquelles on décide qu'il faut s'arrêter. A ce titre, ce sera à l'observateur à discuter le problème qu'il doit résoudre : et à constater s'il y a pour lui quelque utilité à appliquer le procédé de M. Cauchy, au lieu des méthodes d'interpolation que l'on emploie le plus souvent. Mais quand il voudra obtenir les erreurs minimum, on voit qu'il ne devra pas substituer ce procédé à la méthode des moindres carrés.

» Au surplus, d'après tout ce qui précède, il est visible que les

coefficients $h_{i,k}$ peuvent être ceux de la méthode des moindres carrés. Il est donc très-praticable, dans cette méthode, de faire les éliminations successives, en transformant le système d'équations à m inconnues, en un système qui n'aura qu'une équation à m inconnues, une à $(m-1)$ inconnues, une à $(m-2)$, et ainsi de suite, jusqu'à une équation à une seule inconnue, et, si l'on veut, de prendre en considération la grandeur des restes.

» Si donc il se rencontre quelque avantage particulier au procédé, on l'obtiendra sans sacrifier le moins du monde les avantages bien supérieurs de la méthode des moindres carrés. Aussi Laplace avait-il prescrit précisément le même mode d'élimination (*voir* le 1er supplément à la *Théorie des Probabilités*). Longtemps auparavant, M. Gauss l'avait réduit en algorithme. Les quantités qu'il désigne par $[bc, 1]$, $[bb, 1]$,..., $[cd, 2]$, etc., sont analogues aux Δ de M. Cauchy (voir *Disquisitio de elementis Palladis*, 1811; ou *Theoria Combinationis observationum*, 1828, supplément, page 17). On peut même reconnaître une marche identique dans les éliminations de Legendre (*Nouvelles Recherches sur les Orbites des Comètes*, 1805). Cette marche a dû s'offrir à tous les auteurs, parce que c'est la plus courte que l'on connaisse pour un système d'équations du premier degré. Elle faisait partie de l'enseignement, attendu qu'elle est éminemment pratique. En effet, quand une fois les équations sont ainsi ramenées à contenir chacune une inconnue de moins, rien n'est plus facile que d'écrire à la première vue la valeur d'une quelconque des inconnues.

» On peut s'assurer que pour m équations entre m inconnues, cette marche n'exige que $\frac{m-3}{3}(2m^2+5m+6)$ opérations monômes, divisions ou multiplications, soustractions et additions. Pour 9 inconnues, par exemple, il suffit de 568 opérations : nombre qu'on trouvera très-petit, si l'on réfléchit que le dénominateur commun aurait, suivant l'expression générale,

$$1\times 2\times 3\times 4\times 5\times 6\times 7\times 8\times 9 = 362\,880 \text{ termes};$$

et que chacun des 9 numérateurs en contenant le même nombre, il y aurait en tout 3 628 800 termes, chacun de 10 facteurs, ou 36 millions d'opérations.

» Il serait inutile d'entrer ici dans de plus longs développements à ce sujet. Les praticiens reconnaîtront assez, par ce qui précède, quels avantages on pourra retirer ou non de ces sortes de combinaisons. Les indications données sur la réduction du procédé de M. Cauchy à l'élimination entre des équations, sommes de produits des équations données par des facteurs arbitraires, jettent un tel jour sur la nature de ce procédé, que l'on pourra en juger bien mieux les ressources ou les défauts suivant les cas.

» En terminant, il faut insister encore une fois sur la différence et même la contradiction qui existe entre ce procédé et la méthode des moindres carrés, ou toute autre basée sur le calcul des probabilités.

» *P. S.* M. Cauchy, à qui le sujet de ces remarques avait été communiqué verbalement, paraît en avoir admis la justesse, car il vient de proposer de corriger, par la méthode des moindres carrés, les valeurs trouvées par son calcul. La Note que ce profond analyste a fait insérer à ce sujet dans le *Compte rendu de l'Académie des Sciences*, séance du 27 juin dernier, semble toutefois appeler la prompte publication de ce qui précède : car la correction de l'illustre auteur ne tend rien moins qu'à doubler le travail si pénible de l'élimination. On a pu voir, en effet, ci-dessus, que son élimination nécessite exactement les mêmes opérations, en même nombre, que la méthode des moindres carrés. Prendre des valeurs approchées par un procédé si complexe, puis les corriger par les moindres carrés, revient donc à faire deux fois tous les calculs. Or la résolution des équations qui renferment plusieurs inconnues, est de toute nécessité très-longue, quelque voie que l'on veuille suivre ; et la pratique se refuse à tout ce qui en accroît les fastidieux calculs. »

Extraits de deux Mémoires sur les propriétés générales et la dépendance mutuelle des courbes algébriques;

PAR M. STEINER,
Membre de l'Académie royale des Sciences et Professeur à l'Université de Berlin.

[Traduit de l'allemand par M. WOEPCKE.]

I.

PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DES COURBES ALGÉBRIQUES.

Dans la séance des sections réunies de l'Académie de Berlin du 10 août 1848 [*], M. Steiner présenta un Mémoire sur les propriétés générales des courbes algébriques.

Ces courbes sont considérées dans ce Mémoire relativement à leur degré et à leur classe; on y explique la nature des points doubles et de rebroussement, des tangentes doubles et d'inflexion, et l'on fait voir la dépendance mutuelle entre ces éléments d'un côté et le degré et la classe des courbes de l'autre côté. Qu'on désigne par g et k respectivement le degré et la classe d'une courbe $K^g = \mathfrak{K}^k$, par d et r le nombre de ses points doubles et de rebroussement, par t et w le nombre de ses tangentes doubles et d'inflexion, on aura les trois équations suivantes :

$$(1)\qquad g(g-1) = k + 2d + 3r,$$

$$(2)\qquad k(k-1) = g + 2t + 3w,$$

$$(3)\qquad 3g(g-1) = 6d + 8r + w.$$

Des six quantités qui figurent dans ces équations, trois étant données, ces équations servent à trouver les trois autres. Cela donne lieu à soixante formules.

Pour la détermination des courbes par des points donnés, le théorème connu suivant se présente comme

PREMIER THÉORÈME FONDAMENTAL. *Par* $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ *points* a, *donnés quelconques*

[*] Nous donnons ici cet extrait des *Comptes rendus mensuels des séances de l'Académie des Sciences de Berlin*, principalement parce que dans les morceaux suivants on devra souvent renvoyer aux définitions et aux théorèmes qu'il contient.

il passe un nombre infini de courbes du $n^{\text{ième}}$ degré A^n, *et toutes ces courbes passent, en outre, nécessairement par* $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ *autres points déterminés a, de manière à former un faisceau de courbes* $B(A^n)$ *ayant* n^2 *points en commun.*

Appelons les points a_1 les *points déterminants*, les points a_0 *les points nécessaires*, et tous ces n^2 points a ensemble les *points fondamentaux* du faisceau $B(A^n)$.

Ce théorème est un des plus essentiels et des plus féconds pour l'examen des propriétés des courbes, parce qu'il donne lieu à des développements nombreux. Mentionnons entre autres la génération des courbes par des faisceaux de courbes de degrés inférieurs, absolument analogue à la génération des coniques par des faisceaux de droites projectives; puis un grand nombre de théorèmes sur les contacts des courbes, conduisant en particulier à différentes propriétés remarquables des vingt-huit tangentes doubles des courbes du quatrième degré.

Le Mémoire présenté à l'Académie de Berlin établit relativement aux polaires quelques points de vue nouveaux et plus étendus qui amènent une foule de nouveaux résultats.

Si d'un point donné quelconque P on mène les tangentes à une courbe donnée A^n (que nous appellerons la *base*), les $n(n-1)$ points de contact se trouveront sur une courbe A^{n-1}; et si du même point P on mène les tangentes à cette nouvelle courbe, les $(n-1)(n-2)$ points de contact se trouveront sur une courbe A^{n-2}; en continuant ainsi, on obtient successivement les courbes A^{n-1}, A^{n-2}, $A^{n-3}, \ldots, A^2$, A^1, que nous appellerons respectivement la 1re, 2e, $3^{\text{e}}, \ldots, (n-2)^{\text{e}}$, $(n-1)^{\text{e}}$ des *polaires successives* du point P par rapport à la base A^n, et que nous représenterons par les symboles suivants :

$$(P)_1 : A^n = A^{n-1}, \quad (P)_2 : A^n = A^{n-2},$$
$$P \quad : A \quad = A \quad . \quad P \quad : A \quad . A \quad , \quad P \quad : A \quad A \quad .$$

où, par exemple, la formule

$$P \quad : A \quad = A \quad ,$$

exprime que la $x^{\text{ième}}$ polaire du point P par rapport à la base A^n est une courbe du [illegible] donc A^{n-x}. La n [illegible] polaire A^1 est [illegible] polaire A^1 est une droite.

Si le pôle P se meut sur une ligne quelconque L (directrice), chacune de ses polaires, par exemple la $x^{\text{ième}}$, parcourra une série continue de courbes A^{n-x}, que nous désignerons par $S(A^{n-x})$; cette série de courbes enveloppera une courbe que nous appelons *la $x^{\text{ième}}$ enveloppe polaire* E_x *du pôle mobile* P, ou simplement *la $x^{\text{ième}}$ polaire de la directrice* L *par rapport à la base* A^n. Nous exprimons cela par les symboles suivants :

$$(1) \qquad L \quad : A \quad S \quad A \quad E \quad .$$

Si la directrice L est une courbe donnée du degré r, donc D^r, le degré de chacune de ses polaires $E_1, E_2, \ldots, E_{n-1}$ sera déterminé; à savoir, on aura généralement

$$(5) \qquad D \quad : A \quad E \quad .$$

c'est-à-dire *la $r^{\text{ième}}$ polaire de la courbe* D^r *par rapport à la base* A^n *est une courbe* E_r *du degré* $r(r+2x-3)(n-x)$; *ou si le pôle* P *se meut sur la courbe* D^r, *son* $r^{\text{ième}}$ *enveloppe polaire* E_r *est une courbe du degré* $r(r+2x-3)(n-x)$.

Pour la première et la dernière polaire, donc pour $x=1$ et pour $x=n-1$, ou, en particulier,

$$(D^r)_1 : A^n = E_1^{r(r-1)(n-1)}, \tag{6}$$

et

$$(D^r)_{n-1} : A^n = E_{n-1}^{r(r+2n-5)}; \tag{7}$$

si, au contraire, on a

$$r=1,$$

donc, si la directrice est une droite D^1, on aura, d'après l'équation (5),

$$D^1)_1 : A^n = E_1^{2(n-1)}, \tag{8}$$

et pour $r=1$ et $x=n-1$, il suit

$$(D^1)_1 : A^n = E_1^0, \tag{9}$$

et

$$(D^1)_{n-1} : A^n = E_{n-1}^{4(n-2)} = \mathfrak{E}^{n-1}; \tag{10}$$

c'est-à-dire, *si le pôle* P *se meut sur une droite* D^1 (équation 9), *sa première enveloppe polaire est de degré nul,* E_1^0, *ce qui indique que les courbes de la série* $S(A^{n-1})$ *se coupent en* $(n-1)^2$ *points a, auxquels se réduit l'enveloppe, ou que la série des polaires* A^{n-1} *se transforme dans un faisceau* $B^{(n-1)^2}$; et puis (équation 10), *la* $(n-1)^{\text{ième}}$ *polaire d'une droite* D^1 *par rapport à la base* A^n *est une courbe* $\mathfrak{E}^{n-1}$ *du degré* $2(n-2)$ *et de la classe* $(n-1)$.

Pour l'examen des polaires, le théorème suivant, généralement connu, sert comme

Second théorème fondamental. *Si, par rapport à la même base* A^n, *on prend les premières polaires* P^{n-1} *et* Q^{n-1} *de deux points quelconques* P *et* Q, *et si l'on prend ensuite la première polaire de* P *par rapport à la courbe* Q^{n-1} *et la première polaire de* Q *par rapport à* P^{n-1}, *ces deux polaires seront une seule et même courbe* R^{n-1}, *ce qu'on nous exprimons par*

$$Q)_1 : [(P)_1 : A^n] = (P)_1 : [(Q)_1 : A^n] = R^{n-1}. \tag{11}$$

Ce théorème est aussi fécond que le précédent; par une application répétée de la loi qu'il exprime, on trouve d'abord que

$$Q)_1 : [(P)_1 : A^n] = P)_1 : [(Q)_1 : A^n] = R^{n-1}, \tag{12}$$

On en conclut aussi que, *si le point* Q *se trouve sur la* $x^{\text{ième}}$ *polaire de* P, *donc sur* P^{n-x}, *la* $(n-x+1)^{\text{ième}}$ *polaire de* Q, *donc* Q^x, *passera par le point* P.

De même, on en déduit le beau théorème de réciprocité suivant :

Si la $x^{\text{ième}}$ *polaire d'un point* P, *donc* P^{n-x}, *a un point double* Q, *réciproquement la* $n-x+1^{\text{ième}}$ *polaire de* Q, *à savoir* Q^{x-1}, *aura le premier point* P *pour point double.*

Les points doubles des polaires jouent un rôle important, ainsi qu'on le voit dans l'exemple suivant :

Le lieu du point P, *dont la première polaire* P^{n-1} *a un point double* Q, *est une courbe du degré* $3(n-2)(n-2)$,

$$= P_0^{3(n-2)(n-2)},$$

et le lieu du point double Q *est une courbe du degré* $3(n-2)$,

$$= Q^{3(n-2)};$$

cette dernière courbe Q_0 est donc en même temps le lieu du point Q dont la $(n-2)^{\text{ième}}$ polaire Q^2 a un point double P, et la première courbe P_0 est le lieu de ce point double. Conséquemment, la polaire Q^2 est une conique formée de deux droites qui se coupent en P.

Les courbes P_0 et Q_0, et d'autres semblables, seront appelées *courbes nodales* [*] *conjuguées* de la base A^n. Elles jouissent, entre autres, des propriétés suivantes :

La courbe Q_0 *passe par les* $3n(n-2)$ *points d'inflexion de la base* A^n, *et la courbe* P_0 *touche toutes les tangentes d'inflexion de* A^n. *La courbe* P_0 *est de la classe* $3(n-1)(n-2)$, *et c'est à la même classe qu'appartiendra, en général, la courbe* R_0 *qui est enveloppée de la droite* PQ; *cette courbe* R_0 *touche pareillement les tangentes d'inflexion de la base* A^n, *etc. La* $(n-1)^{\text{ième}}$ *polaire d'une courbe quelconque* D^r, *à savoir* $D^{r(r+2n-3)}$ [équation (7)], *touche la courbe nodale* P_0 *en* $3r(n-2)$ *points, etc. La courbe nodale* P_0 *a*

$$3(n-2)(n-9) \text{ tangentes d'inflexion;}$$
$$(n-2)(3n^2-1n-4+28) \text{ tangentes doubles;}$$
$$12(n-3)(n-3) \text{ points de rebroussement, et}$$
$$(n-2)(3n^2-1(n-2)+1) \text{ points doubles.}$$

Pour que P_1 *et* P_2 *soient deux points tels que leurs polaires premières* P_1^{n-1} *et* P_2^{n-1} *se touchent en un point* X, *il faut que la droite* P_1P_2 *touche toujours la courbe* P_0 *en un point* P; *le point* X *sera le pôle* Q *réciproque de* P, *et la droite* PQ *sera la tangente commune des susdites polaires au point* X = Q. *Donc toutes les polaires premières* P^{n-1},

[*] La traduction littérale du terme hollandais employé par M. Schoute est [illegible]

P^{n-1} .... *ne peuvent se toucher qu'en des points* Q *qui se trouvent sur la courbe nodale* Q_0, *lesquels points sont, en conséquence, des points doubles des polaires prises séparément. A chaque tangente* PP_1 *de la courbe* P_0 *il correspond un faisceau de polaires premières* [équation (9)], $B(P_1^{n-1})$, *lesquelles se touchent en un seul et même point* Q, *qui est le pôle réciproque du point de contact* P *de la tangente. Si, en particulier,* PP_1 *est une tangente d'inflexion de la courbe nodale* P_0, *ses polaires* $B(P_1^{n-1})$ *auront un contact du deuxième ordre en* Q; *et si* PP_1 *est une tangente double de* P_0, *les polaires* $B(P_1^{n-1})$ *se toucheront en deux points différents* Q. *Si, enfin,* P *est un point double de la courbe* P_0, *sa première polaire* P^{n-1} *aura deux points doubles* Q; *conséquemment, il existe autant de polaires premières ayant deux points doubles qu'il existe de points doubles de la courbe nodale* P_0; *etc.*

La totalité des polaires premières P^{n-1}, P_1^{n-1}, P_2^{n-1},... forme un réseau qui est déterminé par trois quelconques d'entre elles qui n'appartiennent pas à un même faisceau, et par lequel la base A^n est déterminée ensuite de son côté. Si les trois courbes données ont des points communs [1, 2, 3,..., et tout au plus $\frac{1}{2}(n-1)(n+2)-2$], ces points seront des points doubles de la courbe nodale Q_0.

Donc le lieu des points doubles (ou des points de contact) de toutes les courbes P^x *qui passent par les mêmes* $\frac{1}{2}x(x+3)-2$ *points donnés* d, *sera une courbe* $Q^{3(x-1)}$ *qui aura les points* d *pour points doubles. Si les courbes* P^x *sont assujetties à passer par* $\frac{1}{2}x(x+3)-1$ *points* d, *elles formeront un faisceau* $B(P^x)$ *et auront ensemble* $3(x-1)^2$ *points doubles.*

Au sujet des polaires (enveloppes polaires) mentionnées ci-dessus, nous faisons observer que si l'on en prend une pour directrice, il lui correspondra pareillement une série de courbes polaires, dont une, en particulier, sera appelée sa *polaire réciproque*. Or, si de la $x^{ième}$ polaire d'une courbe D^r, donc [équation (5)] de

$$E_x^{r(r+2x-3)(n-x)},$$

on prend la $(n-x)^{ième}$ polaire, donc la polaire réciproque, celle-ci devrait être la courbe donnée D^r; mais, en vertu de la formule générale (5), en posant

$$r(r+2x-3)(n-x)=s,$$

elle sera une courbe du degré $s[s+2(n-x)-3]x$. Ici la contradiction apparente est plus frappante encore que dans le cas de la polarité ordinaire, où la base est une conique, et pour lequel cas cette contradiction a été éclaircie par M. Poncelet. Dans le cas actuel, nous expliquons le paradoxe comme il suit :

La première polaire de D^r par rapport à la base A^n est

$$E_1^{r(r+2x-3)(n-x-1)}.$$

et pour la $(n-1)^{ième}$ polaire de cette dernière, on a, d'après la formule (7),

$$E_{n-1}^{r(r-1)(n-1)[(r-2)(n-1)+2(n-3)]},$$

tandis que, en vertu de la réciprocité, on devrait obtenir la courbe originale D^r. Ce que ce résultat présente de surprenant s'explique par la considération que la courbe E_{n-1} est formée :

1°. De $(n-1)^2$ fois la courbe D^r conjointement avec ses $3r(r-2)$ tangentes d'inflexion et ses $\frac{1}{2}r(r-2)(r^2-9)$ tangentes doubles, où chaque tangente d'inflexion doit être comptée comme une droite triple, et chaque tangente double comme une droite double; donc de

$$(n-1)^2 \times (D^r + 2d + 3w);$$

2°. Des $3r(r-1)(n-1)(n-2)$ tangentes communes à la courbe D^r et à la courbe nodale P_0.

Une courbe donnée Q^q peut être touchée par les courbes d'un faisceau $B(P^p)$ donné dans le même plan, en $q(q+2p-3)$ points R, lesquels, conjointement avec les $3(p-1)^2$ points doubles du faisceau $B(P^p)$ se trouvent toujours sur une courbe R^{q+2p-3}. Deux faisceaux de courbes quelconques $B(P^p)$ et $B(Q^q)$ étant donnés dans un même plan, le lieu du point R où les courbes des deux faisceaux se touchent deux à deux, est une courbe du degré $(2p+2q-3)$; et le nombre des points R_1, en lesquels deux courbes P^p et Q^q des deux faisceaux ont un contact du deuxième ordre, est

$$= 3[(p+q)(p+q-6)+2pq+5].$$

Trois faisceaux de courbes quelconques $B(P^p)$, $B(Q^q)$ et $B(R^r)$ étant donnés dans un plan, le nombre des points en lesquels ces courbes se touchent trois à trois est, en général,

$$= 4(pq+pr+qr-6(p+q+r-1)).$$

On voit facilement que ces considérations générales donnent lieu, pour les courbes du troisième et du quatrième degré en particulier, à un grand nombre de relations intéressantes et en partie entièrement nouvelles; notamment on arrive ainsi à des propriétés remarquables des vingt-huit tangentes doubles de la courbe du quatrième degré, matière qui jusqu'à présent a fourni peu de résultats aux géomètres qui en ont entrepris l'examen. La courbe du troisième degré présente encore plus de cas spéciaux; on démontre à cette occasion que l'*involution* est la véritable base d'un grand nombre de ses propriétés.

Différents systèmes de corrélation conduisent soit à des résultats analogues à ceux qu'on obtient par la polarité, soit à des théorèmes nouveaux sur les courbes algébriques.

II.

PRÉSENCE DES COURBES A CENTRE DANS LA DISCUSSION DE COURBES GÉNÉRALES.

Polaires intérieures.

§ Ier.

Par chaque point P situé dans le plan d'une conique C^2 on peut toujours mener une corde réelle ou imaginaire aa_1 ayant le point P pour point milieu. En général, on ne peut mener par P qu'une seule corde de ce genre. Dès qu'on peut mener deux cordes de ce genre par un même point P, on pourra en mener une infinité, et P sera, en ce cas, le centre de C^2.

Cette considération peut être étendue aux courbes supérieures. Si par un point quelconque P situé dans le plan d'une courbe donnée C^m, on mène une droite S, elle coupera la courbe en m points. On peut demander maintenant que la droite soit menée de telle sorte que deux quelconques des m points d'intersection, soit a et a_1, soient également distants de P et placés de part et d'autre de ce point (non pas réunis dans un point de contact). Pour abréger, appelons toute droite S contenant un tel couple de points d'intersection, *corde* simplement, et les points a et a_1, *extrémités* de la corde; si une droite contient deux de ces couples de points d'intersection, soit a et a_1, b et b_1, nous l'appellerons *corde double*, et nous la désignerons par S_2; donc S_2 aura deux couples d'extrémités. Pareillement, il y aura lieu à des cordes triples, quadruples, etc.

Le nombre de toutes les cordes S passant par un même pôle P, et la position de leurs extrémités a et a_1 sont déterminés par le théorème suivant :

I. *Par chaque point* P *situé dans le plan d'une courbe donnée* C^m *il passe, en général,* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *cordes* S, *dont les* $m(m-1)$ *extrémités* a *et* a_1 *se trouvent toujours sur une courbe* I^{m-1} *dont le degré est inférieur au degré de la précédente d'une unité, et qui a nécessairement le pôle* P *pour centre* [*].

---

[*] On démontre ce théorème, entre autres, par la considération géométrique suivante : Qu'on fasse décrire à la courbe C^m, dans son plan, autour du pôle fixe P, une demi-révolution de 180 degrés, et qu'on désigne la courbe dans cette nouvelle position par C_1^m, ou, ce qui revient au même, qu'on imagine la courbe C_1^m symétrique à C^m par rapport au point P, de sorte que $C^m + C_1^m$ représentera une seule courbe C^{2m} ayant P pour centre, et dans laquelle chaque point p appartenant à C^m a son correspondant p_1 appartenant à C_1^m, et réciproquement. Les courbes C^m et C_1^m auront des asymptotes parallèles. Conséquemment, m de leurs m^2 points d'intersection se trouvent sur la droite à l'infini G_∞ donc les $m(m-1)$ points d'intersection qui restent se trouveront sur une courbe I^{m-1} du degré

Les extrémités dont il s'agit sont précisément formées par tous les points d'intersection des deux courbes. Si, dans un cas particulier, il passe par un même pôle P plus de $\frac{1}{2}m(m-1)$ cordes S, ne fût-ce qu'une seule corde de plus, il en passera une infinité, de sorte que la courbe donnée C^m aura elle-même le point P pour centre.

Si de toutes les droites passant par P on ne considère que les droites T sur lesquelles deux des m points d'intersection avec la courbe C^m sont encore également distants de P, mais placés du même côté de P, de manière à coïncider dans un point de contact de la droite T, il existe, comme on sait, $m(m-1)$ tangentes de ce genre, dont les $m(m-1)$ points de contact se trouvent sur une courbe A^{m-1}, que nous appelons la *première polaire* du pôle P par rapport à la courbe C^m (*voyez* l'extrait précédent).

Eu égard à l'analogie que présente cette relation avec celle que nous venons d'énoncer, nous appellerons la courbe I^{m-1} la *polaire intérieure* (quoique, sous d'autres points de vue, cette dénomination ne soit pas parfaitement convenable), et la courbe A^{m-1} la *polaire extérieure*, ou simplement la *première polaire* du pôle P par rapport à la base C^m. Les deux polaires sont donc toujours de même degré. En outre, il existe entre elles la relation importante que voici.

II. *Les deux polaires A^{m-1} et I^{m-1} d'un point quelconque P par rapport à la même courbe donnée C^m ont $m-1$ points d'intersection à l'infini, situés sur la droite à l'infini G_∞; conséquemment, leurs asymptotes sont parallèles deux à deux, et les deux asymptotes formant un de ces couples sont à la fois réelles ou imaginaires; en outre, les $(m-1)(m-2)$ autres points d'intersection des deux polaires se trouvent sur une courbe C^{m-2} du degré $(m-2)$.*

§ II.

Discutons d'abord diverses questions particulières relatives à la polaire intérieure et conduisant en partie à des résultats intéressants. On pourra demander qu'est ce qui s'ensuivra pour la polaire I^{m-1} ou pour sa relation avec la base C^m lorsque le pôle P se trouve sur la base même, ou si, en particulier, il en est un point singulier; ou, ce qui aura lieu relativement à la polaire I^{m-1}, si la base prend une forme spéciale, par exemple si elle se décompose en parties; ou, enfin, s'il existe dans le plan de la base des pôles particuliers donnant lieu à une forme particulière de la polaire intérieure, par exemple à une décomposition en parties, etc. Voici un aperçu succinct des cas les plus importants.

$m-1$, ils formeront, [illegible] deux à deux les couples de points symétriques par rapport à P. [illegible] S est un point d'intersection de [illegible] avec C^m, son correspondant a, appartiendra également aux deux courbes à la fois. En [illegible] points d'intersection seront les extrémités de $\frac{1}{2}m(m-1)$ cordes aa_1 de la courbe C^m [illegible] la courbe I^{m-1} aura le pôle P pour centre.

1. *Modifications de la polaire intérieure, si le pôle* P *se trouve sur la base* C^m *même.*

Il faut distinguer les deux cas $m = 2\mu$ et $m = 2\nu - 1$; donc deux espèces de polaire intérieure

$$I^{2\mu-1} \quad \text{et} \quad I^{2\nu-2},$$

dont la première passe toujours par son propre centre, c'est-à-dire par son propre pôle P, et se distingue encore sous d'autres points de vue de la seconde.

1°. *Si le pôle* P *est un point quelconque de la base* C^m.

α) $I^{2\mu-1}$ aura la tangente de C^m au point P pour tangente d'inflexion.

β) $I^{2\nu-2}$ aura un point double en P.

2°. *Si* P *est un point d'inflexion de la base* C^m.

α) $I^{2\mu-1}$ aura, en commun avec la base, la tangente en P pour tangente d'inflexion.

β) $I^{2\nu-2}$ aura un point double en P avec deux tangentes d'inflexion dont une coïncide avec la tangente d'inflexion de la base.

3°. *Si* P *est un point double de la base.*

α) $I^{2\mu-1}$ aura en P un point d'inflexion triple, et trois tangentes d'inflexion avec lesquelles elle a des contacts du quatrième ordre.

β) $I^{2\nu-2}$ aura un point double en P avec deux tangentes d'inflexion qui coïncident avec les deux tangentes de la base.

4°. *Si* P *est un point de rebroussement de la base.*

α) $I^{2\mu-1}$ aura en P un point d'inflexion triple avec trois tangentes d'inflexion, de sorte qu'elle y a avec chacune de ces tangentes un contact du quatrième ordre comme dans le cas précédent (3°).

β) $I^{2\nu-2}$ aura en P la tangente de rebroussement de la base pour tangente de rebroussement double et pour tangente d'inflexion double car elle y touche la tangente de rebroussement de la base doublement, avec deux branches, et conséquemment elle s'y touche aussi elle-même.

Si, par exemple, la base donnée est seulement du quatrième degré, donc C^4, la polaire intérieure I^3 sera formée dans les deux cas $(3, \alpha)$ et $(4, \alpha)$ de trois droites $3I^1$ passant par P, savoir de trois cordes doubles aa_1 ou S_2, ayant un couple d'extrémités b et b_1 coïncidentes en P. En même temps, la polaire extérieure A^3 aura en commun avec la base le point double ou de rebroussement, ainsi que les tangentes correspondantes (deux tangentes réelles au cas 3, une tangente de rebroussement au cas 4). En vertu du théorème, § Ier, II, il suit : *que les trois droites* $3I^1$ *dont la polaire intérieure est formée, ou les trois cordes doubles* $S_2 = aa_1$ *qui passent par le point* P, *doivent être respectivement parallèles aux trois asymptotes* $3A_1$ *de la polaire extérieure* A^3; et réciproquement, que, *si l'on mène par* P *une droite* S *parallèle à une asymptote de* A^3, *cette droite sera rencontrée par la base* C^4 *en deux points* a *et* a_1 *également distants de* P.

5°. *Si* P *est un point* $(m-1)^{\text{tuple}}$ *de la base* C^m.

La polaire intérieure I^{m-1}, *aussi bien que la polaire extérieure* A^{m-1}, *sera formée des* $m-1$ *tangentes de la base au point* P.

II. *Modifications de la polaire intérieure si la base est formée de différentes parties.*

La base C^m peut de différentes manières se décomposer en parties, c'est-à-dire elle peut être formée de deux ou de plusieurs courbes de degrés inférieurs, ou même exclusivement de droites, auxquels cas le théorème du § Ier reste toujours vrai, ce qui donne lieu, entre autres, aux théorèmes particuliers suivants :

1°. *Si la base* C^m *est formée de* m *droites* G :

Étant données dans un plan m *droites quelconques* G, *si l'on mène par un pôle quelconque* P *entre ces droites prises deux à deux les cordes* S, *ou* aa_1 *ayant* P *pour point milieu du segment compris entre les deux droites respectives, ce qui donne lieu à* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *cordes* aa_1 ; *les* $m(m-1)$ *extrémités* a *et* a_1 *seront toujours sur une courbe* I^{m-1} *du degré* $(m-1)$ *ayant* P *pour centre.*

2°. *Si la base* C^m *est formée de deux courbes* C^α *et* C^β, *où* $\alpha+\beta=m$:

Étant données dans un plan deux courbes quelconques C^α *et* C^β, *si l'on mène par un pôle quelconque* P *les* $\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)$ *cordes* aa_1 *de la courbe* C^α, *ainsi que les* $\frac{1}{2}\beta(\beta-1)$ *cordes* bb_1 *de la courbe* C^β, *et, en outre, les* $\alpha\beta$ *cordes* ab *entre les deux courbes (c'est-à-dire des droites ayant leurs extrémités* a *et* b *situées sur* C^α *et sur* C^β *respectivement, et ayant* P *pour point milieu du segment compris entre* a *et* b) ; *les extrémités de toutes ces cordes, au nombre de*

$$\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)+2\alpha\beta=m(m-1),$$

seront toujours sur une courbe I^{m-1} *du degré* $(\alpha+\beta-1)$ *ou* $(m-1)$ *ayant* P *pour centre.*

Cet énoncé renferme le théorème particulier :

Que par chaque point P *situé dans le plan de deux courbes quelconques* C^α *et* C^β, *il passe, en général,* $\alpha\beta$ *cordes* ab *ayant leurs extrémités sur les deux courbes respectivement, et leur point milieu en* P.

On en déduit encore sans difficulté le théorème suivant :

Étant données dans un plan deux courbes quelconques C^α *et* C^β *ayant* $\alpha\beta$ *points d'intersection* c, *si l'on mène par un pôle quelconque* P *les* $\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)$ *cordes* aa_1 *de la courbe* C^α, *ainsi que les* $\frac{1}{2}\beta(\beta-1)$ *cordes* bb_1 *de la courbe* C^β, *les extrémités des deux systèmes de cordes conjointement avec les points d'intersection* c, *en tout*

$$\alpha(\alpha-1)+\beta(\beta-1)+2\alpha\beta=m(m-1)-\alpha\beta \text{ points},$$

seront toujours sur une courbe I^{m-1} *du degré* $(\alpha+\beta-1)$ *ayant le pôle* P *pour centre.*

III. *Position ou lieu du pôle* P *si la polaire intérieure doit se décomposer en différentes parties.*

Ce cas donne déjà lieu à des discussions assez compliquées quand même la base donnée n'est encore que d'un degré peu élevé, par exemple du troisième ou du quatrième degré, ainsi qu'il résultera des recherches suivantes.

§ III.

I. Si la base donnée est seulement du troisième degré C^3, de sorte que la polaire intérieure d'un pôle quelconque P est une section conique I^2, celle-ci ne pourra se décomposer, s'il y a lieu, qu'en deux droites, et l'on peut demander si cette décomposition peut réellement avoir lieu, et où sera situé, en ce cas, le pôle P, ou quel en sera le lieu géométrique. De fait, on trouve que cette décomposition peut se faire de deux manières différentes, et qu'en conséquence il existe aussi deux lieux distincts, à savoir :

Le lieu du pôle, dont la polaire intérieure I^2 *se décompose en deux droites, est formé de deux courbes distinctes :*

A. *La base donnée* C^3 *elle-même, et*

B. *Une courbe déterminée du second degré* E^2, *qui est la seconde polaire de la droite* G_∞ *par rapport à la base* C^3 (*voyez* l'extrait I), *ou qui est l'enveloppe de tous les diamètres de* C^3.

Car, si l'on coupe la courbe C^3 par une transversale quelconque $\mathfrak{D}$, et que l'on détermine ensuite le centre de gravité d des trois points d'intersection, tous les centres de gravité provenant d'un système de transversales parallèles $\mathfrak{D}$ se trouveront sur une même droite D qu'on appelle *diamètre* de la courbe C^3, et par rapport à laquelle nous appelons la direction des transversales la *direction conjuguée* à ce diamètre. Or, tous les diamètres D de la courbe C^3, parmi lesquels il faut compter, en particulier, ses asymptotes A_1, touchent la conique E^2. Si les trois asymptotes sont toutes réelles, E^2 sera l'ellipse inscrite dans le triangle des asymptotes qui touche les côtés de ce triangle dans leurs points milieux. Lorsqu'en particulier les trois asymptotes se coupent en un même point, E^2 se réduit à ce point, de sorte que tous les diamètres passent par ce point. Si, au contraire, il n'existe qu'une seule asymptote réelle, la conique E^2 sera, en général, une hyperbole qui touche cette asymptote en un point qu'il est facile de construire.

Voici maintenant une discussion plus détaillée des deux lieux géométriques (A) et (B).

II. 1. Si le pôle P se trouve sur la base C^3 elle-même (A), des trois cordes S qui passent par P, et que nous appellerons respectivement aa_1, bb_1, cc_1, l'une, soit cc_1, coïncidera avec la tangente en P, et ses deux extrémités c et c_1 coïncideront avec P, de

sorte qu'on peut les considérer comme étant situées sur les deux autres cordes, soit c sur aa_1 et c_1 sur bb_1. Ainsi la conique I^2 se décompose dans les deux cordes aca_1 et bc_1b_1, que nous désignerons par S_1, ou, selon les circonstances, par S et S_1. *Donc il correspond à chaque pôle* P *situé sur la base, seulement deux cordes véritables* S_1; *la troisième coïncide avec la tangente, devient infiniment petite, se réduit à son point de contact* P. Si, en même temps, on considère aussi la polaire extérieure A^2 du même pôle P, il suit que (*voyez* § Ier, II) :

Pour chaque pôle P *situé sur la base* C^2, *les deux cordes correspondantes* S *et* S_1 *sont parallèles aux asymptotes de sa polaire extérieure* A^2. *Donc ces deux cordes sont réelles ou imaginaires, selon que la polaire* A^2 *est hyperbole ou ellipse, et réciproquement. Lorsqu'en particulier* A^2 *est une parabole, les deux cordes* S *et* S_1 *coïncident, et réciproquement. Il n'existe en tout que six de ces pôles particuliers pour lesquels les deux cordes* S *et* S_1 *se réunissent en une seule ab ou* S_0, *tandis qu'en même temps la polaire* A^2 *devient une parabole. Nous désignerons ces pôles par* P_0. *Les six pôles* P_0 *sont les intersections des deux courbes* C^3 *et* E^2 [*]. *Chacune des six cordes* S_0 *jouit de la propriété que les tangentes à la base* C^3 *qu'on fait passer par ses extrémités* a, b *sont parallèles. Lorsque le pôle* P *est, en particulier, un point d'inflexion de la base, une des deux cordes* S *et* S_1, *soit* S, *coïncide avec la tangente d'inflexion, et alors* A^2 *aussi est formé de deux droites, savoir de la tangente d'inflexion et de la droite* H *conjuguée harmonique du point d'inflexion* [**]. *En outre,* H *sera parallèle à* S_1. *Donc, en ce cas, chacune des deux polaires* I^2 *et* A^2 *est formée de deux droites dont deux coïncident avec la tangente d'inflexion, tandis que les deux autres* S_1 *et* H *sont parallèles.*

Les couples de cordes S et S_1 sont tous assujettis à la loi suivante :

Toutes les cordes S_1, *en lesquelles se décompose la polaire intérieure* I^2 *lorsque le pôle* P *se trouve sur la base* C^3 *même, ou, ce qui revient au même, toutes les cordes* aca_1 *dont les points milieux* c *se trouvent sur la base, touchent une courbe déterminée de la sixième classe,* S^6, *et du dix-huitième degré,* G^{18}.

Voici quelques détails sur les propriétés dont cette courbe jouit relativement à la base, et autres.

---

* Dans le Mémoire dont nous avons parlé dans l'extrait I, on démontre : *Que la courbe* E^2 *est le lieu de tous les pôles* P *pour lesquels la polaire extérieure* A^2 *devient une parabole, et, qu'en général, la polaire* A^2 *est hyperbole, ellipse ou parabole, selon que le pôle* P *est situé respectivement en dehors de* E^2, *dans l'intérieur de* E^2, *ou sur la circonférence même de* E^2. Les mêmes conséquences s'appliquent aussi à la polaire intérieure I^2, parce que I^2 et A^2 sont toujours semblables et semblablement placées. *Il n'existe, en général, qu'un seul pôle déterminé* P, *dont les polaires* A^2 *et* I^2 *soient des cercles. Si le pôle* P *est situé au centre de la courbe* E^2, *ses polaires* A^2 *et* I^2 *seront semblables, semblablement placées et concentriques à la courbe* E^2 (*voyez* aussi ci-dessous, extrait IV).

[**] M. Steiner désigne par cette expression la droite qui jouit de la propriété de rencontrer chaque transversale S menée par le point d'inflexion, en un point h qui forme avec les trois autres points d'intersection de la transversale et de la courbe un système de quatre points harmoniques, h étant le conjugué harmonique du point d'inflexion.

2. *La courbe* S^6 *touche la base* C *dans ses neuf points d'inflexion, ainsi que dans ses trois points situés à l'infini* a_∞, *de sorte qu'elle a en commun avec la base les trois asymptotes* A_∞; *mais la courbe* S_1^6 *touche chacune de ces trois asymptotes encore dans un autre point déterminé, de sorte qu'elle a ces asymptotes pour tangentes doubles. Comme la base est également de la sixième classe* $C^3 = K^6$, *les trente-six tangentes communes aux deux courbes ne consistent que dans les neuf tangentes d'inflexion et les trois asymptotes de la courbe* C^3, *parce que chacune de ces douze droites doit être comptée pour trois tangentes communes aux deux courbes.*

3. *La courbe* S_1^6 *touche les six cordes particulières* S_0, *dont il a été question ci-dessus, dans leurs points milieux* P_0; *donc elle y rencontre la base* C^3. *En conséquence, nous connaissons déjà trente des* $3.18 = 54$ *points communs aux deux courbes, savoir les neuf points d'inflexion et les trois points à l'infini, comptés chacun pour deux points, et puis les six points* P_0. *Les vingt-quatre autres points forment chacun une extrémité* a_1 *de certaines cordes particulières* aca_1, *que nous désignerons par* $\mathfrak{S}_0$, *et qui jouissent :* 1° *de la propriété que les tangentes à la base qu'on fait passer par l'autre extrémité* a *et par le point milieu* c, *sont parallèles ;* 2° *de la propriété de toucher la courbe* S_1^6 *dans les six points* a_1 *mêmes. Des courbes du huitième degré peuvent passer par les vingt-quatre points* a_1.

4. *Les douze tangentes communes aux courbes* S_1^6 *et* E^3 *consistent :* 1° *dans les trois asymptotes de la base, comptées chacune pour deux ; et* 2° *en six cordes* S_1 *qui sont en même temps diamètres de la base ; les six points milieux* c *de ces six cordes se trouvent sur une section conique* C'.

5. *La droite* G_∞ *est une tangente triple de la courbe* S_1^6 *et la touche en trois points* g_∞, *chacun desquels forme relativement aux trois points* a_∞ (2) *le quatrième point d'un système harmonique ; c'est-à-dire si par un point quelconque on mène trois droites* A, B, C *parallèles aux trois asymptotes* A_∞ *de la courbe* C^3, *et qu'on détermine ensuite par rapport à ces droites les trois quatrièmes droites harmoniques* A_1, B_1, C_1, *de sorte que* ABA_1C, $ABCB_1$, AC_1BC *soient des faisceaux harmoniques, ou bien, si dans le triangle des asymptotes on mène des trois sommets, par les points milieux des côtés opposés, trois droites* A_1, B_1, C_1, *alors ces droites seront dirigées vers les points de contact* g_∞ *situés à l'infini.* Les trois droites construites de cette manière sont aussi respectivement parallèles aux axes des trois paraboles asymptotiques qui ont avec la courbe S_1^6 un contact du quatrième ordre aux trois points g_∞. Comme la courbe S_1^6 est du dix-huitième degré, elle doit avoir en commun avec la droite G_∞, outre les neuf points déjà mentionnés (les $3g_\infty$ comptés deux fois et les $3a_\infty$), encore neuf autres points d_∞. *Ces points* d_∞ *sont déterminés par la relation que les tangentes ou asymptotes* $\mathfrak{D}_0$ *de la courbe qui leur correspondent, passent par les points* d_0 *de la base* C^3, *en chacun desquels cette dernière est touchée par un diamètre* D_0, *et que les asymptotes en question ont la direction conjuguée à ces diamètres* (1). Il existe neuf diamètres D_0 de ce genre, attendu que ce sont des tangentes communes aux courbes C et E', lesquelles sont au nombre de

douze, mais dont trois sont les asymptotes A_0 de C^3. Les neuf asymptotes $\mathfrak{D}_0$ sont en même temps des cordes $ad_0a_1 = S_1$ jouissant de la propriété particulière que les trois tangentes A, A_1 et D_0, qu'on mène à la base C^3 par les extrémités a, a_1 et le point milieu d_0, se rencontrent en un même point Q. Donc *il existe, en général, dans une courbe du troisième degré* C^3, *neuf transversales* $\mathfrak{D}_0$, *telles que l'un des trois points d'intersection* d_0 *est le point milieu du segment compris entre les deux autres* a *et* a_1; *que les trois tangentes correspondantes se rencontrent en un même point* Q, *et que la tangente* D_0 *passant par* d_0 *est en même temps un diamètre de la courbe*. On passe ici sous silence les relations que la courbe S_1^6 a avec certaines autres courbes intimement liées à la base C^3, relativement aux neuf droites $\mathfrak{D}_0$ et aux neuf points Q. On les examinera dans une autre occasion.

6. *Par un point quelconque* Q *il passe, en général, six cordes* S_1, *ou* aca_1, *et leurs six points milieux* c *se trouvent toujours sur une conique. Si* Q *se trouve sur la base* C^3 *même, celle-ci aura en ce point un contact avec la conique*. Si l'on fait passer Q à l'infini, trois des six cordes S_1 coïncideront avec G_∞, les trois autres seront parallèles, et leurs points milieux c se trouveront sur le diamètre D conjugué à leur direction, dont ils seront en même temps les points d'intersection avec la base C^3. Conséquemment, *les tangentes à la courbe* S_1^6, *ou les cordes* S_1, *ne sont parallèles que trois à trois, ayant pour points milieux les trois extrémités du diamètre* D *de la base* C^3 *conjugué à leur direction, et réciproquement*.

7. Le point de contact s de toute corde $aca_1 = S_1$ avec la courbe S_1^6, qui est son enveloppe, se détermine par la simple construction suivante : Qu'on fasse passer par ses extrémités a, a_1 et son point milieu c, des tangentes à la base C^3, que nous désignerons par A, A_1, C; que les points d'intersection de A avec A_1, de A avec C et de C avec A_1 soient désignés par p, q, q_1 respectivement; qu'on prenne sur A et A_1 des points $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}_1$, tels que q et q_1 soient les points milieux des segments $p\mathfrak{p}$ et $p\mathfrak{p}_1$; qu'on mène ensuite les droites $a\mathfrak{p}_1$ et $a_1\mathfrak{p}$ et qu'on désigne leur point d'intersection par r : la droite pr passera par le point de contact cherché s de la corde aa_1. Observons encore que la droite C_1, qu'on fait passer par les points $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p}_1$ (laquelle est parallèle à C et située avec C du même côté de p, mais à une double distance de p), coupe la corde aa_1 dans un point s_1 qui est le conjugué harmonique de s par rapport à a et a_1, c'est-à-dire asa_1s_1 forment un système de quatre points harmoniques. Lorsque, en particulier, C passe par p, C_1 coïncide avec C, s_1 avec c, et s passe à l'infini.

8. De (**2**) on déduit, entre autres, le théorème suivant :

Qu'on imagine dans un même plan deux courbes semblables du troisième degré, C^3 *et* C_1^3, *dont les dimensions homologues soient dans le rapport de* $2:1$, *et qu'on fixe la position de l'une, disons de* C^3; *l'autre courbe pourra prendre vingt-quatre positions différentes, telles que les deux courbes (prises directement, non symétriquement) soient semblablement placées et se touchent en un couple de points homologues* m *et* m_1, *et, en outre, en deux points non homologues* n *et* q_1. *Des courbes du huitième degré peuvent*

passer par les vingt-quatre points m de la courbe C^3, et de même par les vingt-quatre points m_1 de la courbe C_1^3.

III. Si le pôle P se trouve sur la courbe E^2 (I, B), les trois cordes S qui lui correspondent, savoir aa_1, bb_1, cc_1, auront leurs extrémités a, b, c sur une droite I, et, conséquemment, leurs autres extrémités a_1, b_1, c_1 sur une autre droite I_1. Ainsi la polaire intérieure I^2 se décompose en deux droites I et I_1 qui sont parallèles, également distantes du pôle P, et, en outre, projectivement égales, parce que

$$ab = a_1b_1, \quad ac = a_1c_1, \quad bc = b_1c_1.$$

Dans ce cas, la polaire extérieure est toujours une parabole dont l'axe est parallèle aux droites I et I_1 (II, 1). Parmi les pôles situés sur E^2, les suivants se distinguent par des propriétés particulières :

1°. Les six points d'intersection P_0 des deux courbes C^3 et E^2. Pour chacun de ces points, la corde cc_1 est infiniment petite, et, en conséquence, les droites I et I_1 coïncident en même temps que les cordes aa_1 et bb_1 (désignées ci-dessus par S et S_1) avec la corde désignée ci-dessus par S_0.

2°. Il existe trois pôles particuliers, que nous désignerons par X, Y, Z, tels que pour ces pôles, non-seulement la polaire intérieure, mais en même temps aussi la polaire extérieure A^2 (la parabole) se décompose en un couple de droites A et A_1, parallèles entre elles et parallèles, en outre, aux droites correspondantes I et I_1. Outre ces trois points X, Y, Z, il n'existe dans le plan aucun autre pôle dont la polaire extérieure A^2 se décompose en deux droites *parallèles*.

Relativement à toutes les droites I, I_1, on a le théorème suivant :

Tous les couples de droites I *et* I_1, *en lesquels se décompose la polaire intérieure* I^2, *lorsque le pôle* P *se trouve sur la courbe* E^2, *touchent une courbe* I^6 *de la sixième classe et du quatorzième degré, ayant les six cordes* S_0 *pour asymptotes et la droite* G_∞ *pour tangente quadruple. Cependant la courbe* I^6 *touche la droite* G_∞, *non pas en quatre, mais seulement en deux points distincts, mais en chacun de ces deux points doublement, de sorte qu'en chacun de ces points elle se touche elle-même. Ces deux points sont en même temps les points que la courbe* E^2 *a en commun avec la droite* G_∞, *ou les points situés à l'infini sur les asymptotes de* E^2. *Si l'on mène par le pôle* P *une troisième droite* I_0 *parallèle aux droites* I *et* I_1, *elle aura pour enveloppe une courbe* I_0^3 *de la troisième classe et du quatrième degré, qui aura la droite* G_∞ *pour tangente double et la touchera dans les deux points qu'on vient de distinguer. Conséquemment aussi, tout le système des différents couples de droites* I *et* I_1 *jouit de la propriété, que chaque point* $\mathfrak{P}$ *du plan sera, en général, le centre d'une section conique qui touche trois de ces couples, savoir les trois couples correspondant aux trois droites* I_0 *qui passent par le point* $\mathfrak{P}$.

Les trente-six tangentes communes à la courbe I^6 *et à la base* C^3 *consistent en dix-huit couples de droites* I *et* I_1.

Si les droites I et I_1 sont tangentes à la base C^3, deux des trois points a, b, c situés

sur I, disons b et c, se réunissent en un point de contact (bc) ou α, de même, les points b_1 et c_1 situés sur I_1 se réunissent en un point de contact (b_1c_1) ou α_1; en conséquence, les cordes bb_1 et cc_1 forment en coïncidant la corde de contact $\alpha\alpha_1$, que nous désignerons par $\mathfrak{S}_1$, et dont nous désignerons le point milieu ou le pôle correspondant P par P_1. Appelons les segments égaux $a\alpha = a_1\alpha_1$, pris sur I et I_1 respectivement, *tangentes parallèles égales;* mais, comme leurs directions de α vers a et de α_1 vers a_1 sont opposées l'une à l'autre, appelons-les *dissemblablement dirigées*. Ceci posé, le théorème précédent donne lieu au théorème que voici :

Une courbe quelconque du troisième degré C^3 *a, en général, dix-huit couples de tangentes égales et parallèles, mais dissemblablement dirigées,* αa *et* $\alpha_1 a_1$, *et les points milieux* P_1 *des dix-huit cordes de contact* $\mathfrak{S}_1 = \alpha\alpha_1$ *se trouvent sur la conique* E^2, *déterminée ci-dessus.*

Des trente-six tangentes communes à la courbe I^6 *et à la courbe* S_1^6 (II), *douze coïncident avec la droite* G_2, *six autres sont les six cordes particulières* S_0 (II, I), *et les dix-huit qui restent sont formées de neuf couples de droites* I *et* I_1.

Attendu que ces dernières (comme tangentes à la courbe S_1^6) forment en même temps neuf couples de cordes parallèles et projectivement égales S_1 (ou, pour les distinguer les unes des autres, S_1 et S_1^1), de sorte que

$$I = S = abc, \quad I_1 = S_1^1 = a_1b_1c_1 \quad \text{et} \quad ab = bc = a_1b_1 = b_1c_1,$$

si b et b_1 sont les points moyens, donc les points milieux des cordes S_1 et S_1^1, on aura, en désignant par P^1 le pôle correspondant ou le point milieu de la droite bb_1, le théorème suivant :

Dans une courbe quelconque C^3, *il existe en tout neuf couples de cordes parallèles et égales* S_1 *et* S_1^1, *et les neuf points milieux* P^1 *des droites* bb_1 *qui joignent les points milieux de ces cordes, se trouvent sur la conique* E^2.

Observons, relativement aux quarante-deux points communs aux courbes I^6 et C^3, que, si a est un de ces points et I la tangente correspondante de la courbe I^6, et si l'on imagine, en outre, le couple correspondant de droites I et I_1 avec son pôle P situé sur E^2, *qu'alors les tangentes menées par les points* P *et* a_1 *respectivement aux courbes* E^2 *et* C^3 *sont toujours parallèles.* On déduit de là le théorème suivant :

Si l'on fait décrire à la courbe donnée C^3 *dans son plan une demi-révolution (de* 180 *degrés) autour du centre* E *de la conique* E^2, *si l'on désigne la courbe dans cette nouvelle position par* C_1^3; *si, en outre, on imagine une conique* E_1^2 *semblable et semblablement placée à la conique* E^2, *mais de dimensions doubles, et dont le centre* E_1 *se trouve sur la courbe* C_1^3, *et si l'on fait mouvoir cette conique* E_1^2 *de telle sorte qu'elle reste toujours semblablement placée à* E^2 *ou que ses axes restent toujours parallèles à eux-mêmes pendant que son centre* E_1 *parcourt toute la courbe* C_1^3, *alors la courbe donnée* C^3 *sera, en général, touchée quarante-deux fois par la conique* E_1^2 *mue de cette manière.*

IV. Dans ce qui précède, il a été plusieurs fois question de certaines cordes S_0, $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_1$, pour lesquelles les tangentes menées par leurs extrémités à la base C^3 étaient parallèles. On a considéré six cordes S_0 (II, 1), vingt-quatre cordes $\mathfrak{S}_0$ (II, 3) et dix-huit cordes $\mathfrak{S}_1$ (III). Examinons cette propriété isolément, et désignons par $\mathfrak{S}$ toute corde qui joint les deux points de contact $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}_1$ de deux tangentes parallèles $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}$ de la base C^3. On obtiendra les résultats suivants :

Toutes les cordes $\mathfrak{S}$ qui joignent les points de contact de deux tangentes parallèles de la base donnée C^3, touchent une courbe $\mathfrak{S}^9$ qui est de la neuvième classe et (tout au plus) du trente-sixième degré. Puis : *La courbe $\mathfrak{S}^9$ a six tangentes triples $\mathfrak{S}$, qui se rencontrent deux à deux dans les trois points ci-dessus mentionnés* X, Y, Z (III) *situés sur la courbe E^3, et qui passent, en outre, trois à trois par quatre points q, r, s et t, de manière à former les six côtés d'un quadrilatère complet qst. La même courbe touche aussi les trois asymptotes de C^3. Son point de contact avec chaque asymptote sera le centre d'une hyperbole qui a avec C^3 un contact du quatrième ordre au point de contact a_1* (II, 2) *de C^3 avec cette asymptote.* En désignant par $\mathfrak{A}_0$ toute tangente de C^3 qui est parallèle à une de ses trois asymptotes, et par $\mathfrak{a}_0$ son point de contact, il existera, en général, 12 $\mathfrak{A}_0$ et 12 $\mathfrak{a}_0$. *Ces douze tangentes $\mathfrak{A}_0$ sont en même temps des cordes particulières $\mathfrak{S}$ et touchent la courbe $\mathfrak{S}^9$ dans les mêmes points $\mathfrak{a}_0$.* Si, en outre, on désigne par $\mathfrak{V}$ toute tangente à la courbe C^3 qui est parallèle à une de ses neuf tangentes d'inflexion, par $\mathfrak{v}$ son point de contact, et par $\mathfrak{w}$ le point d'inflexion correspondant à cette tangente d'inflexion, il existera en tout trente-six points $\mathfrak{v}$, et conséquemment aussi *trente-six cordes $\mathfrak{w}\mathfrak{v} = \mathfrak{S}$, qui jouissent de la propriété particulière de toucher la courbe $\mathfrak{S}^9$ précisément aux points $\mathfrak{v}$.* En outre, les neuf tangentes d'inflexion mêmes touchent aussi la courbe $\mathfrak{S}^9$, en qualité de tangentes particulières $\mathfrak{S}$, aux points $\mathfrak{w}$ qui leur correspondent. De ceci et de plusieurs théorèmes précédents, on déduit les relations suivantes entre la courbe $\mathfrak{S}^9$ et les courbes C^3 et S_1^6 :

La courbe $\mathfrak{S}^9$ touche la base C^3 dans ses neuf points d'inflexion et dans les douze points $\mathfrak{a}_0$. Les cinquante-quatre tangentes communes aux deux courbes consistent : 1° dans les neuf tangentes d'inflexion de C^3, comptées chacune pour trois ; 2° dans les douze tangentes $\mathfrak{A}_0$, comptées chacune pour deux ; et 3° dans les trois asymptotes A_1 de C^3, ce qui fait en tout cinquante-quatre tangentes.

Les cinquante-quatre tangentes communes aux deux courbes $\mathfrak{S}^9$ et S_1^6 consistent : 1° dans les neuf tangentes d'inflexion et dans les trois asymptotes de la base C^3, comptées chacune pour deux ; 2° dans les vingt-quatre cordes $\mathfrak{S}_0$ mentionnées ci-dessus (II, 3) ; *et 3° dans les six cordes S_0* (II, 1), *ce qui fait en tout cinquante-quatre tangentes.*

Des points communs aux deux courbes $\mathfrak{S}^9$ et C^3 nous en connaissons déjà soixante-dix-huit, savoir les neuf points d'inflexion et les douze points $\mathfrak{a}_0$ comptés deux fois, et les trente-six points $\mathfrak{v}$. Si maintenant le degré de la courbe $\mathfrak{S}^9$ n'est pas inférieur au

trente-sixième (ce que, cependant, je n'ai pas encore suffisamment démontré), il manque encore trente points; chacun de ces trente points sera le troisième point d'intersection d'une des cordes $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{S}$ avec la base C, et en même temps le point de contact de cette corde avec la courbe $\mathfrak{S}'$. D'après la position des soixante-dix-huit points précédents, on conclut *que des courbes du dixième degré peuvent passer par ces trente derniers points.*

Le point de contact $\mathfrak{s}$ *d'une quelconque des cordes* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{S}$ *avec la courbe* $\mathfrak{S}'$, *qui en est l'enveloppe, est déterminé par la simple relation suivante : que si l'on prend les centres de courbure* m *et* m_1 *de la base* C *relativement aux deux extrémités* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{a}_1$ *de la corde,* $\mathfrak{s}$ *se trouvera sur la droite qui joint* m *et* m_1, *de sorte que la droite* mm_1 *coupe toujours la corde* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ *au point de contact cherché* $\mathfrak{s}$. De cette relation, on conclut entre autres :

Qu'il existe, en général, trente-six couples de rayons de courbure parallèles, égaux, et semblablement dirigés dans une courbe quelconque C^3 *du troisième degré.*

En désignant par $\mathfrak{M}$ le point milieu de chaque corde $\mathfrak{a}\mathfrak{a} = \mathfrak{S}$, il suit encore que :

Le lieu des points milieux $\mathfrak{M}$ *de toutes les cordes* $\mathfrak{S}$ *qui joignent les points de contact de tangentes parallèles de la base donnée* C^3, *est une courbe* $\mathfrak{M}^{12}$ *du douzième degré et de la quatre-vingt-seizième classe, qui touche la base* C^3 *dans ses neuf points d'inflexion, la rencontre dans les six points* P_0, *et a pour points quadruples ses trois points situés à l'infini* a_∞, *ce qui fait en tout le nombre complet des trente-six points communs aux deux courbes.*

Les trois fois quatre asymptotes de la courbe $\mathfrak{M}^{12}$ qui sont respectivement parallèles aux trois asymptotes de C^3 sont respectivement situées au milieu entre chaque asymptote et les quatre tangentes $\mathfrak{A}_0$ qui lui sont parallèles.

La courbe $\mathfrak{M}^{12}$ *rencontre la courbe* E^2 *dans les mêmes six points* P_0 *et, en outre, dans les dix-huit points* P_1 (III).

Si l'on prend pour pôle P le point milieu $\mathfrak{M}$ d'une quelconque des cordes $\mathfrak{a}\mathfrak{a} = \mathfrak{S}$, sa polaire intérieure I^2 touchera la base C^3 dans les extrémités $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}_1$ de la corde. Pour tout autre pôle, I^2 et C^3 ne peuvent se toucher. Donc ces deux courbes ne peuvent pas avoir un seul contact en un seul point; mais dès qu'elles ont un contact simple en un point quelconque $\mathfrak{a}$, elles ont nécessairement encore un second contact dans un autre point $\mathfrak{a}_1$, et alors les tangentes $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}_1$ passant par ces points de contact sont parallèles, et la corde de contact $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$ passe par le pôle P en l'ayant pour point milieu. Donc :

Le lieu du pôle dont la polaire intérieure I^2 *doit toucher la base* C^3 *est la courbe du douzième degré* $\mathfrak{M}^{12}$ *que nous avons déterminée ci-dessus; les courbes* I^2 *et* C^3 *se touchent toujours en deux points simultanément, et les deux tangentes aux deux points de contact sont parallèles.* De là il suit :

Qu'il ne peut pas exister dans la base donnée C *deux cordes* $\mathfrak{S}$ *qui se coupent dans*

leurs points milieux; et, conséquemment, la courbe $\mathfrak{M}^5$ *ne peut avoir aucun autre point multiple hormis les trois points quadruples a mentionnés ci-dessus.*

§ IV.

Si la base donnée est une courbe générale du quatrième degré C^4, et si, conséquemment, la polaire intérieure d'un pôle quelconque est une courbe du troisième degré I^3, cette dernière ne pourra se décomposer, s'il y a lieu, qu'en une courbe du second degré et une droite, ou en trois droites. Cette décomposition ne pourra avoir lieu que par suite d'une coïncidence de deux d'entre les six cordes aa_1, bb_1, cc_1, dd_1, ee_1 et ff_1 qui passent par le pôle P (lesquelles deux cordes forment alors une corde double S_2). Car, comme en ce cas il ne peut pas passer par les deux couples d'extrémités a et a_1, b et b_1 qui se trouvent sur S_2, une courbe I^3 *proprement dite*, il faut que la courbe se décompose, et que S_2 même en forme une partie. L'autre partie passera alors par les huit extrémités des quatre autres cordes S, et sera, en général, une conique I^2 qui a le pôle P pour centre, et qui pourra, dans des cas particuliers, se décomposer à son tour en deux droites. Cette décomposition peut avoir lieu de deux manières, à savoir : 1° dès qu'il coïncide encore un couple de cordes parmi les quatre cordes qui restent, les deux cordes du troisième couple coïncideront nécessairement aussi, de sorte que I^3 sera formée de trois cordes doubles S_2; 2° il peut arriver que des extrémités des quatre cordes cc_1, dd_1, ee_1, ff_1, quatre extrémités, dont une de chaque corde, soient c, d, e, f, se trouvent sur une droite I; alors les quatre autres extrémités c_1, d_1, e_1, f_1 se trouveront nécessairement sur une autre droite I_1; et, en ce cas, I^3 sera formée de trois droites, S_2, I et I_1, dont les deux dernières sont parallèles et également distantes du pôle P. Conséquemment, la polaire intérieure I^3 peut être formée :

A. De $I^2 + S_2$, c'est-à-dire d'une conique I^2 et d'une droite ou corde double S_2 qui passe par le centre P de la conique;

B. (a). De $3S_2$, c'est-à-dire de trois cordes doubles S_2, passant par le pôle P;

(b). De $S_2 + I + I_1$, c'est-à-dire d'une corde double S_2 passant par le pôle P et de deux droites I et I_1 parallèles et également distantes du pôle P.

Le cas (A) se présente le plus fréquemment, tandis que les deux cas (B) n'ont lieu que pour certains pôles particuliers. Quant au cas (B, a), *il n'existe en tout que neuf pôles, que nous désignerons par* P_3, *pour lesquels la polaire intérieure* I^3 *se décompose en trois cordes doubles* S_2. *Ces pôles sont en même temps les neuf pôles correspondants à la droite* G_∞ *par rapport à la base donnée, c'est-à-dire qu'ils sont les points d'intersection commune de toutes les polaires extérieures premières* A^3 *par rapport à* C^4 *dont les pôles se trouvent sur la droite* G_∞. Les pôles particuliers qui donnent lieu au cas (B, b) sont moins faciles à déterminer, ainsi qu'on le verra dans la suite.

Relativement au lieu du pôle dont la polaire intérieure se décompose comme nous venons de le dire, et relativement à l'enveloppe de toutes les cordes doubles qui se pré-

sentent en même temps, ainsi qu'à certaines autres circonstances intimement liées à cette discussion, on obtient les théorèmes et les propriétés suivantes :

Le lieu du pôle P, *dont la polaire intérieure se décompose en parties de la manière qu'on vient de dire, est une courbe* P^{10} *du dixième degré et de la trente-sixième classe, ayant les susdits neuf pôles particuliers* P *pour points triples, touchant la base* C^4 *dans ses quatre points* a_∞ *situés à l'infini, et ayant, en conséquence, elle-même pour asymptotes les quatre asymptotes de la base.* Les autres trente-deux points communs aux deux courbes P^{10} et C^4 sont des pôles particuliers P^0 jouissant de la propriété que la corde double correspondante S_2 se change dans une tangente S_2^0 de la base C^4, tandis que l'un des deux couples d'extrémités, soit b et b_1, se réunit dans le point de contact P^0. Donc :

Une courbe quelconque du quatrième degré C^4 *a en tout trente-deux tangentes* S_2^0 *qui jouissent de la propriété d'être coupées par la courbe en deux points* a *et* a_1 *également distants du point de contact* P^0 [*]. *Des courbes du huitième degré peuvent passer par les trente-deux points de contact* P^0.

Nous ne connaissons encore que quatre des dix points communs à la courbe P^{10} et à la droite G_∞, savoir les quatre points situés à l'infini a_∞; mais de ces points, et des quatre asymptotes A_∞ qui leur correspondent, dépendent les six autres points et les

---

[*] Ce théorème concorde avec le théorème donné par M. le professeur Hesse, page 261 du tome XXXVI du Journal de M. Crelle; car, au moyen de la projection, on passe de l'un de ces deux théorèmes à l'autre, ou bien ces deux théorèmes sont contenus l'un et l'autre dans le théorème suivant :

Si sur chaque tangente d'une courbe donnée du quatrième degré C^4, *on prend le quatrième point* Q *conjugué harmonique du point de contact par rapport aux deux points d'intersection de la tangente avec la courbe, le lieu de* Q *sera une courbe* Q^{24} *du trente-deuxième degré, qui a avec la courbe donnée des contacts du deuxième ordre dans ses vingt-quatre points d'inflexion (qui a en commun avec elle les tangentes d'inflexion), et qui la coupe dans les cinquante-six points de contact de ses vingt-huit tangentes doubles, ce qui fait en tout le nombre complet de* $2 \times 3 + 56 = 128$ *points communs aux deux courbes. Les trente-deux tangentes particulières* S_2^0 *dont il a été question ci-dessus, sont parallèles aux trente-deux asymptotes de la courbe* Q^{24}.

Qu'il me soit permis de faire à cette occasion la remarque suivante.

La courbe nodale, désignée dans l'extrait des *Comptes rendus de l'Académie de Berlin* par Q_n^{n-2}, est pour la base C^n une courbe déterminée du sixième degré Q_n^6, qui passe par les vingt-quatre points d'inflexion de la base C^n. Or, comme il passe par les cent vingt-huit points communs aux courbes Q^{24} et C^4 une infinité d'autres courbes du trente-deuxième degré, et comme, si par $\frac{1}{2}n$ de ces cent vingt-huit points il passe une courbe Q^x d'un degré inférieur au trente-deuxième, il passera de même par les $128 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2}(256 - n)$ autres points une infinité de courbes du $(256 - x)^{\text{ième}}$ degré, Q^{256-x}, il suit : *Que par les cinquante-six points de contact des vingt huit tangentes doubles de la base* C^4, *il peut passer une infinité de courbes du quatorzième degré* Q^{14}. Car, si l'on imagine la courbe nodale Q_n^6 comme triple, ou à la manière du calcul, si l'on élève son équation à la troisième puissance, on pourra la regarder comme une courbe du dix-huitième degré, Q_n^{18}, qui passera comme telle par les 24×3 ou $\frac{1}{2} \times 18$ points, que Q^{24} et C^4 ont en commun dans les vingt-quatre points d'inflexion, et conséquemment, il peut passer une infinité de courbes Q^{14} par les cinquante-six points de contact des vingt-huit tangentes doubles. Je montrerai, dans une occasion plus convenable, de combien de manières une telle courbe Q^{14} peut à son tour se décomposer en parties.

directions des asymptotes correspondantes. Désignons pour un instant les quatre points a_∞ par $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, et les six points inconnus par x et x_1, y et y_1, z et z_1; alors chacun de ces derniers couples sera formé de deux points conjugués harmoniques à la fois par rapport aux deux couples de points qu'on peut former des quatre premiers points, de sorte que, par exemple,

$$x\alpha x_1\beta \quad \text{et} \quad x\gamma x_1\delta, \quad y\alpha y_1\gamma \quad \text{et} \quad y\beta y_1\delta, \quad z\alpha z_1\delta \quad \text{et} \quad z\beta z_1\gamma$$

seront des systèmes harmoniques de quatre points; ou bien, si par un point quelconque on mène quatre droites A, B, C, D parallèles aux quatre asymptotes A_∞, si on les arrange des trois manières possibles en deux couples, savoir

$$AB \quad \text{et} \quad CD, \quad AC \quad \text{et} \quad BD, \quad AD \quad \text{et} \quad BC,$$

et si l'on construit trois autres couples de droites

$$X \quad \text{et} \quad X_1, \quad Y \quad \text{et} \quad Y_1, \quad Z \quad \text{et} \quad Z_1,$$

tels que

$$XAX_1B \text{ et } XCX_1D, \quad YAY_1C \text{ et } YBY_1D, \quad ZAZ_1D \text{ et } ZBZ_1C,$$

soient des faisceaux harmoniques; alors ces droites X, X_1, Y, Y_1, Z, Z_1, sont parallèles aux six asymptotes inconnues de la courbe P^{10}, et conséquemment dirigées vers les six points x, x_1, y, y_1, z, z_1 que la courbe a en commun avec G_∞. *De ces trois couples de points, deux sont toujours réels, tandis que le troisième est imaginaire; et d'une manière analogue, des six asymptotes quatre sont réelles et deux imaginaires,* pourvu toutefois que les premières quatre asymptotes A_∞ soient réelles.

En outre, la courbe P^{10} *passe aussi par les points milieux des vingt-huit tangentes doubles de la base* C^4.

Quant aux cordes doubles S_2, la courbe P^{10} sera le lieu géométrique de leurs points milieux, mais ces cordes elles-mêmes envelopperont une autre courbe, savoir :

Le lieu de toutes les cordes doubles S_2 *qui forment des parties de polaires intérieures* P^2 *décomposées, ou qui peuvent en général exister dans la base donnée, est une courbe* S_2^9 *de la neuvième classe et du trente-quatrième degré qui a avec la base un contact du troisième ordre dans ses quatre points* a_∞ *situés à l'infini, et qui a conséquemment pour asymptotes les quatre asymptotes de la base; elle touche en même temps chacune de ces asymptotes encore dans un second point déterminé, de sorte qu'elle a ces asymptotes pour tangentes doubles; en outre, elle touche aussi les vingt-huit tangentes doubles de la base et a la droite* G_∞ *pour tangente sextuple, attendu qu'elle la touche dans les six points* x *et* x_1, y *et* y_1, z *et* z_1, *déterminés ci-dessus.* Car, si l'on imagine le pôle P situé dans un de ces six points, soit en x, la corde double correspondante S_2 coïncidera avec G_∞ et touchera la courbe au point conjugué x_1, et réciproquement. Il en est de même pour les deux autres couples de points. Ces contacts sont réels ou imaginaires en même temps que les points auxquels ils correspondent.

Comme la base C^4 est, en général, de la douzième classe, elle aura en commun

avec la courbe S_2^0, en tout $12.9 = 108$ tangentes, lesquelles consistent : 1° dans les trente-deux susdites tangentes S_2^0 ; 2° dans les vingt-huit tangentes doubles de la base, comptées deux fois ; 3° dans les quatre asymptotes comptées chacune pour cinq, ce qui fait en tout $32 + 28 \cdot 2 + 4.5 = 108$.

Des points que la courbe S_2^0 a en commun avec la droite G_∞, nous en connaissons déjà seize, savoir : les six points de contact x, x_1, y, y_1, z, z_1 comptées deux fois, et les quatre points a_∞. La courbe étant du trente-quatrième degré, il manque encore dix-huit points, qu'on détermine par la considération suivante, qui fait connaître en même temps quelques autres propriétés :

Par chaque point donné il passe, en général, neuf cordes doubles S_2. Si ce point, que nous appellerons a, se trouve sur la base C^4 même, il formera l'une des deux extrémités de chacune des neuf cordes doubles S_2, *et alors les neuf autres extrémités conjuguées a_1 se trouvent sur une courbe du troisième degré a^3, qui a avec la base un contact du second ordre au point a, et de même les points milieux* P *des neuf cordes doubles se trouvent sur une autre courbe du troisième degré* P^3, *qui a avec la base au point a un contact de premier ordre*. Si, en particulier, le point a est un point d'inflexion de la base, *il sera aussi un point d'inflexion de chacune des deux courbes a_1^3 et* P^3. Et si a est un des susdits trente-deux points d'intersection P^0 des courbes P^{10} et C^4, *la base aura en ce point un contact du troisième ordre avec la courbe a_1^3, et un contact du second ordre avec la courbe* P^3, *de sorte que ces deux dernières courbes ont en ce point un contact du second ordre.*

Quoique par chaque point il passe neuf cordes doubles, celles-ci ne sont cependant parallèles que trois à trois, de sorte qu'il n'y a que trois cordes doubles S_2 dirigées à la fois vers une direction quelconque donnée ; ou, en d'autres termes, par chaque point Q de la droite G_∞ il ne passe que trois cordes doubles S_2 (non situées elles-mêmes à l'infini), tandis que les six autres coïncident avec la droite G_∞ même. Les points milieux P de trois cordes doubles parallèles se trouvent nécessairement sur un diamètre D de la base C^4 (§ III, I) ou, ce qui revient au même, sur la troisième polaire extérieure D, du point Q par rapport à la base, et les trois cordes S_2 ont la *direction conjuguée* au diamètre D. Qu'on imagine, en outre, la première polaire extérieure A^3 du même point Q par rapport à la base ; elle passera, comme on l'a déjà observé, par les neuf pôles P_3, qui sont des points triples de la courbe P^{10} ; et conséquemment elle ne peut plus rencontrer cette dernière qu'en trois points P, lesquels (en vertu de la position des neuf points P_3), se trouvent nécessairement sur une même droite. Or, cette droite est précisément le susdit diamètre D, et les trois points d'intersection P sont précisément les points milieux des trois cordes doubles dirigées vers Q. Donc :

Si l'on imagine la première et la troisième polaire extérieure A^3 *et* D, *d'un point quelconque* Q *situé sur la droite* G_∞ *par rapport à la base* C^4, *elles se couperont dans les trois pôles* P, *dont les trois cordes doubles correspondantes* S_2 *sont dirigées vers le même point* Q, *ou ont la direction conjuguée au diamètre* D. *Et si le point* Q *se meut sur la droite* G_∞, *le lieu des trois points d'intersection* P *de sa première et de sa troisième po-*

laire extérieure sera la même courbe du dixième degré P^{10}, *qui contient tous les pôles dont les polaires intérieures* I^3 *se décomposent en parties.* Toutes les polaires A^2 qui se présentent pendant ce mouvement forment un faisceau de courbes $B(A^2)$, ayant pour points fondamentaux les neuf points P_3.

Il peut arriver qu'une des polaires A^2 touche la courbe P^{10}, ce qui fait que deux des trois points d'intersection P se réunissent en un point de contact $\mathfrak{P}_0$ de P^{10}, A^2 et D, et que les deux cordes doubles correspondantes S_2 se réunissent en une seule $\mathfrak{S}_2^0$. Alors cette corde $\mathfrak{S}_2^0$ touche la courbe S_2^0 au point correspondant Q (que, pour ce cas, nous désignerons par Q_0) et sera en conséquence une asymptote de cette courbe, de même que Q_0 sera un de ces points qu'elle a en commun avec la droite G_∞, et qu'on demandait ci-dessus. Or, comme une courbe P^p peut être touchée par les courbes d'un faisceau $B(Q^q)$ en $p(p+2q-3)$ points (*voir* Extrait I), la courbe P^{10} devrait être touchée par le faisceau de polaires $B(A^2)$ en $10(10+2.3-3) = 130$ points. De ces cent trente points, cent huit sont absorbés par les neuf points communs P_3; il n'en reste donc plus que vingt-deux points, parmi lesquels se trouvent encore les quatre points a_∞ que l'on connaît déjà, de sorte qu'il ne reste que dix-huit points de contact $\mathfrak{P}$ possibles. A ces dix-huit points $\mathfrak{P}_0$ correspondront donc sur la droite G_∞ les dix-huit points Q_0 qu'on avait demandés ainsi que les dix-huit asymptotes $\mathfrak{S}_2^0$ de la courbe S_2^0; c'est-à-dire *les dix-huit points* Q_0 *que la courbe* S_2^0 *a en commun avec la droite* G_∞ *et dont on n'avait pas encore rendu compte, jouissent de la propriété, ou sont déterminés par la relation que la première et la troisième polaire de chacun d'eux, par rapport à la base, se touchent dans un point* $\mathfrak{P}_0$, *et que l'asymptote* $\mathfrak{S}_2^0$ *correspondant à* Q_0 *passe en même temps par* $\mathfrak{P}_0$. Les quatre points a_∞ jouissent de la même propriété, mais en présentant cette particularité, que chacun d'eux est en même temps Q_0 et $\mathfrak{P}_0$, c'est-à-dire que la première et la troisième polaire de chacun d'eux touchent la courbe P^{10} en ce point même. La troisième polaire de ce point sera l'asymptote correspondante de la base, de sorte que les quatre asymptotes de la base en seront en même temps des diamètres particuliers. Les dix-huit asymptotes $\mathfrak{S}_2^0$ jouissent, comme cordes doubles, de la propriété particulière, *que les couples de tangentes* A *et* A_1, B *et* B_1, *menées à la base* C^1 *par les extrémités* a *et* a_1, b *et* b_1 *des cordes doubles, ont leurs points d'intersection sur le diamètre correspondant* D, *de sorte que ce diamètre est une diagonale du quadrilatère complet* AA_1BB_1 *dont les deux autres diagonales sont parallèles à* $\mathfrak{S}_2^0$.

Chaque diamètre D rencontre la courbe P^{10} premièrement dans les trois points P, situés en même temps sur la polaire correspondante A^3, et, en outre, en sept autres points P; les premiers trois points se distinguent des sept autres points en ceci que les cordes doubles S_2 correspondant aux trois points ont la direction conjuguée au diamètre, tandis que les cordes doubles correspondant aux sept autres points sont conjuguées chacune à un autre diamètre, respectivement. Donc : *Des dix pôles* P *qui se trouvent sur un diamètre quelconque* D, *trois lui appartiennent plus particulièrement en jouissant de la propriété, que les cordes doubles correspondant à ces pôles ont la*

direction conjuguée à ce diamètre, ou sont dirigées vers son pôle Q *situé sur la droite* G_∞.

Relativement à la totalité des diamètres, on a le théorème suivant :

Tous les diamètres D *de la base donnée* C^4 *enveloppent une courbe déterminée* D *de la troisième classe et du quatrième degré, ayant trois points de rebroussement et une tangente double* D_2; *notamment cette courbe touche chacune des quatre asymptotes de la base (en qualité de diamètres particuliers) en un point qui est le centre de gravité de ses trois points d'intersection avec les trois autres asymptotes. Nous appelons aussi la courbe* D^3 *la troisième polaire de la droite* G_∞, *par rapport à la base* C^4 (*voir* Extrait I).

Conséquemment il passe, en général, par chaque point R du plan de la courbe C^4 trois de ses diamètres; donc il passera aussi par chaque point Q de G_∞ trois diamètres parallèles D_q, lesquels ont la direction conjuguée au diamètre D qui est la troisième polaire du point Q. Mais les directions conjuguées aux trois diamètres D_q sont différentes entre elles et différentes aussi, en général, de celle du diamètre D; savoir :

La base C^4 *n'a, en tout, que trois couples de diamètres conjugués (c'est-à-dire des diamètres dont l'un a la direction conjuguée à l'autre), lesquels diamètres sont respectivement dirigés vers les couples de points* x *et* x_1, y *et* y_1, z *et* z_1 *situés sur la droite* G_∞, *et conséquemment parallèles aux couples de rayons* X *et* X_1, Y *et* Y_1, Z *et* Z_1, *construits ci-dessus.* Si l'on imagine le point Q situé en un de ces six points, par exemple en x, le diamètre correspondant D passera par le point conjugué x_1, et réciproquement. En même temps, x_1 sera un des trois points P qui appartiennent plus particulièrement au diamètre D, ou dans lesquels ce diamètre est rencontré par la polaire correspondante A^3.

Les quatre asymptotes A_s *sont les diamètres particuliers qui sont conjugués à leur propre direction.*

La tangente double D_2 *de la courbe* D^3 *est en quelque sorte un diamètre double, c'est-à-dire conjugué à deux directions différentes, de sorte qu'il lui correspond aussi deux pôles différents sur la droite* G_∞, *soient* Q_2 *et* Q_2^1, *situés dans ces deux directions. De même, il faut que deux fois trois pôles* P *lui appartiennent plus particulièrement, et que les cordes doubles* S_2 *correspondant à ces pôles aient trois par trois les directions conjuguées, donc soient parallèles ou dirigées vers les points* Q_2 *et* Q_2^1.

Les directions conjuguées aux trois diamètres qui passent par un point donné quelconque R *sont toujours déterminées par les asymptotes des deux polaires premières* A *et* P^3 *de ce même point, et réciproquement.*

En général, chaque pôle P (situé sur P^{10}) n'appartient particulièrement qu'à *un seul* des trois diamètres qui passent par ce pôle, savoir au diamètre conjugué à la corde double correspondante. Seulement des neuf pôles particuliers P, chacun appartient en même temps aux trois diamètres, puisqu'il lui correspond aussi trois cordes doubles, conjuguées respectivement à ces diamètres.

Les trois diamètres qui passent par chacun des neuf pôles P_3 *touchent en ce point les trois branches de la courbe* P^{10} *qui passent par ce même point.*

Si le pôle P_x ($= P$) est en particulier un des quarante points communs aux courbes P^{10} et D^3, deux des trois diamètres qui passent par ce point coïncident avec la tangente D_t menée à la courbe D^3 au pôle P_x. Le troisième diamètre touche la courbe D^3 en un autre point que nous désignerons par R_0; désignons ce diamètre par D_r. En cette circonstance, deux cas peuvent se présenter, savoir le pôle P_x peut appartenir particulièrement :

1°. Au diamètre D_t, ou

2°. Au diamètre D_r;

ce qui détermine ensuite les intéressantes relations que voici :

I. *Si le pôle* P_x *appartient au diamètre* D_t, *sa polaire intérieure* I^3 *est composée de* $I^2 + S_2$, *la corde double* S_2 *étant en même temps une asymptote de la conique* I^2.

II. *Si le pôle* P_x *appartient au diamètre* D_r, *sa polaire intérieure est composée de* $S_2 + I + I_1$, *les droites* I *et* I_1 *étant parallèles et également distantes du pôle.*

Il se présente ici la question suivante :

Parmi les quarante pôles P_x, *combien en appartient-il à des diamètres* D_t, *et combien à des diamètres* D_r; *ou combien existe-t-il de polaires intérieures se décomposant en* $I^2 + S_2$ *de manière que* S_2 *soit une asymptote de* I^2, *et combien en existe-t-il qui se décomposent en trois droites* $S_2 + I + I_1$?

Je ne saurais encore répondre d'une façon certaine à cette question, et j'en abandonne la solution au lecteur.

J'ajoute encore, relativement à la courbe D^3, que :

La courbe D^3 *est le lieu géométrique du pôle* R_0, *dont la polaire extérieure* A^3 *touche la droite* G_∞; *et la troisième polaire du point de contact* Q *est précisément le diamètre* D *qui touche la courbe* D^3 *en ce pôle* R_0. Or, comme la polaire intérieure I^3 du même pôle R_0 a toujours en commun avec la droite G_∞ les mêmes trois points que la polaire extérieure A^3 (§ I, II), il s'ensuit qu'elle aussi touche la droite G_∞ en Q. Mais j'ai fait voir que ce contact n'est possible qu'à condition que Q soit un point double de la courbe I^3. Donc, on peut dire aussi :

Le lieu géométrique du pôle R_0, *dont la polaire intérieure* I^3 *n'a qu'un seul point double* Q (*ou, dans un cas particulier, trois points doubles* [*]), *est la courbe* D^3, *et le*

---

[*] Pour que la polaire I^3 puisse avoir deux, ou trois points doubles, il faut qu'elle se compose de $I^2 + S_2$, donc il faudra que le lieu de son pôle soit la courbe P^{10}, et en ce cas les points doubles sont les points d'intersection de I^2 et S_2, soit $\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{Q}_1$. A cette occasion, on peut se demander : *Quelle est la courbe* $\mathfrak{Q}^n$ *sur laquelle se trouvent tous ces points doubles? L'exposant n, qui indique son degré, est-il peut-être égal au nombre des pôles* P_x *qui appartiennent à des diamètres* D_t? *Et les cas des*

lieu géométrique du point double est la droite G_∞. Pour les pôles $P_\infty = R_\infty$, dont les polaires intérieures se composent de $S_2 + I + I_1$, et ont, en conséquence, trois points doubles, il n'y a qu'un seul de ces points doubles (savoir l'intersection de I et I_1) qui se trouve sur la droite G_∞; et pour les pôles P_∞, dont les polaires intérieures se composent de $I^2 + S_2$, les deux points doubles se réunissent en un seul, qui se trouve sur G_∞ et doit être considéré comme un point de rebroussement.

Si le pôle R_0 *est, en particulier, un des trois points de rebroussement de la courbe* D^3, *le point correspondant* Q *sera en même temps un point d'inflexion de sa polaire extérieure* A^3, *et un point de rebroussement de sa polaire intérieure* I^3, *et la droite* G_∞ *sera respectivement la tangente d'inflexion et de rebroussement.*

Si un pôle R se trouve sur le diamètre double D_2 (tangente double de D^3), ses deux polaires A^3 et I^3 passeront par les deux points Q_2 et Q_2^1 qui correspondent, sur la droite G_∞, au diamètre D_2; et si R se meut sur le diamètre D_2, deux couples d'asymptotes des polaires A^3 et I^3 resteront constamment parallèles à elles-mêmes, attendu qu'elles sont constamment dirigées vers les points Q_2 et Q_2^1.

III.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES TRANSVERSALES RECTILIGNES DANS LES COURBES ALGÉBRIQUES.

§ Ier.

Une courbe donnée C^m du degré m est rencontrée par chaque droite ou transversale S menée dans le même plan en m points (réels ou imaginaires) a. Le centre de gravité des m points d'intersection soit désigné par A. On aura relativement à ce centre de gravité les théorèmes suivants (dont le premier, I, a, est généralement connu):

I. *a. Si la transversale* S *se meut parallèlement à elle-même, son centre de gravité (c'est-à-dire le centre de gravité de ses* m *points d'intersection variables* a) *décrit une droite déterminée* D, *savoir le diamètre de la base* C^m *conjugué à la direction de* S.

b. Si l'on donne à la transversale S *successivement toutes les directions possibles, on obtiendra tous les diamètres de la base. Parmi ces diamètres, les* m *asymptotes* A_∞ *de la base se présenteront comme les diamètres particuliers qui sont conjugués à leur propre direction. Conséquemment, le centre de gravité de toute transversale parallèle à une asymptote est situé au point à l'infini* a_∞ *de l'asymptote. Le centre de gravité de la*

doubles S_2 *qui correspondent à ces pôles sont-elles en même temps des asymptotes de la courbe* $\mathfrak{A}^{m-1}$. Au reste, cette courbe inconnue $\mathfrak{A}^{m-1}$ aura les mêmes pôles P^1 pour points triples, de même que la courbe P^{m-1}. Le lieu des points doubles de toutes les polaires intérieures P^1 est composé de $\mathfrak{A}^{m-1}$ + G_∞.

droite G_∞, *considérée comme transversale, est indéterminé, se trouve sur tout diamètre qu'on voudra, donc dans toute direction qu'on voudra. Tous les diamètres de la base touchent une courbe déterminée de la* $(m-1)^{ième}$ *classe,* D^{m-1}, *et du* $2(m-2)^{ième}$ *degré,* $\mathfrak{D}^{2m-4}$. *Notamment, chaque asymptote* A_s *touche cette courbe en un point* a_0 *qui est le centre de gravité de ses* $m-1$ *points d'intersection avec les* $m-1$ *autres asymptotes. Cette courbe* a, *en général,* $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ *tangentes doubles qui sont des diamètres* D_2 *de la base conjugués à la fois à deux directions différentes. Conséquemment il passe, en général, par chaque point* P *du plan* $m-1$ *diamètres de la base; ou chaque point* P *est le centre de gravité* A *de* $m-1$ *transversales* S *passant par ce point et conjuguées respectivement à ces* $m-1$ *diamètres. Si le point* P *se trouve sur une asymptote, cette asymptote elle-même sera un des* $m-1$ *diamètres, et coïncidera, en conséquence, avec la transversale* S *qui lui est conjuguée; et puisque cette transversale, de même que les autres, doit avoir comme auparavant son centre de gravité en* P, *on peut considérer chaque point* P *d'une asymptote* A_s *comme centre de gravité d'une transversale* S *qui coïncide avec cette asymptote. Si l'on transporte* P *au point à l'infini* a_∞ *de l'asymptote, les autres* $m-2$ *diamètres seront tous parallèles à* A_s, *les* $m-2$ *transversales conjuguées à ces diamètres coïncideront toutes avec* G_∞, *et la transversale conjuguée à* A_s *coïncidera avec* A_s, *comme auparavant. Enfin, si* P *se trouve sur la droite* G_∞ *dans une direction quelconque, tous les* $m-1$ *diamètres seront parallèles à cette direction, et toutes les transversales conjuguées à ces diamètres coïncideront avec* G_∞.

c. Comme la base C^m est de la $m(m-1)^{ième}$ classe, elle a en commun avec la courbe D^{m-1} en tout $m(m-1)(m-1)$ tangentes; donc *la base* a, *en général,* $m(m-1)(m-1)$ *de ses diamètres pour tangentes.* Parmi ces diamètres particuliers, il faut compter notamment les m asymptotes A_s dont les points de contact a_∞ se trouvent sur G_∞. Nous désignerons les $m^2(m-2)$ autres diamètres par D_0 et leurs points de contact avec la base par d_0.

II, a. *Si l'on fait pivoter une transversale quelconque* S *autour d'un pôle* P *situé sur cette transversale, le centre de gravité* A *décrira une courbe* A^m *du* $m^{ième}$ *degré et de la* $2(m-1)^{ième}$ *classe, qui a le pôle* P *pour point* $(m-1)^{tuple}$, *qui est touchée en ce point par les* $(m-1)$ *transversales ayant* P *pour centre de gravité* (I, b), *et dont les* m *asymptotes* $\mathfrak{A}_s$ *sont respectivement parallèles aux* m *asymptotes* A_s *de la base. Les deux polygones formés des* m *droites* $\mathfrak{A}_s$ *et des* m *droites* A_s *sont semblables et semblablement placés; ils ont le pôle* P *pour centre de similitude, et leurs dimensions homologues sont dans le rapport de* $1:m$. *Conséquemment, tous les polygones* $m\mathfrak{A}_s$ *formés des* m *asymptotes des courbes* A^m *correspondant à des pôles* P *quelconques sont égaux et semblables. Si l'on imagine, outre la base donnée* C^m, *d'autres courbes* C_1^m, C_2^m,... *ayant en commun avec la base les* m *asymptotes* A_s, *il correspondra à chaque pôle* P, *par rapport à toutes ces courbes, une seule et même courbe* A^m, *et, de même, ces courbes auront en commun tous les diamètres* D, *ainsi que leur enveloppe* D^{m-1}. *Parmi les courbes* C_1^m,... *qui ont en commun avec* C^m *les* m *asymptotes* A_s, *il en existe une, soit* C_p^m, *qui a le pôle* P *pour*

point $m-1^{\text{tuple}}$, et qui a en commun avec la courbe A^m les $m-1$ tangentes qui la touchent en ce point, de sorte que les branches respectives des deux courbes se touchent en ce même point. En d'autres termes, les deux courbes C_p^m et A^m sont semblables et semblablement placées, elles ont P pour centre de similitude, et leurs dimensions homologues sont dans le rapport de $m:1$. Si l'on fait passer le pôle P à l'infini dans une direction déterminée, la courbe A^m se décompose dans le diamètre D conjugué à cette direction, et dans une autre partie située tout entière à l'infini.

b. Attendu que la courbe A^m passe (en vertu du parallélisme des asymptotes) par les m points a_∞ de la base C^m situés à l'infini sur G_∞, il faut que les $m(m-1)$ autres points communs aux deux courbes, que nous désignerons par A_1, se trouvent sur une courbe du $(m-1)^{\text{ième}}$ degré A_1^{m-1}. *Ou, par chaque pôle* P *il passe* $m(m-1)$ *transversales particulières* $S_1 (= S)$ *dont les centres de gravité* A_1 *se trouvent sur la base même, et sont en même temps les points d'intersection de la base avec une courbe du* $m-1^{\text{ième}}$ *degré* A_1^{m-1}. *Si le pôle* P *se trouve sur la base même, celle-ci aura en* P *un contact du* $m-2^{\text{ième}}$ *ordre avec* A_1^{m-1}. *Le contact sera du* $(m-1)^{\text{ième}}$ *ordre, si une des* $m-1$ *transversales, qui ont* P *pour centre de gravité, coïncide avec la tangente de la base au point* P. *Mais cela ne peut avoir lieu que pour un nombre déterminé de pôles, savoir pour* $m(m-1)^2$ *pôles. Si l'on fait passer le pôle* P *à l'infini dans une direction quelconque, des* $m(m-1)$ *transversales* S_1 m *seulement resteront présentes dans la figure; elles seront parallèles à cette même direction, et leurs* m *centres de gravité* A_1 *se trouveront sur le diamètre* D *conjugué à cette direction dont ils seront en même temps les points d'intersection avec la base. Les* $m(m-2)$ *autres transversales* S_1 *coïncideront avec la droite* G_∞, *et leurs centres de gravité seront réunis par groupes de* $m-2$, *dans les* m *points* a_∞ *de la base, de sorte qu'en ce cas la courbe* A_1^{m-1} *sera formée de* $D+(m-2)G_\infty$. Dans le cas particulier où l'on considère les deux courbes C_p^m et $A^m(a)$, les $m(m-1)$ points A_1 communs à ces deux courbes sont tous réunis au pôle P, et la courbe A_1^{m-1} se décompose dans les $m-1$ tangentes de contact [*] en ce point.

Si, en particulier, la courbe A^m *touche la base* C^m *en un point quelconque, la courbe correspondante* A_1^{m-1} *touchera la base en ce même point.*

c. Si le pôle P se meut sur une droite fixe quelconque G, les courbes A^m, qui lui correspondent, par rapport à C^m, de la manière que nous venons de dire (a), formeront une série de courbes $S(A^m)$ ayant en commun, outre les m points a_∞ de la base, le centre de gravité de la droite G, que nous désignerons par A_g. En outre, ces courbes sont disposées dans le plan, de telle sorte que par chaque point $\mathfrak{P}$ il passe en général $m-1$ de ces courbes, que la base a dans chacun de ses m points a_∞ avec une de ces courbes un contact du premier ordre, et dans chacun de ses m points d'intersection avec la droite G avec une de ces courbes un contact du $(m-2)^e$ ordre, et qu'elle est touchée encore par $m(m^2-3)$ de ces courbes en autant d'autres points.

[*] C'est-à-dire les tangentes communes au point de contact des deux courbes.

Les courbes de la série $S(A^m)$ *sont toutes enveloppées par la courbe* D^{m-1}, *laquelle est touchée, en général, par chaque courbe* A^m *en* $2m-3$ *points différents. Mais parmi ces courbes* A^m *il en existe* $4(m-2)$ *qui ont, avec la courbe* D^{m-1} *dans un de ses points, un contact du troisième ordre, de sorte qu'elles ne la touchent en outre qu'en* $2m-5$ *points. Enfin la série de courbes* $S(A^m)$ *jouit de la propriété, qu'une courbe donnée quelconque du degré* q *est touchée par* $q(q+1)(m-1)$ *des courbes de ladite série;* conséquemment toute droite donnée est touchée par $2(m-1)$ de ces courbes [*].

Les $m-1$ transversales qui ont le pôle P pour centre de gravité (I, b) donneront lieu, pendant que P se meut sur la droite G, à des systèmes de transversales constituant ensemble la totalité des transversales dont le centre de gravité se trouve sur G. Désignant chacune de ces transversales par S_g, on aura le théorème suivant :

Le lieu [**] *de toutes les transversales* S_g *dont les centres de gravité* A *se trouvent sur une droite donnée quelconque* G, *est une courbe,* S_g^m, *de la* $m^{ième}$ *classe et du* $2(m-1)^e$ *degré, qui a la droite* G_∞ *pour tangente* $(m-1)^{tuple}$, *qui touche les asymptotes* A_ε *de la base, et qui touche la droite* G *dans son centre de gravité* A_g.

Ce théorème fait en quelque sorte pendant au théorème (a). Au moyen de ces deux théorèmes, on obtient facilement tous les théorèmes suivants :

III, *a*. *Pour que la transversale* S, *menée dans le plan de la base fixe* C^m, *puisse toucher une autre courbe donnée quelconque de* $n^{ième}$ *classe,* K^n, *il faut que son centre de gravité* A *soit sur une courbe du* $mn^{ième}$ *degré* A^{mn}, *qui a les* m *points* a_∞ *de la base pour points* n^{tuples}, *et dont les asymptotes sont conséquemment parallèles par groupes de* n *à chaque asymptote* A_ε *de la base, respectivement. Les* n *asymptotes* $\mathfrak{A}_\varepsilon$ *d'un groupe correspondent aux* n *tangentes* T *de la base qui ont la même direction, de telle sorte que*

---

[*] *Si le pôle* P, *au lieu de se mouvoir sur la droite* G, *se meut sur une courbe du* $n^{ième}$ *degré* G^n, *la série correspondante* $S(A^m)$ *jouira des propriétés suivantes* : 1° *Les courbes de cette série ont en commun les* m *points* a_∞ *de la base.* 2° *Par chaque point* P *du plan il passe, en général,* $n(m-1)$ *courbes* A^m. 3° *La base* C^m *a dans chacun des* m *points* a_∞ *avec* n *de ces courbes un contact du premier ordre, puis dans chacun de ses* mn *points d'intersection avec la courbe* G^n, *avec une de ces courbes un contact de l'ordre* $(m-2)$, *et enfin avec* $nm(m^2-3)$ *de ces courbes en d'autres points déterminés un contact du premier ordre.* 4° *Une courbe donnée quelconque du* $q^{ième}$ *degré* Q^q *est touchée, en général, par* $nq(q+1)(m-1)$ *courbes* A^m. 5° *L'enveloppe de la série* $S(A^m)$ *est composée : (α), des* m *points* a_∞ ; *(β) de la courbe* D^{m-1} *touchée, en général, par chaque courbe* A^m *en* $2m-3$ *points, tandis qu'il existe* $4n(m-2)$ *de ces courbes* A^m *qui ont avec* D^{m-1} *en un de ses points un contact du troisième ordre; (γ) de* $(m-1)(m-2)$ *fois la courbe donnée* G^n ; *(δ) d'une courbe déterminée du degré* mn, *laquelle cependant n'est touchée, en général, par chaque courbe* A^m *qu'en un seul point.*

Si le pôle P *se meut sur la base* C^m *même, celle-ci* aura non-seulement dans chacun des points occupés successivement par P un contact du $(m-2)^{ième}$ ordre avec les courbes correspondantes A^m et A_1^{m-1} (b), mais elle *touchera, en outre,* $m(m^2-m^2-m-1)$ *courbes* A^m *ainsi que les courbes correspondantes* A_1^{m-1} ; *elle en touchera* $m(m-1)^2$ *au point même occupé respectivement par le pôle* [*contact du* $(m-1)^{ième}$ *ordre*], *tandis qu'elle en touchera* $m(m-2)(m^2+1)$ *en d'autres points déterminés.*

[**] C'est-à-dire l'enveloppe.

la distance d'une de ces asymptotes $\mathfrak{A}_i$ *à l'asymptote* A_i *est à la distance de la tangente correspondante* T *à* A_i, *comme* $(m-1) : m$.

b. Pour que le centre de gravité A *de la transversale* S *puisse se trouver sur une courbe donnée du* $n^{ième}$ *degré* G^n, *il faut que la transversale touche une courbe* S^{mn} *de la* $mn^{ième}$ *classe et du degré* $n(n-1)(m-1) + 2n(m-1) = (m-1)n(n+1)$, *laquelle courbe a les m asymptotes* A_i *de la base pour tangentes* n^{tuples} *et la droite* G_∞ *pour tangente* $n(m-1)^{tuple}$. *Les* $n(m-1)$ *points de contact de cette courbe avec* G_∞ *sont déterminés par les directions conjuguées aux n fois* $(m-1)$ *diamètres de la base qui sont respectivement parallèles aux n asymptotes de la courbe donnée* G^n. *Les* $n(n-1)(m-1)$ *asymptotes rectilignes* $\mathfrak{A}_i$ *de la courbe* S^{mn} *ont les directions conjuguées aux diamètres de la base qui touchent la courbe* G^n, *et ces asymptotes passent respectivement par les points de contact de ces diamètres, et sont ainsi complétement déterminées.*

IV. *Le lieu de la transversale* S_1 *dont le centre de gravité* A_1 *se trouve sur la base* C^m *même* (II, *b*) *et coïncide conséquemment avec un des m points d'intersection a, que nous désignerons par* a_1, *est une courbe* $S^{m(m-1)}$, *de la* $m(m-1)^{ième}$ *classe et du* $m(m^2-3)^{ième}$ *degré, qui a la droite* G_∞ *pour tangente* $m(m-2)^{tuple}$, *qui a en commun avec la base ses m asymptotes* A_i, *ayant en même temps ces asymptotes pour tangentes* $(m-1)^{tuples}$, *et qui touche, en outre, la base en* $m^2(m-2)$ *autres points déterminés. Les* $m(m-2)$ *points de contact de la courbe* $S^{m(m-1)}$ *avec la droite* G_∞ *sont déterminés par les directions conjuguées aux diamètres de la base qui sont parallèles, par groupes de* $m-2$, *aux m asymptotes* A_i (I, *b*). *Les* $m(m-1)$ *asymptotes rectilignes de la courbe* $S^{m(m-1)}$ (*parmi lesquelles sont comprises les m asymptotes* A_i) *passent par les points* d_0 *de la base, en chacun desquels la base est touchée par un de ses diamètres* D_0 (I, *c*). *Chacune de ces asymptotes a la direction conjuguée au diamètre correspondant, donc elle est déterminée.*

La courbe $S^{m(m-1)}$ a en commun avec la base C^m en tout

$$m(m-1)(m-2)m(m-1)$$

tangentes. D'après cela, on pourrait conclure que la base a un nombre égal de tangentes S_1^0 dont les centres de gravité A_1 se trouveraient sur la base même. Mais ce n'est pas précisément ce qui a lieu en réalité. Mettons à part d'abord les m asymptotes A_i de la base, comptées chacune pour m, donc toutes pour m^2 tangentes communes; il restera encore

$$(m-2)m$$

tangentes communes S_1^0 dont les points de contact a_2 avec la base ne sont pas situés à l'infini. Relativement à ces tangentes, on doit se poser la question : *Pour combien d'entre elles le centre de gravité* A_1 *coïncide-t-il avec le point de contact* a_2, *et pour combien d'elles coïncide-t-il avec un des* $m-2$ *points d'intersection* a, *soit avec* a_1? Attendu

que deux des m points d'intersection a sont réunis au point de contact a_2, j'ai supposé [*] que les probabilités des deux cas sont dans le rapport de

$$2 : (m - 2),$$

d'où il suit que *le centre de gravité* A_1 *des* $(m - 2)m^2$ *tangentes* S_1^0 *se trouve*

$$(1) \qquad 2(m - 2)m^2 \text{ fois en } a_2,$$

et

$$(2) \qquad (m - 2)m^2 \text{ fois dans un des points } a.$$

Mais si le centre de gravité A_1 se trouve au point de contact a_2, *la courbe* $S^{m(m-1)}$ *touchera nécessairement en ce point la tangente* S_1^0, *donc aussi la base* C^m; ainsi S_1^0 doit être comptée en ce cas (comme tangente au point de contact des deux courbes) pour deux tangentes communes, et doit être considérée comme une des tangentes particulières S_2^0, définies au § IV, de l'Extrait II. *Conséquemment, le centre de gravité* A_1 *ne se trouvera en* a_2 *que la moitié du nombre de fois qu'on vient de déterminer dans la formule* (1); *donc seulement*

$$(1^*) \qquad (m - 2)m^2 \text{ fois.}$$

D'après cela, le nombre des $(m - 2)m^2$ tangentes S_1^0 se réduit à

$$(m - 2)(m - 1)m^2,$$

et il résulte, en définitive, que :

La base donnée C^m *a, en général, outre les asymptotes,*

a. $(m - 2)m^2$ *tangentes dont le centre de gravité* A_1 *coïncide avec le point de contact* a_2; *et*

b. $(m - 2)^2 m^2$ *tangentes dont le centre de gravité* A_1 *se trouve dans un des* $m - 2$ *points d'intersection* a, *soit en* a_1 [**].

Au reste, la même chose a lieu pour les m asymptotes A_s. Attendu que chaque asymptote A_s doit être comptée pour m tangentes communes, il faut aussi que m centres de gravité A_1 se trouvent en même temps sur A_s et sur la base C^m. Ils se grouperont suivant le rapport de $2 : (m - 2)$; savoir, deux de ces centres de gravité seront réunis au point de contact $a_2 (= a_\infty)$ où les deux courbes ont en même temps un contact, et les $m - 2$ autres centres de gravité coïncideront avec les $m - 2$ points d'intersection a de A_s avec C^m.

Ainsi toutes les $m(m - 1)$, $m(m - 1)$ *tangentes communes* S_1^0 *se groupent et se re-*

---

[*] J'abandonne à d'autres une démonstration rigoureuse de la justesse ou de la fausseté de cette supposition. Pour $m = 3$ et $m = 4$, c'est-à-dire pour les bases C^3 et C^4, la supposition est vraie.

[**] Probablement des courbes du $m(m-2)^{ième}$ degré peuvent passer par les $m^2(m - 2)$ points a_2; et alors des courbes du $(m - 2)^{ième}$ $m^{ième}$ degré passeront aussi par les $(m - 2)^2 m^2$ points a_1. Du moins, c'est ce qui a lieu pour les bases du troisième et du quatrième degré.

duisent de la même manière; savoir, leur nombre se réduit à

$$m(m-1)^3,$$

et le centre de gravité A_1 *de ces tangentes se trouve*

$$\alpha) \qquad m(m-1)^2 \text{ fois en } a,$$

et

$$\beta) \qquad m(m-2)(m-1) \text{ fois en } a_1.$$

Ici, et plus encore ci-dessus (I, *b*), il se présente la circonstance remarquable, que le centre de gravité de l'asymptote A_2, c'est-à-dire le centre de gravité des m points a qu'elle a en commun avec la base, est *indéterminé*, et peut se trouver sur elle partout où l'on veut; tandis que le centre de gravité de toute transversale S parallèle à A_2 a une position *déterminée*, étant situé à l'infini en a_∞. Cela s'explique, parce qu'on peut imaginer les deux points a_∞ et a'_∞ qui sont réunis dans le point de contact a_2 de A_2, comme étant situés à l'infini dans des directions opposées; car en ce cas tout point quelconque de A_2 peut être considéré comme étant leur point milieu, donc leur centre de gravité, ce qui rend indéterminé le centre de gravité des m points a pris ensemble. De même le centre de gravité de l'asymptote A_2 est *déterminé* ou *indéterminé*, selon qu'elle a, avec la base au point a_∞, un contact *du deuxième* ou *du troisième ordre*, respectivement.

V. *Le lieu des centres de gravité* A_0 *des tangentes* S_0 *de la base* C^m, *considérées comme des transversales* S, *est une courbe* $A_0^{m^2-m-1}$ *du degré* $m(m^2-m-1)$; *cette courbe a les* m *points* a_1 *de la base pour points* $(m-m-1)^{\text{uples}}$, *y touche la base avec une de ses branches, et la coupe, au contraire, avec les* m^2-m-2 *autres branches; elle touche encore la base aux* $m(m-2)$ *m points* a_2, *ci-dessus indiqués, et la coupe aux* $(m-2)^2 m^2$ *points* a_1 (IV). *Conséquemment elle a, en commun avec la base, les* m *asymptotes* A_2 *de cette dernière; mais elle a, en outre, pour chaque asymptote* A_2, $m-m-2$ *autres asymptotes* $\mathfrak{A}_2$ *parallèles à* A_2. *Les asymptotes* $\mathfrak{A}$ *correspondent aux* m^2-m-2 *tangentes* T *de la base qui sont parallèles à la même* A_2, *de telle sorte que les distances d'une asymptote* $\mathfrak{A}_2$ *et de la tangente correspondante* T *à* A_2 *sont dans le rapport de* $(m-1):m$.

VI. *Le lieu des centres de gravité* A_d *de tous les diamètres* D *de la base donnée* C^m *considérés comme des transversales* S, *est (hormis les asymptotes de la base) une courbe* $A_d^{m^2-m-2}$ *du degré* $m(m-2)$. *Cette courbe a les* m *points* a_1 *de la base pour points* $(m-2)^{\text{uples}}$; *conséquemment elle a pour chaque asymptote* A_2 *de la base* $m-2$ *asymptotes* $\mathfrak{A}$ *parallèles à* A_2, *et correspondant aux* $m-2$ *diamètres* D (I, *b*), *parallèles à la même* A_2, *de telle sorte que les distances d'une asymptote* $\mathfrak{A}_2$ *et du diamètre correspondant* D *à* A_2 *sont dans le rapport de* $(m-1):m$. *Enfin la courbe* $A_d^{m(m-2)}$ *touche la courbe* D^{m-1}, *enveloppe de tous les diamètres, aux mêmes points* a_0 *où cette dernière courbe est touchée par les* m *asymptotes* A_2 *de la base* (I, *b*). Les $m(m-2)$ *m*

points communs aux courbes $A_d^{m(m-2)}$ et C^m sont les centres de gravité A_d d'un nombre égal de diamètres de C^m; et comme $m(m-2)$ de ces centres de gravité coïncident avec les m points a_∞, les $m(m-1)(m-2)$ autres points indiquent le nombre des diamètres dont les centres de gravité se trouvent sur la base, mais pas à l'infini. On arrive au même résultat en considérant les $m(m-1)^2$ tangentes communes aux courbes $S_1^{m(m-1)}$ (IV) et D^{m-1}. Car, si l'on en retranche les asymptotes A_∞ comptées chacune pour $(m-1)$, les $m(m-1)(m-2)$ autres tangentes doubles sont précisément les diamètres dont il s'agit. Donc :

La base donnée C^m a, en général, $m(m-1)(m-2)$ diamètres dont les centres de gravité se trouvent sur la base même, mais pas à l'infini, et des courbes du $(m-1)(m-2)^e$ degré peuvent passer par ces centres de gravité.

Relativement aux diamètres D et à leur enveloppe D^{m-1}, nous ajoutons encore le théorème suivant :

Si par le point de contact a_0 de chaque diamètre D de la base C^m avec l'enveloppe D^{m-1}, on fait passer la transversale $\mathfrak{S}$ $(=S)$ conjuguée au diamètre, le lieu de cette transversale sera une courbe $\mathfrak{S}^{2m-3}$ de la $(2m-3)^e$ classe et du $4(m-2)^e$ degré ayant la droite G_∞ pour tangente $2(m-2)^{uple}$, et touchant notamment aussi les m asymptotes de la base.

VII. Les théorèmes précédents, appliqués aux bases les plus simples C^3 et C^4, donnent lieu à des corollaires nombreux, tels que les suivants :

a. La plupart des propositions relatives à la base C^3 ont été déjà présentées ci-dessus (Extrait II, § III) sous un autre point de vue. D'après (IV), la courbe S_1^6 toucherait la base en $(3-2)3^2 = 9$ points a_2 qui sont en même temps les centres de gravité A_1 des tangentes correspondantes S_1^0; en outre, le centre de gravité A_1 de $(3-2)^2.3^2 = 9$ autres tangentes S_1^0 coïnciderait avec l'unique point d'intersection a_1 de ces tangentes. Mais ces deux fois neuf tangentes S_1^0 se réduisent aux neuf tangentes d'inflexion de C^3, de sorte que dans chaque point d'inflexion un point a_2 et un point a_1 sont réunis (*voir* Extrait II, § III, II, 2). D'après (V), le lieu géométrique des centres de gravité A_0 de toutes les tangentes S_0 est une courbe du quinzième degré A_0^{15}, qui a les trois points a_∞ de la base C^3 pour points quintuples, et touche celle-ci en chacun de ces points avec une de ses branches respectivement, de sorte qu'elle y a dix-huit points communs avec la base; en outre, elle a avec la base dans ses neuf points d'inflexion un contact du deuxième ordre, et conséquemment a en commun avec elle les neuf tangentes d'inflexion. Le centre de gravité A_0 de chaque tangente S_0 est situé au point de trisection le plus voisin du point de contact. Désignant par M le point milieu de chaque tangente S_0, *le lieu géométrique des* M *sera pareillement une courbe du quinzième degré* M^{15}, *qui a les trois points a_∞ pour points quintuples, y touche la base C^3 avec une de ses branches, et, en outre, a en commun avec la base ses neuf points d'inflexion ainsi que les neuf tangentes d'inflexion correspondantes.* Conséquemment : *il existe, en général, dans le plan d'une courbe du troisième degré C^3 (outre les trois points a_∞ et les neuf points*

d'inflexion) cent vingt points P *jouissant de la propriété d'être en même temps* A_1 *et* M, *c'est-à-dire d'être en même temps point de trisection ou centre de gravité d'une tangente, et point milieu d'une seconde tangente.* D'après (VI), le lieu des centres de gravité A_d de tous les diamètres D est une courbe du troisième degré A_d^3 ayant des asymptotes parallèles à celles de C^4. Conséquemment les triangles des asymptotes des deux courbes sont semblables et semblablement placés; ils ont le même centre de gravité, lequel en conséquence sera en même temps leur centre de similitude; leurs côtés homologues sont dans le rapport de 1 : 3; enfin la courbe A_d^3 touche les côtés du triangle des asymptotes de la base dans leurs points milieux a_2 et a ses propres asymptotes en même temps pour tangentes d'inflexion, etc.

b. Relativement à la base C^4, nous signalons entre autres les relations suivantes :

D'après (IV), le lieu de toutes les transversales S_1 dont les centres de gravité A_1 se trouvent sur la courbe C^4 elle-même, est une courbe S_1^{12} de la douzième classe et du cinquante-deuxième degré, qui a en commun avec la base, outre les asymptotes, $(4-2)4^3 = 128$ tangentes S_1^0. Parmi ces tangentes, soixante-quatre coïncident deux à deux, de manière à ne former que trente-deux tangentes S_2^0 dont le centre de gravité A_1 se trouve au point de contact a_2, et que nous avons discutées d'une manière plus détaillée ci-dessus (Extrait II, § IV); le centre de gravité A_1 des $(4-2)^2.4^2 = 64$ autres tangentes S_1^0 se trouve dans un des deux points d'intersection a_1 ou a_3. Si l'on désigne le point de contact de chacune de ces dernières tangentes par α, et les deux points d'intersection par β et γ, et si l'on suppose que le centre de gravité A_1 se trouve en β, β devra être situé entre α et γ, de telle sorte que $\beta\gamma = 2\beta\alpha$. Donc : *Une courbe quelconque du quatrième degré* C^4 *a, en général, soixante-quatre tangentes dont les deux points d'intersection* β *et* γ *se trouvent du même côté du point de contact* α, *la distance de l'un des deux points d'intersection au point de contact étant triple de celle de l'autre,* $\alpha\gamma = 3\alpha\beta$. *Des courbes du seizième degré peuvent passer par les soixante-quatre points* a_1 (*ou* β). Les centres de gravité A_0 de toutes les tangentes S_0 de la courbe C^4 se trouvent sur une courbe du quarante-quatrième degré (V). Le lieu des centres de gravité A_d de tous les diamètres D est une courbe du huitième degré A_d^8, qui a les quatre points a_2 et les trois points d'intersection des trois couples de diamètres conjugués de la base (Extrait II, § IV) pour points doubles. Il existe, outre les quatre asymptotes A_d, vingt-quatre diamètres D dont les centres de gravité A_d se trouvent sur la courbe C^4 elle-même, et des courbes du sixième degré peuvent passer par les vingt-quatre points A_d (VI).

Note. Au moyen de la projection, on donnera aux théorèmes précédents une forme plus générale. Les centres de gravité seront alors remplacés par des centres de moyennes harmoniques, qu'on déterminera de la manière indiquée par M. Poncelet dans son intéressant Mémoire *sur les centres de moyennes harmoniques* (Journal de M. Crelle, tome III, page 213).

§ II.

I. Les m points d'intersection a, b, c, d,... de la base C^m avec une transversale quelconque déterminent sur cette dernière $\frac{1}{2}m(m-1)$ segments ab, ac, ad,..., bc, bd,..., cd,...; désignons par Q le point milieu de chaque segment. Chaque segment est, relativement à son point milieu, une corde simple que nous désignerons par s (au lieu de S, *voir* l'Extrait II, § I); et, conséquemment, il se trouvera sur chaque transversale S, en général, $\frac{1}{2}m(m-1)$ cordes simples s et autant de points milieux Q. Si, en particulier, la transversale S touche la base, un des points milieux Q se trouvera au point de contact, soit en (ab), et deux fois $(m-2)$ points milieux coïncideront par couples en $m-2$ points. Si S est parallèle à l'une des asymptotes A_s de la base, $m-1$ points Q doivent être considérés comme se trouvant en a_∞; et si S coïncide avec A_s, $2(m-2)$ points Q se trouveront en a_∞, tandis qu'un autre point Q, savoir le point milieu des deux points a et b réunis au point de contact a_∞, reste indéterminé et pourra être tout point de A_s qu'on voudra (*voir* § I, IV); les autres $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ points Q seront déterminés comme auparavant. Si l'on fait passer S à l'infini, de sorte que $S = G_\infty$, les points Q seront indéterminés, parce que la direction de G_∞ est indéterminée; mais dès qu'on fixe la direction de G_∞, tous les $\frac{1}{2}m(m-1)$ points Q sont déterminés, savoir, au moyen des m asymptotes A_s de la base. Cette indétermination de la direction G_∞ fait que tout point Q_∞ situé sur G_∞ dans une direction donnée quelconque, peut être considéré, à volonté, comme point milieu de chacun des $\frac{1}{2}m(m-1)$ segments déterminés par les points a_∞, b_∞, c_∞, d_∞,....

Ces relations donnent lieu aux théorèmes suivants :

II, *a*. *Si l'on fait mouvoir une transversale quelconque* S *parallèlement à elle-même, ses* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *points milieux* Q *décriront conjointement une courbe* $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ *du* $\frac{1}{2}m(m-1)^{ième}$ *degré et de la* $m(m-1)(m-2)^{ième}$ *classe. Cette courbe aura* $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)$ *points doubles* Q_2 *et* $m(m-1)$ *tangentes* $(m-2)^{couples}$ *qui touchent en même temps la base. Ses asymptotes* $\mathfrak{A}_s$ *passeront respectivement par les* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *points d'intersection des* m *asymptotes* A_s *de la base et formeront par rapport à celles-ci les conjuguées harmoniques à la direction de* S, *de sorte que si* A *et* B *sont deux asymptotes de la base qui la touchent respectivement en* a_∞ *et en* b_∞ *et coupent une quelconque des transversales parallèles* S *en* a_1 *et* b_1 *respectivement, la droite* $\mathfrak{A}_{11}$ *menée du point d'intersection* $A_s B_s$ *par le point milieu* Q_1 *du segment* $a_1 b_1$, *sera une asymptote de la courbe* $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ *qu'elle touchera au point milieu* Q_∞ *du segment* $a_\infty b_\infty$. Au reste, on obtient toutes les autres tangentes de la courbe $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ par une construction pareille. *Si l'on imagine les tangentes* A *et* B *menées à la courbe* C^m *par deux de ses points d'intersection* a *et* b, *avec* S, *la droite* $\mathfrak{A}$, *menée du point d'intersection* AB *par le point milieu* Q *du segment* ab, *touchera la courbe* $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ *au point* Q.

Si la transversale S *se meut, en particulier, parallèlement à une asymptote* A_s *de la*

base, le degré de la courbe-lieu des Q *sera abaissé d'une unité, ou plutôt ce lieu sera formé de l'asymptote* A_1 *et d'une courbe du degré*

$$\tfrac{1}{2}m(m-1)-1=\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2).$$

Cette courbe aura A_1 *pour asymptote* $(m-2)^{tuple}$ *et la touchera au point* a_m *avec* $m-2$ *de ses branches, lesquelles, en conséquence, s'y touchent aussi les unes les autres.*

b. Si l'on donne à la transversale S *successivement toutes les directions possibles, on obtiendra une série de courbes* $S\left[Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}\right]$ *qui couvrent le plan entier, de telle sorte, qu'en général, par chaque point* P *il en passe* $\frac{1}{2}m(m-1)$ [*].

Pendant que la transversale S change de position, les $\frac{1}{2}m(m-1)$ asymptotes $\mathfrak{A}$ de la courbe variable $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ pivotent autour des points fixes d'intersection mutuelle des m asymptotes A_1 de la base, et forment un nombre égal de faisceaux de rayons projectifs, placés en partie en perspective et en partie obliquement; conséquemment, ces faisceaux auront en partie leurs points d'intersection G en perspective, et, en partie, engendreront des sections coniques K^2; savoir : chaque faisceau de rayons est en perspective avec $2(m-2)$ faisceaux, et obliquement placé par rapport à $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ autres faisceaux. Les points G et les coniques K^2 sont liés les uns aux autres par des relations nombreuses que cependant nous passerons ici sous silence.

III, *a. Si l'on fait pivoter la transversale* S *autour d'un pôle* P *pris sur elle à volonté, les* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *points milieux* Q *décriront une courbe* $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ *du degré* $\frac{1}{2}m(m-1)$, *et de la classe* $(m-1)^2m$. *Cette courbe aura le pôle* P *pour point* $\frac{1}{2}m(m-1)^{tuple}$, *et*

---

[*] Les points P par lesquels il passe un nombre de courbes moindre d'une unité, se trouvent sur l'enveloppe E^2 de cette série de courbes, laquelle enveloppe est touchée par chacune de ces dernières en (m^2-m-2) points. *De quelles parties cette enveloppe* E^2 *est-elle formée, ou quelles sont ses propriétés?* Ne serait-elle pas formée de deux parties distinctes, savoir : 1° du lieu géométrique de tous les points doubles Q_2 de la série de courbes, donc de deux fois une courbe du $x^{ième}$ degré Q_2^x; et 2° du lieu géométrique des points milieux Q_0 de toutes les cordes simples $\mathfrak{S}$ de la base qui joignent les points de contact de tangentes parallèles de la base (*voir* Extrait II, § III, IV)?

J'ai trouvé que ce dernier lieu est de $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)^{ième}$ degré, donc $Q_0^{\frac{1}{2}(m-1)(m-2)}$.

D'après cela, l'enveloppe E^2 serait formée de $2Q_2^x=Q_0^{\frac{1}{2}(m-1)(m-2)}$, chaque courbe $Q^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ de la susdite série de courbes aurait $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)(m-3)$ points doubles situés sur Q_2^x, et qui compteraient pour $(m-1)(m-2)(m-3)$ contacts, et, conséquemment, l'autre partie $Q_0^{\frac{1}{2}(m-1)(m-2)}$ serait touchée par chaque courbe $Q^{\frac{1}{2}(m-1)(m-2)}$ en $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)(m-3)$ points.

Pour la base C^4, l'enveloppe E^2 serait formée seulement de Q^{10} (Extrait II, § III, IV), laquelle courbe serait touchée par chaque courbe Q^3 en neuf points Q_0.

Pour la base C^4, où $Q_2^x=Q_2^{10}$ (Extrait II, § IV), on aurait

$$E^2=2Q_2^x=Q^{10}.$$

chaque courbe Q^6 aurait trois points doubles Q_2 situés sur Q_2^{10}, et toucherait la courbe Q_0^{10} en trente points Q_0.

aura, en outre, $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)$ *points doubles* Q. *Elle se touchera elle-même* $(m-1)$ *fois en chacun des* m *points* a_2 *de la base* C^m, *de sorte qu'elle n'aura que* m *asymptotes* $\mathfrak{A}$ *dont cependant chacune doit être comptée pour* $m-1$. *Ces asymptotes seront respectivement parallèles aux asymptotes* A_2 *de la base et seront à des distances moitié moindres du pôle, de sorte que les deux polygones à* m *côtés, formés par les asymptotes* $m\mathfrak{A}$ *et* mA_2, *seront semblables, ayant le pôle* P *pour centre de similitude et leurs dimensions homologues dans le rapport de* 1 : 2. *Lorsque le pôle est situé, en particulier, sur la base même, le lieu géométrique dont il s'agit se décompose en deux parties* $Q^m + Q^{m(m-2)}$. *La courbe* Q^m *est semblable à la base et semblablement placée ; elle touche celle-ci au point* P *qui est le centre de similitude des deux courbes, et leurs dimensions homologues sont dans le rapport de* 1 : 2 ; *conséquemment, leurs asymptotes sont parallèles et les distances respectives de ces asymptotes au pôle sont dans le même rapport de* 1 : 2. *L'autre courbe* $Q^{m(m-2)}$ *a le pôle pour point* $\frac{1}{2}(m+1)(m-2)^{\text{tuple}}$ *et les* m *asymptotes* $\mathfrak{A}$ *de la première courbe* Q^m *pour asymptotes* $(m-2)^{\text{tuple}}$; *elle a, en outre,*

$$\frac{1}{2}(3m+1)(m-2)(m-3)(m-4) \text{ points doubles Q.}$$

b. Si la courbe $Q^{m(m-1)}$ *doit passer par un point donné quelconque* $\mathfrak{P}$ *et avoir son pôle* P *sur une droite donnée* G, *il existera* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *solutions.* Ou : *Si le pôle* P *se meut sur une droite fixe* G, *la série de courbes correspondantes* $S(Q^{m(m-1)})$ *jouit de la propriété, que par chaque point* $\mathfrak{P}$ *du plan il en passe, en général,* $\frac{1}{2}m(m-1)$, *et que toute droite donnée est touchée par* $m(m^2-3)$ *de ces courbes.* L'enveloppe de cette série de courbes est formée des mêmes parties que la précédente (*voir* II, *b*, la note), mais, en outre, de différentes autres parties.

IV. Les points doubles Q_2, mentionnés dans les théorèmes précédents (II, *a*, et III, *a*), indiquent celles parmi les transversales S sur lesquelles deux des $\frac{1}{2}m(m-1)$ segments, soit *ad* et *bc*, ont le même point milieu Q_2; une telle transversale forme, d'après la définition et la notation ci-dessus données, une corde double S_2 qui passe par le point où se trouve respectivement le pôle P. Donc :

a. Le lieu de toutes les cordes doubles S_2 *d'une courbe donnée* C^m *du degré* m, *est une courbe de la* $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)^{e}$ *classe,*

$$S_2^{\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)},$$

par a *la droite* G_2 *pour tangente* $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)^{\text{uple}}$ *et chaque asymptote de la base pour tangente multiple* [*], *et qui touche notamment aussi les* $\frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9)$ *tangentes doubles de la base.* On obtient les directions déter-

[*] Combien de tangentes chaque asymptote de la base représente-t-elle ? Est ce qu'elle en représente $(m-2)(m-3)$, et la courbe dont il s'agit touche-t-elle chacune des asymptotes de la base $(m-2)(m-3)$ fois au point a_2, de manière à l'avoir en même temps pour asymptote $(m-2)(m-3)^{\text{tuple}}$, et à la toucher, en outre, en autant de points non situés à l'infini ?

minées par les $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)$ points de contact de la courbe-lieu des cordes doubles avec la droite G_∞, en arrangeant les m asymptotes A_s de la base par groupes de quatre, et en construisant pour chaque groupe trois couples de rayons harmoniques X et X_1, Y et Y_1, Z et Z_1 d'une manière analogue, comme on l'a fait ci-dessus pour les quatre asymptotes de la base C^3 (Extrait II, § IV, page 329). Par tout pôle P quelconque il passe, en général, $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)$ cordes doubles S_s; si le pôle se trouve sur G_∞, il n'en reste présentes dans la figure qu'un tiers de ce nombre, tandis que les autres coïncident avec G_∞. *Si le pôle* P *se trouve en un point quelconque de la base, il sera lui-même une extrémité, soit a, de* $\frac{1}{2}(m+1)(m-2)(m-3)$ *cordes doubles, dont les points milieux* Q *se trouveront sur le lieu géométrique* Q^{γ}, *discuté ci-dessus* (III, *a*), *ainsi que sur une autre courbe du* $(m-1)(m-3)^{e}$ *degré qui a, avec* Q^{γ} *au pôle, un contact de l'ordre* $\frac{1}{2}(m+2)(m-3)-1$.

b. Le lieu des points milieux Q_2 *de toutes les cordes doubles* S_2 *de la base donnée* C^m *est une courbe du* $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)^{e}$ *degré,*

$$Q^{\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)}.$$

Cette courbe a les asymptotes de la base pour asymptotes multiples $\left[\frac{1}{2}(m-2)(m-3)\right]^{tuples}$, *elle coupe la droite* G_∞ *aux mêmes points où celle-ci est touchée par la courbe-lieu des cordes doubles* S_2; *enfin elle passe par les points milieux des tangentes doubles de la base.*

Si un des $\frac{1}{2}m(m-1)$ points milieux Q d'une transversale, soit Q_1, se trouve sur la base même (sans que le segment correspondant soit $=0$), par exemple si le point milieu Q_1 du segment ac se trouve au point d'intersection b, et si l'on désigne, comme ci-dessus (Extrait II, § III, II), la transversale ou la corde simple ac par S_1, on obtiendra facilement, au moyen des théorèmes précédents, la proposition suivante :

c. Le lieu de toutes les cordes simples S_1 *de la base donnée* C^m *dont les points milieux* Q_1 *se trouvent sur la base même, est une courbe de la* $m(m-1)(m-2)^{e}$ *classe,*

$$S_1^{m(m-1)(m-2)}.$$

Cette courbe a la droite G_∞ *pour tangente* $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)^{tuples}$; *elle a ses* m *asymptotes* A_s *de la base pour tangentes* $2(m-2)^{tuples}$ *et pour asymptotes* $(m-2)^{tuples}$, *et elle touche la base dans ses* $3m(m-2)$ *points d'inflexion.* Les directions déterminées par les points de contact de cette courbe et de la droite G_∞ peuvent être obtenues d'une manière analogue comme pour la base C^3 (Extrait II, § III, II, 5), au moyen des asymptotes de la base, savoir : les trois droites qu'on mène, dans chacun des triangles formés par trois quelconques des asymptotes de la base C^m, des sommets aux points milieux des côtés opposés, sont dirigées vers trois de ces points de contact. De même le point de contact s de chaque corde S_1 avec la courbe-lieu de ces cordes, pourra être déterminé par la construction très-simple, donnée au même endroit (Extrait II, § III, II, 7). Par tout pôle quelconque P il passe $m(m-1)(m-2)$

cordes S_1 *dont les* $m(m-1)(m-2)$ *points milieux* Q_1 *se trouvent toujours sur une courbe du* $(m-1)(m-2)^e$ *degré* $Q_1^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}}$. Si le pôle P se trouve sur la base même, *il sera d'un côté le point milieu* $b = Q_1$ *de* $\frac{1}{2}(m+1)(m-2)$ *cordes* $u = S$, *et de l'autre côté une extrémité* a *de* $(m+1)(m-2)$ *autres cordes* S. *Les* $(m+1)(m-2)$ *points milieux de ces dernières cordes se trouvent sur la courbe* Q^e, *discutée ci-dessus* (**III**, *a*), **laquelle touche la base au point P. Si le pôle P se trouve à l'infini sur** G_∞, il ne reste plus présentes dans la figure que $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)$ cordes S_1 (attendu qu'un nombre égal de ces cordes coïncide avec G_∞), *et des courbes* $Q^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}}$ *peuvent passer par leurs points milieux* Q_1. Si le pôle se meut sur la droite G_∞, on obtient une série de courbes $S\left[Q_1^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}}\right]$. *Toutes les fois qu'une de ces courbes touche la base, auquel cas deux des cordes* S_1 *se réunissent dans une seule* S_1^0, *cette dernière sera une asymptote de la courbe* $S_1^{m(m-1)(m-2)}$ *et la touchera au pôle correspondant* P. *En outre, chaque corde* S_1^0 *de ce genre jouit de la propriété, que les tangentes* A, C *et* B, *menées à la base par les extrémités* a, c *et par le point milieu* b *de la corde, se rencontrent en un même point* $\mathfrak{P}$. 1° *Quelle est l'enveloppe de la série de courbes* $S\left[Q_1^{\frac{(m-1)(m-2)}{2}}\right]$? 2° *Quel est le degré de la courbe* $S_1^{m(m-1)(m-2)}$?

V. On obtient encore les propositions suivantes :

a. Le lieu de toutes les transversales S *de la base donnée* C^m, *qui ont un de leurs points milieux* Q *sur une droite donnée* G, *ou simplement le lieu de toutes les cordes simples* $ab = S$, *dont les points milieux se trouvent sur la droite donnée* G, *est une courbe de la* $m(m-1)^e$ *classe et du* $m(m^2-3)^e$ *degré*,

$$S^{m(m-1)}.$$

Cette courbe a les droites G *et* G_∞ *pour tangentes* $\frac{1}{2}m(m-1)^{\text{tuples}}$; *elle a, en outre,* $\frac{1}{2}m(m+1)(m-2)(m-3)$ *tangentes doubles; enfin elle touche : 1° les* m *asymptotes de la base; 2° les* m *tangentes qui touchent la base dans ses points d'intersection avec* G, *et 3° la base même, en* $m(m+2)(m-2)$ *points déterminés. Les tangentes doubles, qu'on vient de mentionner, sont formées par les cordes doubles* S_2 *de la base dont les points milieux* Q_2 *se trouvent sur* G, *et le lieu en question touche la base aux points de contact* a_0 *de toutes les cordes tangentes* ba_0 [*], *dont les points milieux se trouvent pareillement sur* G. *Le lieu dont il s'agit touche la droite* G *en* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *points et la coupe conséquemment encore en* $m(m+1)(m-2)$ *autres points* Q_0. *Ses tangentes aux points* Q_0 *sont des cordes particulières* $ab = \mathfrak{S}$ $(= S)$ *telles, que les tangentes* A, B *menées par les extrémités* a, b *à la base sont parallèles et se rencontrent au même point de* G_∞. *Pareillement, les tangentes qui touchent ce lieu dans ses* $m(m+1)(m-2)$ *points d'intersection avec la droite* G_∞, *donc ses asymptotes rectilignes, sont des cordes* ab *telles, que les tangentes menées à la base par leurs extrémités*

[*] Cordes qui, dans l'une de leurs extrémités a_0, touchent la courbe au lieu de la couper.

se rencontrent sur la droite G, *de sorte que, sous ce point de vue, il y a réciprocité entre* G *et* G_∞.

b. Le lieu de toutes les transversales particulières S *de la base donnée* C^m, *qui ont un de leurs points milieux* Q *sur une courbe donnée du* $n^{ième}$ *degré* G^n, *est une courbe de la* $nm(m-1)^e$ *classe qui a la droite* G_∞ *pour tangente* $\frac{1}{2}nm(m-1)^{tuple}$, *et dont on peut déterminer le nombre des tangentes doubles, des contacts avec les courbes* C^m *et* G^n, *etc.*

c. Le lieu des $\frac{1}{2}m(m-1)$ *points milieux* Q *de la transversale particulière* S *de la base* C^m, *qui touche une courbe donnée de* $n^{ième}$ *classe* K^n, *est une courbe du degré* $nm(m-1)$, *qui a pour chacune des* m *asymptotes de la base* n *asymptotes* $(m-1)$ *et parallèles à cette asymptote de la base, etc.*

d. Le lieu des points milieux Q_0 *de toutes les cordes simples* $ab = \mathfrak{S}$ *de la base* C^m *qui jouissent de la propriété, que les tangentes* A, B *menées par leurs extrémités* a, b *sont parallèles, ou le lieu du pôle* P_0 *dont la polaire intérieure* I^{m-1} *touche la base en deux points* a, b, *est une courbe du* $m(m+1)(m-2)^e$ *degré,*

$$Q_0^{m(m+1)(m-2)}.$$

Cette courbe touche la base dans ses $3m(m-2)$ *points d'inflexion et a ses* m *points* a_∞ *pour points* $(m+1)(m-2)^{tuples}$; *conséquemment elle a pour chaque asymptote* A_s *de la base,* $(m+1)(m-2)$ *asymptotes parallèles à* A_s, *et situées respectivement au milieu entre* A_s *et les tangentes de la base parallèles à* A_s. Conséquemment il existe, en général, $m(m+1)(m-2)(m-3)$ cordes $\mathfrak{S}$ dont le point milieu Q_0 se trouve sur la base même, mais n'est situé ni dans un des points a_∞, ni dans un point d'inflexion de la base. (Pour $m = 3$, on obtient $6\mathfrak{S}$ ou $6Q_0$, comme Extrait II, § III, IV). On peut demander ici *quel sera le lieu* $\mathfrak{S}^x$ *de toutes les cordes* $\mathfrak{S}$ [*]. Au reste, le point de contact de chaque corde $\mathfrak{S}$ avec la courbe $\mathfrak{S}^x$ est déterminé par la même relation simple, comme ci-dessus (Extrait II, § III, IV) pour la base C^3.

VI. Le lieu des points milieux Q de toutes les transversales S qui touchent la base C^m, donc de toutes les tangentes de cette dernière, se décompose en trois parties, dont une est la base même et ne contient qu'un seul point milieu qui se trouve au point de contact a_0; une autre partie contient les points milieux T_0 (au lieu de Q) des $m-2$ segments compris entre le point de contact a_0 d'un côté, et les $m-2$ points d'intersection b, c, d,... de l'autre [chaque point T_0 représentant au fait un couple de points Q réunis (I)]; enfin la troisième partie contient les points milieux $T(=Q)$ des segments terminés par ces $m-2$ points d'intersection. Conséquemment il se trouve sur chaque tangente $m-2$ points milieux T_0 et $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$ points milieux T, dont on détermine respectivement le lieu comme il suit :

[illegible]

[illegible] $m(m+1)(m-2)$ [illegible]

γ. *Le lieu des points milieux* T_0 *relativement à toutes les tangentes de la base* n-*aire* C^n *est une courbe du* $m(m+2)(m-2)^2$ *degré.*

$$T_0^{m(m+2)(m-2)^2}.$$

Cette courbe a les m *points* a_0 *de la base pour points* $m(m-1)^{2(m-2)}$, *et chaque asymptote* A_0 *de la base pour asymptote* $(m-2)^{\text{tuple}}$, *c'est-à-dire elle touche chaque asymptote de la base dans son point* a_0 *avec* $(m-2)$ *de ses branches, et la coupe avec* $(m+1)(m-2)$ *autres branches; enfin elle a en commun avec la base ses* $3m(m-1)$ *points d'inflexion et tangentes d'inflexion et touche chaque tangente double de la base dans son point milieu.* De là il suit que : *Une courbe quelconque* C^m *a, en général,* $m(m+4)(m-2)^2(m-3)$ *tangentes telles, que l'un des points d'intersection* b *est le point milieu du segment compris entre le point de contact* a_0 *et un autre point d'intersection* c.

β. *Le lieu des points milieux* T *de toutes les tangentes de la base* C^m *est une courbe du* $m(m+1)(m-2)^2(m-3)^2$ *degré.*

$$T^{m(m+1)(m-2)^2(m-3)^2}.$$

Cette courbe a les m *points* a_0 *de la base pour points* $(m+1)(m-2)^2(m-3)^{2(m-2)}$, *elle passe par les points de contact des* $\frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9)$ *tangentes doubles de la base, et, en outre, elle touche chacune de ces tangentes doubles en* $2(m-4)$ *points.* De là il suit que : *Une courbe quelconque* C^m *a, en général,* $m(m-2)(m-3)^2(m-4)$ *tangentes telles, que deux quelconques de leurs* $(m-2)$ *points d'intersection avec la courbe, soient* c *et* d, *sont également distants d'un troisième point d'intersection* b, *ou du point de contact* a_0, *ce dernier cas devant être compté pour deux combinaisons.*

Pour la base C^3, le lieu des points milieux T_0 de toutes les tangentes sera une courbe T_0^{12} $(=12)$, comme ci-dessus (Extrait II, § III, IV).

Pour la base C^4, le premier et le second lieu seront respectivement T_0^{48} et T^{40}, et l'on aura les propositions que voici :

(α^0). *Une courbe quelconque du quatrième degré a, en général, soixante-quatre tangentes telles, que l'un des deux points d'intersection* b *est le point milieu du segment compris entre l'autre point d'intersection* c *et le point de contact* a_0.

(β^0). *La même courbe doit avoir* $64:2=32$ *tangentes telles, que les deux points d'intersection* b *et* c *sont également distants du point de contact* a_0 (*comme* Extrait II, § IV). *Donc le lieu* T^{40} *a les quatre points* a_∞ *de la base* C^4 *pour points décuples, passe par les cinquante-six points de contact de ses vingt-huit tangentes doubles, et la touche aux trente-deux points* P^0 *spécifiés ci-dessus* (Extrait II, § IV).

Si $m>4$, la base C^m est touchée par la courbe-lieu des T en x points et coupée en y points outre les points spécifiés dans le théorème β, x et y étant liés entre eux par la

relation suivante :

$$2x + y = m(m-2)(m-3)(m^2 - m - 4).$$

Il s'agirait de déterminer ces deux nombres x et y [*].

VII. Pour la base donnée C^m il existe aussi des transversales particulières telles, que le centre de gravité A de leurs m points d'intersection (§ I) coïncide avec un de leurs $\frac{1}{2}m(m-1)$ points milieux Q. Désignons chaque transversale qui jouit de cette propriété par S_a, et son centre de gravité par Q_a; le lieu de la transversale et celui de son centre de gravité seront respectivement

$$S_a^{\frac{1}{2}m(m-1)} \quad \text{et} \quad Q_a^{\frac{1}{2}m(m-1)};$$

c'est-à-dire : *Pour une courbe quelconque C^m le lieu de la transversale S_a dont le centre de gravité Q_a est le point milieu d'un segment compris entre deux de ses points d'intersection, est une courbe de la $\frac{1}{2}m(m-1)^e$ classe, et le lieu de ce centre de gravité est une courbe du $\frac{1}{2}m(m+1)(m-2)^e$ degré.*

Pour la base C^3, les deux courbes seront respectivement S_a^6 et Q_a^6; la première est identique avec la courbe S_1^6, discutée ci-dessus (Extrait II, § III, II); la seconde représente la base C^3 prise deux fois, chaque point de C^3 étant en effet le point milieu ($= Q_a$) de deux cordes S_1 (Extrait II, § III).

Pour la base C^4, les deux courbes sont respectivement S_a^{18} et Q_a^{20}; mais chacune de ces courbes est double, attendu qu'ici chaque transversale S_a est une corde double S_2 et que par conséquent deux points milieux Q sont réunis au centre de gravité Q_a; conséquemment, les deux lieux simples sont seulement S_a^9 et Q_a^{10}, comme nous les connaissons déjà d'après Extrait II, § IV. Pour $m > 4$, cette réductibilité des courbes en question cesse d'avoir lieu.

Pour la base C^5, on a S_a^{40} et Q_a^{45}. La base a, en commun avec la première de ces deux courbes, huit cents tangentes $S_a^0 (= S_0)$, et, avec la seconde, deux cent vingt-cinq points $Q_a^0 (= Q_a)$. En supposant que Q_a soit le point milieu des deux points d'intersection a et b, il sera en même temps le centre de gravité des trois autres points d'intersection c, d et e; et si l'on désigne le point de contact de chaque tangente S_a^0 avec C^5 par B_0, les différentes combinaisons suivantes pourront avoir lieu :

---

* N'aurait-on pas

$$x = m(m-4)$$

ainsi que le semble exiger une certaine raison de probabilité. En ce cas, il s'ensuivrait

$$y = m(m-3)(m^2 - m - 4) \quad \text{et} \quad x + y = m(m-3)(m^2 - m - 4).$$

La base C^m aurait $\frac{1}{2}m(m-3)(m^2 - m - 4)$ tangentes telles, que deux de leurs points d'intersection, a et b, se trouvent dans le point de contact a_0, et $m(m-3)(m-4)(m^2 - m - 4)$ tangentes d'une autre espèce, dont les points de contact a_0 et b_0 sont le point milieu du segment compris entre deux autres points d'intersection c et d.

A. Relativement aux huit cents tangentes S_a^0, il y a trois cas possibles :

(α). c et d (ou cc, ou dc) sont réunis au point B_a; ou

(β). a et c (ou ac, ad, bc, bd, bc) sont réunis au point B_a; ou

(γ). a et b sont réunis au point B_a, et conséquemment Q^0 coïncide également avec B_a.

B. Relativement aux deux cent vingt-cinq points Q_a^0, deux cas sont possibles, ou bien :

(δ). Q_a^0 se trouve en c (ou c, d) et est non-seulement le point milieu de ab, mais aussi celui de cd, de sorte que la transversale correspondante S_a sera une corde double S_a; ou bien :

(ε). Q_a^0 coïncide avec les points a et b réunis, et conséquemment aussi avec B_a, comme au cas (γ), de sorte que la transversale correspondante S_a sera S_a^0, c'est-à-dire touchera la base C^2 en $(ab) = Q_a^0$.

On pose ici la question : *Combien de fois chacun de ces cas se présentera-t-il?* et notamment : *Parmi les deux cent vingt-cinq points* Q_a^0, *combien en appartient-il au cas* δ, *et combien au cas* ε? On peut poser des questions analogues relativement à la base générale C^m.

§ III.

Au moyen de la projection, les théorèmes du paragraphe précédent se transforment dans d'autres théorèmes, où les points milieux Q sont remplacés par certains points harmoniques N; à savoir, il sera donné, outre la base C^m, une droite G (en place de G_∞), et l'on prendra les quatrièmes points harmoniques N conjugués au point d'intersection R de la transversale S et de la droite G, par rapport à tous les couples de deux points qu'on peut former des m points d'intersection a, b, c, d, ..., de S avec C^m.

Mais on peut déterminer encore de diverses autres manières des points harmoniques sur la transversale. Par exemple, on arrangera par groupes de trois les m points d'intersection a, b, c, d, ..., de S avec C^m, et pour chaque groupe de trois points on déterminera les trois quatrièmes points harmoniques N, ce qui donne lieu en tout sur chaque transversale à $\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)$ points N. Si ensuite on assujettit la transversale à des conditions convenables, on obtiendra des courbes nouvelles, et de nouvelles propriétés de la base C^m. Toutefois je dois me borner ici à indiquer sommairement quelques résultats parmi les moins difficiles.

I. On peut demander que des m points d'intersection a, b, c, d, .., quatre soient en rapport harmonique. Cette condition donne lieu au théorème suivant :

Le lieu de la transversale S *qui coupe une courbe donnée du* m^e *degré* C^m *en quatre points harmoniques est une courbe de la* $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)(m-3)^e$ *classe*,

$$S^{\frac{1}{2}(m-1)(m-2)(m-3)},$$

qui touche la base en chacun de ses points d'inflexion avec $m - 3$ de ses branches, et en outre, si $m > 4$, en beaucoup d'autres points. Au moyen des quatre tangentes menées à la base par les quatre points d'intersection qui sont en rapport harmonique, on construit facilement le point de contact de chaque transversale S avec la courbe qui est le lieu de ces transversales. Problème : *Déterminer le degré de ce lieu.*

Conséquemment pour la base C^4, le lieu de la droite S qui coupe C^4 en quatre points harmoniques abcd sera une courbe de sixième classe S^6, qui touche la base dans ses vingt-quatre points d'inflexion.

Les $12.6 = 72$ tangentes communes aux deux courbes ne sont formées en conséquence que des vingt-quatre tangentes d'inflexion de la base, dont chacune est comptée trois fois. *La courbe S^6 est du trentième degré, conséquemment elle a en commun avec la base, outre les susdits vingt-quatre points de contact, soixante-douze autres points qui sont des points d'intersection ($a_0 = a$), et sa tangente S en chacun de ces points a coupé la base en quatre autres en a, en trois points b, c, d harmoniques par rapport à a, et tels que les tangentes correspondantes* B, C, D *se rencontrent en un même point p. Des courbes du dix-huitième degré peuvent passer par les soixante-douze points a_0 : quelle sera la position des soixante-douze points p?* Lorsque en particulier la base C^4 est formée de quatre droites A, B, C, D, la courbe S^6 se décompose dans les trois coniques harmoniques inscrites au quadrilatère ABCD. (Voyez *Développement systématique de la dépendance mutuelle des figures géométriques*, § XLIII.) On obtient pareillement des résultats particuliers si la base C^4 est composée de $C^2 + 2C^1$, ou de $C^2 + C_1^2$, ou de $C^3 + C^1$.

Pour la base C^5, le lieu dont il s'agit sera $= S^{30}$; cette courbe touche la base en chacun de ses quarante-cinq points d'inflexion avec deux de ses branches, et la touche, en outre, en cent soixante-cinq autres points a. Donc :

Une courbe quelconque du cinquième degré a, en général, cent soixante-cinq tangentes harmoniques telles, que le point de contact a et les trois points d'intersection b, c, d sont quatre points en rapport harmonique.

Pour la base C^m, on trouve de cette manière, outre les tangentes d'inflexion,

$$m(m-2)(m-3)(m-4)(m-36)$$

tangentes telles, que parmi les $m - 1$ points formés par le point de contact a, et les $m - 2$ points d'intersection b, c, d, ..., quatre sont en rapport harmonique; le cas où a serait un des quatre points harmoniques sera compté pour deux, de sorte que si l'on désigne par x le nombre des cas où a est un des quatre points harmoniques, et par y le nombre des cas où a n'en est pas, $2x + y$ sera égal au nombre qu'on vient de proposer. La base sera touchée par le lieu dont il s'agit, aux x points a. *Déterminer les nombres x et y.*

II. Si la base donnée C^4 est touchée par une tangente S au point a, et coupée par cette tangente aux points b et c, et si l'on prend les trois quatrièmes points harmo-

niques par rapport aux trois points a, b, c, soient

$$\alpha, \quad \beta, \quad \gamma,$$

de sorte que

$$abc\alpha, \quad abc\beta, \quad a\gamma bc$$

soient des systèmes harmoniques, alors :

Le lieu du point α sera une courbe du trente-deuxième degré qui a avec la base dans ses points d'inflexion des contacts du deuxième ordre et passe par les points de contact de ses tangentes doubles (*voir* la note de la page 328); et

Le lieu commun des deux points β et γ sera une courbe du soixante-quatrième degré, qui a avec la base en chacun de ses vingt-quatre points d'inflexion des contacts du deuxième ordre sur deux branches, et en chacun des cinquante-six points de contact de ses vingt-huit tangentes doubles un contact du premier ordre.

De là il suit que :

La courbe du quatrième degré C^4 a, en général, soixante-quatre tangentes telles, que l'un des deux points d'intersection b est le point milieu du segment compris entre l'autre point d'intersection c et le point de contact a (*comme dans le paragraphe précédent*, VI, α^0), *et que ces tangentes particulières sont parallèles aux asymptotes de ladite courbe du soixante-quatrième degré.*

Si la base donnée C^5 est touchée par une tangente S au point a, et coupée par cette tangente aux points b, c, d, et si l'on détermine les trois points δ, γ, β, de telle sorte que

$$ab\delta c, \quad ab\gamma d, \quad ac\beta d$$

soient des systèmes harmoniques, alors :

Le lieu commun des trois points β, γ, δ sera une courbe du degré x, qui a avec la base en chacun de ses quarante-cinq points d'inflexion des contacts du deuxième ordre sur deux branches, qui coupe la base dans les $165 . 3 = 495$ *points d'intersection* (b, c, d) *des susdites cent soixante-cinq tangentes harmoniques* (I) *et dans les deux cent quarante points de contact de ces cent vingt tangentes doubles, et qui, en outre, a avec ces tangentes doubles des contacts doubles. Chaque tangente de la base sur laquelle deux des trois points d'intersection b, c, d sont également distants du point de contact a, est parallèle à une asymptote du lieu dont il s'agit. Déterminer le degré x.*

III. Quatre points quelconques situés sur une droite a, b, c, d déterminent trois systèmes différents de quatre points, suivant les trois manières dont on peut les conjuguer deux à deux, savoir :

$$1^0. \quad ab \text{ et } cd; \qquad 2^0. \quad ad \text{ et } bc; \qquad 3^0. \quad ac \text{ et } bd.$$

J'ai appelé *points asymptotiques* les points qui sont harmoniques par rapport aux deux couples de chaque système; soient

$$x \text{ et } x', \quad y \text{ et } y', \quad z \text{ et } z',$$

de sorte que

$$axbx_1 \quad \text{et} \quad cxdx_1, \quad aydy_1 \quad \text{et} \quad bycy_1, \quad azcz_1 \quad \text{et} \quad bzdz$$

sont des systèmes harmoniques (*voir* Extrait II, § IV). J'ai appelé *hyperboliques* les deux premiers systèmes où les points asymptotiques sont réels, et *elliptique* le troisième où ils sont imaginaires.

Si l'on arrange par groupes de quatre les m points $a, b, c, d, \ldots$ que la base donnée C^m a en commun avec une transversale quelconque S, et si l'on détermine pour chaque groupe les trois couples de points asymptotiques

$$x \quad \text{et} \quad x_1, \quad y \quad \text{et} \quad y_1, \quad z \quad \text{et} \quad z_1,$$

on aura en tout

$$\tfrac{1}{8} m(m-1)(m-2)(m-3) = \mu \text{ couples},$$

ou

$$\tfrac{1}{4} m(m-1)(m-2)(m-3) = 2\mu \text{ points asymptotiques individuels};$$

chacun desquels soit désigné par X.

Si l'on fait pivoter la transversale S *autour d'un pôle* P *pris sur elle à volonté, les* 2μ *points* X *décriront conjointement une courbe du* $3\mu^{\text{ième}}$ *degré*,

$$X^{\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)},$$

qui a le pôle P *pour point* $\mu^{\text{iâp}}$, *etc.*

Il peut exister des transversales particulières $S_x (= S)$, telles qu'un point asymptotique coïncide avec un des m points d'intersection; par exemple, x pourra coïncider avec le point d'intersection e, de sorte que $aebx_1$ et $cedx_1$ soient des systèmes harmoniques, et que le système de quatre points déterminé par les deux couples ab et cd ait le point d'intersection e pour point asymptotique, ou que ces cinq points d'intersection soient en involution.

Le lieu de la transversale S_x *pour laquelle un des points asymptotiques* X *se trouve sur la base* C^m, *ou parmi les* m *points d'intersection de laquelle il y en a cinq qui sont en involution, est une courbe*

$$S_x^{\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)(m-3)}.$$

Relativement à toutes ces transversales S_x dont un point asymptotique x coïncide avec un point d'intersection e (mais non pas avec un point de contact) de la base, on peut poser la question : *Quel sera le lieu du point asymptotique* x_1 *conjugué au point* $x = e$? Ce lieu sera une courbe du $n^{\text{ième}}$ degré X^n; ses intersections avec la base détermineront les transversales *individuelles* S_{xx_1}, qui ont sur la base un couple de points asymptotiques conjugués x et x_1. La résolution de ce problème sera facilitée par la résolution préalable du problème suivant :

Déterminer le lieu de tous les quatrièmes points harmoniques z *conjugués sur chaque tangente* S *de la base* C^m *au point de contact* a *par rapport à tous les couples de deux points qu'on peut former des* $m-3$ *points d'intersection* $b, c, d, \ldots$

Note. J'observerai encore que je n'ai pas suffisamment démontré quelques-uns des théorèmes proposés dans ce Mémoire, de sorte qu'ils peuvent contenir des assertions erronées. Si cela était le cas, j'espère que la nouveauté et la difficulté des matières traitées me serviront d'excuse, eu égard surtout à la méthode synthétique que j'ai suivie. Notamment dans les trois derniers paragraphes, je me suis permis quelques conclusions hasardées, par exemple, pour obtenir le théorème (V, *d* du § II, Extrait III). Si ce théorème n'est pas généralement vrai, quelques-uns des théorèmes qui le précèdent ne seront pas non plus exacts dans toutes leurs parties.

IV.

ADDITION.

1. Nous avons observé ci-dessus (Extrait II, § III, II, note de la page 12) que les deux polaires A^2 et I^2 d'un même pôle P par rapport à la base donnée C^3 peuvent être des sections coniques de toute espèce selon la position du pôle relativement à la section conique E^2 spécifiée à l'endroit cité. En effet, ces sections coniques peuvent non-seulement être des ellipses, des hyperboles ou des paraboles, mais elles peuvent aussi prendre toutes les formes possibles de ces différentes espèces de sections coniques. Voici un examen plus détaillé de ces formes.

a Pour que les polaires A^2 *et* I^2 *puissent être des paraboles, il faut que le pôle* P *soit sur la courbe* E^2. (*b*) *Pour que* A^2 *et* I^2 *soient des hyperboles équilatères, il faut que le pôle soit sur une droite déterminée* H. (*c*) *Pour que* A^2 *et* I^2 *soient des cercles, il n'y a qu'un seul pôle* $P_0 (= P)$ *qui satisfasse, lequel sera en même temps le pôle de la droite* H *relativement à la section conique* E^2. (*d*) *Pour que* A^2 *et* I^2 *soient semblables à une section conique donnée quelconque* C^2, *il faut que le pôle* P *soit sur une conique* P^2 *qui a avec la conique* E^2 *un double contact (imaginaire), la droite* H *étant la corde de contact (idéale). Donc, si l'on donne à la section conique* C^2 *successivement toutes les formes différentes possibles, on obtiendra une série de lieux géométriques* P^2 *du pôle* P, *ou plutôt un faisceau* $B(P^2)$ *de coniques qui se touchent toutes aux mêmes deux points, qui ont la droite* H *pour corde de contact, et qui ont cette droite* H *et le pôle* P_0 *pour pôle et polaire. A ce faisceau appartiendront aussi, en particulier, la courbe* E^2, *la droite* H *et le pôle* P_0, *savoir* E^2 *comme correspondant à la transition des polaires* A^2 *et* I^2 *de l'hyperbole à l'ellipse, et* H *et* P_0 *comme déterminant respectivement la limite des hyperboles et des ellipses.*

Si la courbe donnée C^3 a trois asymptotes réelles A, B, C, on déterminera la droite H et le pôle P_0 comme il suit : Soient α, β, γ les pieds des perpendiculaires abaissées des trois sommets *a*, *b*, *c* du triangle ABC sur les côtés opposés A, B, C; les intersections des trois couples de droites $\alpha\beta$ et C, $\alpha\gamma$ et B, $\beta\gamma$ et A se trouveront sur la droite demandée H, ou bien cette droite sera aussi la ligne des puissances égales[*] des deux

[*] C'est le terme adopté par M. Steiner pour désigner l'axe radical.

cercles circonscrits aux triangles abc et $\alpha\beta\gamma$. Et si par les sommets du triangle abc on mène des tangentes au cercle circonscrit à ce triangle qui formeront un second triangle $a_1 b_1 c_1$, les trois droites aa_1, bb_1, cc_1 se rencontreront dans le pôle demandé P_0. Si, en particulier, le triangle des asymptotes ABC $= abc$ est *équilatéral*, donc si E^2 est le cercle inscrit à ce triangle, toutes les courbes du faisceau B (P^2) seront des cercles concentriques au cercle E^2 et ayant P_0 pour centre commun, tandis que la droite H sera G_∞.

Donc : *Dans une courbe du troisième degré dont les asymptotes forment un triangle équilatéral abc, les points de contact de chaque groupe de six tangentes parallèles se trouvent sur une hyperbole équilatère. Si d'un point du cercle circonscrit au triangle abc, on mène six tangentes à la courbe, les points de contact seront sur une hyperbole dont l'angle des asymptotes est égal à* 60 *degrés ; et si, du centre* P_0 *de ce cercle, on mène les six tangentes à la courbe, les points de contact seront sur un cercle.*

Quel doit être le triangle des asymptotes abc pour que le pôle P_0 soit un foyer de la conique E^2 (et, par conséquent, de toutes les coniques P^2) ?

Pour toutes les courbes du troisième degré ayant avec la courbe donnée les asymptotes communes (soit réelles, soit imaginaires), les courbes du faisceau B (P^2) resteront les mêmes. Cette propriété donne lieu à des conséquences ultérieures si l'on considère des formes particulières de courbes du troisième degré.

2. *Toutes les courbes du troisième degré qui passent par les sept points suivants d'un triangle donné, savoir : 1° le centre de gravité ; 2° les sommets ; 3° les points situés à l'infini sur les trois côtés, ont les triangles des asymptotes égaux et semblables entre eux, et semblables et semblablement placés au triangle donné, les côtés homologues étant dans le rapport de* 2 : 3.

Il existe un théorème analogue pour le polygone formé de m droites et les courbes du $m^{ième}$ degré. Par exemple, dans le quadrilatère complet, les courbes du quatrième degré devront passer par treize points donnés, savoir par les six sommets, par les points situés à l'infini sur les quatre côtés, et par trois points p déterminés de la manière suivante : En considérant les quatre côtés comme formant ensemble une base du quatrième degré $C^4 = 4\mathfrak{C}^1$, la courbe P^{10} (Extrait II, § IV) se décompose en trois sections coniques P^2 et les quatre droites données ; ces trois coniques passeront chacune par un des trois couples de sommets du quadrilatère, et se couperont deux à deux dans les points milieux des trois diagonales. Les trois points où se rencontrent, en outre, deux quelconques des trois coniques et par lesquels passe nécessairement aussi la troisième conique, sont les points p dont il s'agit, et représentent dans ce cas particulier, avec les six sommets du quadrilatère, les neuf pôles P_2 (Extrait II, § IV)

THÉORIE GÉNÉRALE

DES

EFFETS DYNAMIQUES DE LA CHALEUR.

PAR M. F. REECH,
Ingénieur de la Marine.

AVANT-PROPOS.

M. S. Carnot a publié en 1824 un ouvrage intitulé : *Réflexions sur la puissance motrice du feu*. On y trouve des considérations extrêmement remarquables sur la manière de produire de la force motrice avec de la chaleur. M. E. Clapeyron, dans un *Mémoire sur la puissance motrice de la chaleur* (*Journal de l'École Polytechnique*, tome XIV), année 1834, s'est attaché à développer les principales idées de M. Carnot par l'analyse mathématique, et en a fait ressortir des conséquences fort importantes.

Les calculs de M. Clapeyron et les raisonnements de M. Carnot sont fondés principalement sur l'*absurdité qu'il y aurait à admettre la possibilité de créer de toutes pièces de la force motrice ou de la chaleur*. La solidité d'un tel axiome ne saurait guère être révoquée en doute, mais des expériences dues à M. Regnault ont fait rejeter l'une des propriétés fondamentales que les auteurs, d'après les idées universellement admises jusqu'à eux, avaient attribuée à la chaleur, et, par suite, différents savants, tels que MM. Joule, Thompson, Rankine, Mayer et Clausius, se sont mis à l'œuvre pour redresser ce qu'il pouvait y avoir d'inexact dans les relations établies par MM. Carnot et Clapeyron.

Je crois que, dans la plupart des recherches faites à ce sujet, on a donné trop d'importance à de pures hypothèses, en perdant de vue la filiation logique des raisonnements de M. Carnot, qui n'a pas été rompue, selon moi, par l'objection de M. Regnault, et qui demandait seulement à être complétée sous un point de vue nouveau. C'est, du moins, là ce que je me propose de faire voir dans le présent Mémoire, aussi clairement qu'il me sera possible, et de manière, je l'espère, à démontrer une formule générale qui satisfera à la fois aux expériences de M. Joule et à celles que M. Regnault a annoncées dernièrement dans le *Compte rendu de l'Académie des Sciences* (séance du 18 avril 1853, tome XXXVI, page 680, premier exemple).

CHAPITRE PREMIER.

Curieux mode de raisonnement de M. S. Carnot, d'après l'existence directement évidente de deux systèmes de courbes $\varphi(v, p) = const.\ t$, $\psi(v, p) = const.\ u$, et avec l'hypothèse $q' = q$ relativement aux propriétés calorifiques les plus immédiates des deux systèmes de courbes φ, ψ.

Le commun point de départ de MM. Carnot et Clapeyron est fort simple et se réduit en substance à ce qui suit.

Pour que nous parvenions à nous procurer de la force motrice avec une machine à vapeur d'eau, il faut que, à l'état régulier de fonctionnement de la machine, nous ayons une production incessante de chaleur dans la chaudière pour faire de la vapeur, et un enlèvement incessant de chaleur dans le condenseur pour ramener la vapeur employée à l'état d'eau. Il faut qu'il y ait une transmission de chaleur de la chaudière au condenseur à travers le cylindre et les tuyaux de la machine par l'intermédiaire de la vapeur comme véhicule. En l'absence d'un tel véhicule, la chaleur passerait librement de la chaudière au condenseur ou à d'autres corps ambiants, sans nous faire obtenir de la force motrice.

Différentes espèces de vapeur et même des gaz permanents peuvent, d'ailleurs, être employés comme véhicule de la chaleur entre un corps chaud A′ et un corps froid A, de manière à nous faire obtenir de la force motrice à l'aide d'un mécanisme identique ou analogue à celui d'une machine à vapeur d'eau.

Donc, en principe, toutes les fois qu'il y aura une libre transmission de chaleur entre deux corps quelconques A, A′ à des températures différentes t, t', nous devrons y voir une certaine perte de travail ou de force vive.

La dénomination de force vive pourra, d'ailleurs, être entendue ici comme dans la mécanique ordinaire, en ce sens qu'elle désignera une diminution de force vive ou de travail, relativement au but que l'on aura en vue, et non une destruction ou perte absolue dans la vraie nature des choses.

Toujours est-il que, d'après ces raisonnements préliminaires de MM. Carnot et Clapeyron, une machine motrice à l'aide de la chaleur ne saurait être d'une entière perfection qu'autant que l'on parviendrait à n'y mettre jamais en présence des corps à des températures différentes.

Il faudrait, en un mot, que nous pussions nous procurer des enveloppes non perméables à la chaleur, et alors les conditions d'une machine motrice parfaite seraient très-faciles à assigner de la manière qui va être expliquée.

Concevons une masse quelconque de gaz dans une enveloppe extensible non perméable à la chaleur. Soient Ov, Op, *fig.* 1, *Pl. I*, deux axes rectangulaires sur lesquels nous porterons une abscisse OA égale en longueur au volume v, et une ordonnée AB égale à la pression p du gaz. La température correspondante t du gaz pourrait être portée sur une perpendiculaire au plan des v, p au point B; mais on fera aussi

bien de ne pas recourir à une telle construction et de concevoir seulement une quantité abstraite t en chaque point B dont les coordonnées seront v, p.

Cela posé, imaginons qu'on fasse diminuer le volume v de l'enveloppe sans ajouter ni ôter de la chaleur au gaz, et d'une manière assez lente pour n'imprimer que *des vitesses négligeables* aux différentes particules du gaz. Alors la pression p ira en augmentant le long d'un certain arc de courbe BB′, qui ne dépendra que de l'espèce de gaz employé.

La température t du gaz ira aussi en augmentant le long de la courbe BB′, et, par suite, le gaz s'échauffera, de t à t', à l'aide d'une dépense de travail égale à l'aire ABB′A′.

L'opération pourra être continuée aussi loin qu'on voudra de bas en haut sur la figure, tant que le gaz ne passera ni à l'état liquide ni à l'état solide.

Réciproquement, quand, à partir d'un point B′, on fera augmenter le volume v de l'enveloppe, toujours d'une manière infiniment lente pour ne pas créer des vitesses appréciables, et sans ajouter ni ôter de la chaleur, la pression p descendra le long de la courbe B′B, et la température t repassera dans chaque position descendante par la même valeur que celle qu'elle avait en montant.

Cela étant admis, et les variables v, p d'un gaz étant supposées avoir été amenées en un point quelconque B′ de la courbe indéfinie BB′, de manière que la température se trouve élevée de t à t', imaginons qu'une source indéfinie de chaleur A′, à la température constante t', soit mise en communication intime avec le gaz, et qu'ensuite l'on fasse augmenter le volume v, toujours d'une manière infiniment lente, afin de ne pas créer des vitesses appréciables.

Alors l'effet immédiat d'une augmentation du volume v sera de faire descendre la pression p le long de la courbe connue B′B; mais en même temps la température du gaz diminuera, et aussitôt qu'une petite différence se sera produite entre la température constante t' de la source A′ et la température du gaz adjacent, il y aura un flux de chaleur qui sortira de la source A′ et qui servira à faire remonter la température du gaz vers la constante t', ce qui augmentera la pression p.

L'augmentation du volume v se faisant avec une lenteur infiniment grande, il est clair que, à la dernière limite du raisonnement, on devra concevoir une certaine courbe $B'B'_1$ différente de B′B, et telle que la température du gaz restera constamment égale a t' pendant que la source A′ fournira une quantité de chaleur q' qui augmentera progressivement avec la longueur $B'B'_1$.

Réciproquement, quand on fera diminuer le volume v de l'enveloppe à partir du point B'_1, le premier effet d'une diminution du volume v sera de faire augmenter à la fois la pression et la température du gaz; puis, la température du gaz devenant plus élevée que celle de la source adjacente, il naîtra un flux de chaleur du gaz vers cette source, et, à la dernière limite du raisonnement, les variables v, p repasseront de B'_1 en B′ le long de la même courbe $B'B'_1$ pendant que le gaz cédera à la source A′ une quantité de chaleur q' précisément égale à celle qu'il en avait retirée d'abord.

Il y aura à concevoir une telle courbe $B'B'_1$ par chaque point B' de la courbe indéfinie BB', et l'une d'entre elles BB_1 passera au point B.

La température t devant être constante le long de chacune des courbes BB_1, $B'B'_1$,... et variable de l'une à l'autre, il s'ensuit que, du moment où la température t de l'une de ces courbes sera donnée, la courbe entière devra être parfaitement déterminée, et que, par suite, il y aura une certaine relation, telle que

$$\varphi(v, p) = t,$$

qui sera l'équation générale de toutes les courbes en question BB_1, $B'B'_1$,... sur la *fig.* 1.

Pareillement, il y aura à concevoir une courbe de l'espèce BB' par tels points B, B_1,... que l'on voudra, sur la *fig.* 1, et quand on désignera par u une quantité qui aura une valeur nécessairement déterminée pour chacune des courbes BB', $B_1B'_1$,... et essentiellement différente de l'une de ces courbes à l'autre, comme, par exemple, l'abscisse ou bien l'ordonnée du point où l'une de ces courbes rencontrera une ligne donnée quelconque sur la *fig.* 1, il est clair que chacune des courbes BB', $B_1B'_1$,... devra être parfaitement déterminée dès que la quantité u sera donnée, et que, par suite, il y aura une certaine relation, telle que

$$\psi(v, p) = u,$$

qui sera l'équation générale de toutes les courbes en question BB', $B_1B'_1$,... sur la *fig.* 1.

Cela posé, revenons au point B de la *fig.* 1 et faisons aller d'abord le gaz de B en B' le long de la courbe $\psi(v, p) =$ constante u, sans addition ni retranchement de chaleur, jusqu'à ce que la température ait monté de t à t', à l'aide d'une dépense de travail égale à l'aire $ABB'A'$.

A partir du point B' mettons le gaz en communication avec une source de chaleur A' à la température constante t', et faisons aller les variables v, p le long de la courbe $B'B'_1$ à l'aide d'une addition de chaleur q', ce qui nous fera obtenir une quantité de travail égale à l'aire $A'B'B'_1A'_1$.

A partir du point B'_1 retirons la source A' et faisons continuer la dilatation du gaz dans une enveloppe non perméable à la chaleur, le long d'une courbe B'_1B_1 ou $\psi(v, p) = u_1$, jusqu'à ce que la température du gaz, en diminuant progressivement le long de la courbe B'_1B_1, soit redevenue égale à t, au point de rencontre de la courbe B'_1B_1 avec la courbe BB' ou $\varphi(v, p) = t$, ce qui nous fera obtenir encore une quantité de travail égale à l'aire $A'_1B'_1B_1A_1$.

A partir du point B_1 mettons le gaz en communication avec une source de chaleur A entretenue à température constante t pendant que le volume v de l'enveloppe ira en diminuant.

Alors le premier effet d'une diminution du volume v sera de faire remonter la pression ainsi que la température le long de la courbe $B_1B'_1$; mais, aussitôt que la température sera devenue un peu plus élevée que la limite constante t de la source adjacente, il s'établira un flux de chaleur du gaz vers la source A, et, à la dernière limite du raisonnement, les variables v, p iront du point B_1 au point initial B le long de la courbe B_1B

dont l'équation sera

$$\varphi(v, p) = t.$$

De B_1 en B le gaz cédera à la source A une somme de chaleur q et l'on dépensera une quantité de travail égale à l'aire $A_1 B_1 BA$. Par suite, le gaz employé sera exactement ramené à son état initial, et il restera un bénéfice net de force motrice égal à l'aire S du quadrilatère curviligne $BB'B'_1B$. Le fait physique auquel correspondra la quantité S de force motrice sera une diminution de chaleur q' dans la source A' à la température constante t', et une augmentation de chaleur q dans la source A entretenue à la température constante t.

Dans le cercle entier de l'opération, il n'y aura eu aucune transmission de chaleur entre des corps à des températures différentes, et, par suite, l'on doit admettre qu'il n'aura pu y avoir aucune perte ou diminution de force motrice; la quantité obtenue S devra donc être conçue comme étant le maximum théoriquement possible avec les deux quantités de chaleur q, q' aux températures données t, t' des sources A, A'.

Ce qui le prouve péremptoirement, c'est que l'opération inverse sera également possible, et que, en faisant aller les variables v, p d'abord de B en B_1 le long de la courbe BB_1, et de là en B'_1 le long de la courbe $B_1B'_1$, puis de B'_1 en B' le long de la courbe B'_1B', et de là en B le long de la courbe $B'B$, on réussira manifestement à enlever la somme de chaleur q à la source A et à verser la somme correspondante q' dans la source A', avec une dépense de travail égale à la même aire S du quadrilatère curviligne $BB'B'_1B_1$.

Au point de vue pratique des choses, on ne réussirait, à la vérité, à recueillir dans l'opération directe qu'une quantité de force motrice un peu inférieure à l'aire S de la *fig.* 1, et dans l'opération inverse on serait obligé de dépenser une quantité un peu supérieure à S; mais on comprend en même temps que les deux différences de sens opposés peuvent devenir moindres qu'aucune quantité donnée, et qu'il doit y avoir une limite rationnelle de parfaite équivalence entre l'une et l'autre opération, de la manière qui vient d'être expliquée et représentée sur la *fig.* 1.

Tous les mêmes raisonnements seront applicables à un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, à cela près que les courbes BB_1, $B'B'_1$ deviendront des lignes droites parallèles à l'axe Ov, *fig.* 2, parce qu'alors les relations

$$\varphi(v, p) = t, \quad \varphi(v, p) = t'$$

se changeront en

$$\varphi(p) = t, \quad \varphi(p') = t',$$

ou, inversement,

$$p = \Omega(t), \quad p' = \Omega(t').$$

Concevons, en effet, une masse liquide M à une température donnée t et sous la pression d'ébullition $p = \Omega(t)$ représentée par la hauteur OP sur la *fig.* 2. Soit Pi le volume correspondant de la masse liquide M.

Mettons la masse M en contact avec un corps plus chaud, de manière à en élever la température progressivement jusqu'à t', et, pour qu'il ne se fasse pas de vapeur, éle-

vons à mesure la pression p d'après la relation générale $p = \Omega(t$ supposée connue par expérience. Le volume de la masse M augmentera alors très-lentement avec t et pourra être représenté par l'abscisse variable ω d'une certaine ligne ii' presque droite et presque parallèle à l'axe Op.

A partir du point i', où la pression sera p' et la température correspondante d'ébullition t', faisons augmenter le volume v de l'enveloppe pendant qu'une source indéfinie de chaleur s'y trouvera renfermée à une température constante t': alors une partie de la masse liquide se transformera en vapeur et la pression ne changera pas, c'est-à-dire que les variables v, p du mélange iront le long d'une droite $i'I'$ parallèle à l'axe Ov.

Il y aura un certain point I' où toute la masse M sera transformée en vapeur saturée, et, au dela, si l'on continuait à faire augmenter le volume v de l'enveloppe au contact d'une source de chaleur entretenue à la température constante t', les variables v, p suivraient une courbe descendante de l'espèce B'B, *fig.* 1.

Il y aura une telle longueur limite PI ou W à toutes les hauteurs p de la *fig.* 2, et, par suite, l'on aura à concevoir une certaine courbe II' qui fera la limite de séparation de l'état de vapeur saturée à l'état de gaz permanent.

On sait que pour de la vapeur d'eau, à 100 degrés, la limite P'I' est égale à dix-sept cents fois environ l'une des limites Pi, $P'i'$ de l'état liquide, et que, à 50 degrés de température, avec une pression de 10 centimètres de mercure à peu près, la limite PI est égale à huit ou neuf fois la limite P'I'; mais de pareilles proportions n'auraient pu être indiquées sur la *fig.* 2 sans la rendre inintelligible dans quelques-unes de ses parties.

Cela posé, représentons-nous un volume P'B' du mélange à la température t' et faisons augmenter le volume de l'enveloppe, au contact de la source A', jusqu'à une longueur arbitraire $P'B'_1$ inférieure à la limite P'I'; désignons par q' la quantité de chaleur enlevée à la source A' et devenue latente.

A partir du point B'_1, ôtons la source de chaleur A' et continuons à faire augmenter le volume v sans ajouter ni retrancher de la chaleur, ce qui fera diminuer à la fois la pression et la température du mélange le long d'une certaine courbe B'_1B_1 de même espèce que sur la *fig.* 1.

A partir du point B_1, supposé en deçà de la limite I, la température du mélange étant devenue t, approchons-en une source indéfinie de chaleur entretenue à la température constante t et faisons diminuer le volume v du mélange jusqu'à la rencontre d'une courbe B'B de même espèce que la courbe B'_1B_1 et passant par le point initial B'. Nous exprimerons, de cette manière, du mélange de liquide et de vapeur, une certaine somme de chaleur q qui passera dans la source A à la température constante t; puis, en ôtant la source A à partir du point B et en continuant à faire diminuer le volume du mélange sans ajouter ni retrancher de la chaleur, nous arriverons au point initial B' le long de la courbe BB'.

Nous réussirons donc à ramener le mélange de liquide et de vapeur saturée exactement à son état initial et à obtenir un bénéfice net de force motrice égal à l'aire S du

quadrilatère $BB'B'_1B_1$, tandis qu'une certaine somme de chaleur q' aura disparu de la source A′ et qu'une autre somme de chaleur q aura passé dans la source A.

L'opération inverse sera également possible, c'est-à-dire que, avec une dépense de force motrice égale à la même aire S, nous pourrions enlever une somme de chaleur q de la source A et verser la somme correspondante q' dans la source A′.

Ainsi, aucune perte n'aura lieu et l'aire S du quadrilatère $BB'B'_1B_1$, sur la *fig.* 2 comme sur la *fig.* 1, sera le parfait équivalent mécanique du fait physique qui consistera à prendre, à l'aide d'un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, une somme de chaleur q' dans la source A′ entretenue à la température constante t', et à faire passer une somme de chaleur q dans la source A entretenue à la température constante t, la température t étant moindre que t'.

L'aire S perdrait sa forme quadrilatérale sur la *fig.* 2 si la courbe B′B tombait en deçà de la limite i'K et aussi si la courbe $B_1B'_1$ rencontrait la limite II′ sans se confondre avec elle. Je reviendrai plus loin sur de telles exceptions [*].

Cela posé, le tort qu'on reproche à MM. Carnot et Clapeyron, c'est d'avoir supposé que, sur les *fig.* 1 et 2, on devait avoir $q' = q$.

(*) S'il était question de faire la théorie spéciale des machines à vapeur d'eau, j'aurais à expliquer ici comment les opérations de principe de la *fig.* 2, à l'aide d'une seule enveloppe à volume variable v, ne sauraient être rendues matériellement possibles et pratiquement utiles qu'à l'aide de deux cylindres, le *cylindre travailleur* et le *cylindre alimentaire*, reliés entre eux, d'une part, par un réservoir d'eau et de vapeur à la température élevée t' (la *chaudière*), d'autre part, par un réservoir d'eau et de vapeur à la température basse t (le *condenseur*); j'aurais à expliquer le jeu des soupapes ou robinets à l'aide desquels un tel mécanisme à deux cylindres et à deux réservoirs (nommés *chaudière* l'un, et *condenseur* l'autre) pourra réellement faire l'office de l'unique enveloppe des raisonnements du texte.

J'aurais à expliquer ensuite l'inconvénient pratique d'être obligé de prendre avec le cylindre alimentaire un volume énorme d'eau et de vapeur PB ou PK, dans le condenseur, afin de renvoyer dans la chaudière un volume correspondant P′B′ d'eau et de vapeur, ou un volume P′i' d'eau seulement à la température élevée t', conformément au principe général d'éviter la mise en présence de deux corps à des températures différentes.

A côté de cet inconvénient, j'aurais à signaler le grand avantage pratique de n'alimenter la chaudière qu'avec de l'eau, quoique froide, à cause de la petitesse qui en proviendra dans le volume du cylindre alimentaire.

J'aurais à faire valoir encore l'avantage pratique d'une injection d'eau froide dans le condenseur et l'impossibilité d'éviter des infiltrations d'air, ce qui obligera d'avoir à la fois une petite pompe alimentaire et une pompe à air un peu volumineuse, en place de l'unique cylindre alimentaire des précédents raisonnements.

J'aurais à parler, enfin, des frottements du mécanisme qui empêcheront de réaliser toute la force expansive de la vapeur, indépendamment de l'inconvénient d'avoir des machines trop encombrantes quand on veut avoir plus de force motrice expansive, etc., etc.

Il y aurait des considérations plus ou moins analogues à faire valoir sur la *fig.* 1 pour le cas des machines à air chaud; mais tout cela me mènerait beaucoup trop loin et ferait perdre de vue la filiation logique des vrais principes de la théorie que je me propose de fonder.

Ce que je viens d'énumérer très-succinctement dans cette note fera l'objet d'un autre Mémoire qui servira de complément à celui-ci et dont la rédaction est à peu près terminée. Je veux parler du travail dont les conclusions ont été publiées dans le feuilleton du *Moniteur* du 16 mars 1853, et à l'occasion duquel j'ai présenté une Note à l'Institut, dans la séance du 21 mars suivant.

L'égalité $q' = q$ peut certainement être contestée; mais voyons d'abord ce que l'on peut démontrer rigoureusement quand on se place à tort ou à raison à un tel point de vue, sauf à voir ensuite ce que pourra entraîner une inégalité quelconque entre les deux quantités correspondantes q, q'.

Avec l'égalité $q' = q$ la quantité de force motrice S des *fig.* 1 et 2 sera le parfait équivalent mécanique d'une somme de chaleur q descendue de la température t' de la source A′ à la température inférieure t de la source A.

Tout autre gaz que celui de la *fig.* 1 et tout autre mélange de liquide et de vapeur que celui de la *fig.* 2 pourront être employés de manière à faire descendre une même somme de chaleur q de la même source A′ à la même source A, et alors les quantités q, t, t' étant les mêmes pour différents fluides élastiques, il faudra que les quantités correspondantes de force motrice que l'on obtiendra de l'emploi de ces fluides,

$$S, \quad S_1, \quad S_2, \ldots,$$

soient toutes égales; car si, avec un certain fluide élastique, on obtenait une quantité S, et que, avec un autre fluide élastique, il fût possible d'obtenir une quantité plus considérable $S + s$, les deux fluides étant employés à faire descendre successivement une égale somme de chaleur q de la même température t' à la même température t, nous serions parfaitement libre d'employer le second fluide à faire descendre une somme de chaleur q de t' à t, de manière à obtenir la quantité de force motrice $S + s$, puis d'employer le premier fluide à faire remonter la même somme de chaleur q de t en t' avec une dépense de force motrice égale à S, ce qui nous laisserait un bénéfice net, sans cause, égal à s.

Puis, en répétant la double opération n fois de suite, nous obtiendrons la quantité ns qui croîtrait sans limite avec n, c'est-à-dire que, avec rien et après avoir ramené toutes choses dans leur état initial, il nous serait loisible de créer autant de force motrice que nous voudrions; *ce qui est absurde*.

Telle est l'idée mère ou l'axiome fondamental des raisonnements de MM. Carnot et Clapeyron.

D'après cet axiome, il devra y avoir une relation directe entre la quantité de force motrice S, d'une part, et les quantités correspondantes q, t, t', d'autre part, indépendamment de la nature du fluide élastique qui aura servi à l'opération.

De plus, entre les mêmes températures t, t' il faudra que la quantité S augmente proportionnellement à q, afin que par n opérations successives, toutes identiques, la quantité totale nS soit précisément la même que celle que l'on obtiendrait d'une seule opération sur une quantité de chaleur égale à nq.

Il faudra, en un mot, que l'on ait

$$S = q f(t, t'),$$

la fonction f étant complétement indépendante de la nature du fluide élastique que l'on voudra employer.

Mais cela ne suffira pas, car on sera libre encore d'opérer séparément de t à t',

puis de t_1 à t_2, de t_2 à t_3, ..., et, enfin, de t_{n-1} à t_n, ce qui fera avoir les quantités successives

$$S_0 = q f(t_0, t_1),$$
$$S_1 = q f(t_1, t_2),$$
$$S_2 = q f(t_2, t_3),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$S_n = q f(t_{n-1}, t_n),$$

dont la somme devra être la même que si l'on opérait d'un seul coup de t_0 à t_n sur la même somme de chaleur q. Il faudra donc que la fonction universelle $f(t, t')$ soit de telle nature que l'on ait

$$f(t_0, t_n) = f(t_0, t_1) + f(t_1, t_2) + f(t_2, t_3) + \ldots + f(t_{n-1}, t_n),$$

quelque grandes ou petites que puissent être les différences consécutives de t_0 à t_1, de t_1 à t_2, ..., t_{n-1} à t_n, et cela exigera manifestement que la fonction $f(t_0, t_n)$ soit une intégrale définie de t_0 à t_n.

Ainsi, en désignant par C une certaine fonction de la température t commune à tous les fluides élastiques de la nature, il faudra que l'on ait

$$(a) \qquad S = q \int_{t_0}^{t} \frac{dt}{C},$$

et, quand il n'y aura qu'une distance infiniment petite entre les courbes BB_1, $B'B'_1$, comme aussi entre les courbes BB', $B_1B'_1$, l'on devra écrire

$$(a') \qquad dS = \frac{dq\,dt}{C}.$$

D'autre part, on a vu que les équations des courbes BB_1, $B'B'_1$ étaient respectivement

$$\varphi(v, p) = t, \quad \varphi(v, p) = t',$$

et celles des courbes BB', $B_1B'_1$,

$$\psi(v, p) = u, \quad \psi(v, p) = u_1.$$

Dès lors, en faisant

$$t' = t + dt, \quad u_1 = u + du,$$

il ne sera pas difficile de trouver l'expression du quadrilatère infiniment petit $BB'B'_1B_1$ des *fig.* 1 et 2 sous la forme

$$(b) \qquad dS = \frac{du\,dt}{\dfrac{d\varphi}{dv}\dfrac{d\psi}{dp} - \dfrac{d\psi}{dp}\dfrac{d\varphi}{dv}},$$

et, en identifiant cette expression purement géométrique de la différentielle dS avec le second membre de la formule (a'), il faudra que l'on ait, pour tel fluide élastique

que l'on voudra,

$$(c) \qquad \frac{du\,dt}{\frac{d\psi}{dv}\frac{d\varphi}{dp} - \frac{d\psi}{dp}\frac{d\varphi}{dv}} = \frac{dq\,dt}{C}.$$

Il est d'ailleurs évident que, avec l'égalité supposée $q' = q$, entre deux courbes données BB′, $B_1B'_1$, quelles que soient les températures t, t', c'est-à-dire quelles que soient les deux courbes correspondantes BB_1, $B'B'_1$, il devra y avoir une certaine fonction $F(u)$, telle que l'on aura

$$q' = q = F(u_1) - F(u),$$

et que, par suite, en posant

$$(d) \qquad f(u) = \frac{dF(u)}{du},$$

on aura

$$q' = q = \int_{u_1}^{u} f(u)\,du,$$

$$dq = f(u)\,du.$$

Il est évident encore que, la fonction f étant supposée donnée, la fonction ψ pourra toujours être transformée en une expression équivalente

$$F(\psi(v, p)) = F(u),$$

telle que, en désignant ensuite le premier membre de cette autre expression par $\psi(v, p)$, on aura simplement

$$(d') \qquad dq = du,$$

et, par suite, la relation universelle

$$(e) \qquad C = \frac{d\psi}{dv}\frac{d\varphi}{dp} - \frac{d\psi}{dp}\frac{d\varphi}{dv}.$$

Quand il s'agira spécialement d'un gaz, la fonction générale

$$\varphi(v, p) = t$$

prendra, en vertu de la loi de Mariotte, la forme spéciale

$$\varphi(v \times p) = t,$$

et, quand on admettra, en outre, la loi de Gay-Lussac, on trouvera

$$\frac{v_0 p_0}{1 + \alpha t_0} = \frac{v p}{1 + \alpha t},$$

les lettres v_0, p_0, t_0 servant à désigner les valeurs particulières des variables v, p, t dans un état donné du gaz.

On tire de là

$$t = \frac{1 + \alpha t_0}{\alpha v_0 p_0} vp - \frac{1}{\alpha}.$$

c_1, en posant

$$\frac{1 + \alpha t_1}{\alpha c p_1} = \frac{1}{R},$$

on aura

$$\varphi(v, p) = \frac{cp}{R} - \text{constante};$$

par suite,

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{p}{R}, \quad \frac{d\varphi}{dp} = \frac{v}{R}.$$

et la condition (c) deviendra

$$(e) \qquad v\frac{d\psi}{dv} - p\frac{d\psi}{dp} = RC.$$

C'est l'équation que M. Clapeyron a trouvée à la page 167 de son Mémoire sous la forme

$$v\frac{dQ}{dv} - p\frac{dQ}{dp} = F(vp),$$

en observant que, puisque la quantité C était une fonction de t, le produit RC pouvait être représenté par une certaine fonction F du produit vp.

M. Clapeyron en a obtenu l'intégrale sous la forme

$$(f) \qquad Q = R(B - C\log pv).$$

Quand il s'agira spécialement d'un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, la fonction générale

$$\varphi(v, p) = t$$

se réduira à

$$\varphi(p) = t \quad \text{ou} \quad p = \Omega(t);$$

par suite, on aura

$$\frac{d\varphi}{dv} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dp} = \frac{1}{\left(\frac{dp}{dt}\right)}$$

et la condition (e) se réduira à

$$(e) \qquad C\frac{dp}{dt} = \frac{d\psi}{dv}.$$

M. Clapeyron a fait voir, en outre, comment la dérivée partielle $\frac{d\psi}{dv}$ pouvait être exprimée en fonction de la quantité de chaleur latente de la vapeur par unité de volume (page 175), et il est parvenu, enfin, à déterminer les valeurs numériques de la quantité C pour cinq températures différentes de 0 à 150 degrés.

Il est d'ailleurs évident que, à ce point de vue, il y aurait une certaine échelle thermométrique au moyen de laquelle on trouverait pour tous les fluides élastiques,

$$C = \text{constante}$$

CHAPITRE II.

Établissement de la relation universelle $S = q'\Gamma(t') - q\Gamma(t) = \int_t^{t'} \frac{d}{dt}\{q\Gamma(t)\}dt$, *d'après un mode de raisonnement analogue à celui de M. S. Carnot, sans que l'on préjuge rien de l'égalité ou de l'inégalité des quantités de chaleur* q, q'. — *Des raisons à faire valoir pour et contre la relation* $\Gamma(t) = \text{constante}$. — *C'est peut-être de la fonction* $\Gamma(t)$ *que dépendra la transition à établir un jour des effets purement calorifiques aux effets lumineux et électriques des corps.*

Je reviens maintenant au point précis des raisonnements de MM. Carnot et Clapeyron, où il a été fait usage de l'égalité $q' = q$, et je suppose, à tort ou à raison, que l'on doive avoir

$$q' > q \quad \text{ou même} \quad q' \gg q$$

sur les *fig.* 1 et 2.

Je continue à désigner par S la quantité de force motrice théoriquement possible à l'aide d'un certain fluide élastique qu'on emploiera à prendre une somme de chaleur q' dans la source A′ à la température t' et à verser une autre somme de chaleur q dans la source A à la température t.

Je désigne par S_1 la quantité de force motrice théoriquement possible à l'aide de quelque autre fluide élastique qui servira à prendre une somme de chaleur q'_1 dans la même source A′ à la même température t' et à verser une autre somme de chaleur q_1 dans la même source A à la même température t.

Je serai libre, évidemment, de procéder à n opérations directes avec le premier fluide et à n_1 opérations inverses avec le second fluide, ce qui me procurera un bénéfice net de force motrice égal à la différence (positive ou négative),

$$(\alpha) \qquad nS - n_1 S_1.$$

Il arrivera en même temps que de la source A′ je ferai sortir une quantité de chaleur égale à la différence

$$(\beta) \qquad nq' - n_1 q'_1,$$

tandis que de la source A je ferai *sortir* une quantité de chaleur égale à la différence

$$(\gamma) \qquad n_1 q_1 - nq.$$

Cela posé, comme les nombres n, n_1 seront complètement arbitraires, et que, d'autre part, les quantités q, q_1 pourront être choisies à dessein, de manière à se trouver représentées par des nombres entiers, il est clair que les opérations pourront tou

jours être conduites de manière que l'on aura spécialement

$$n_1 q_1 - nq = 0.$$

Si l'on désigne par N un multiple quelconque des deux nombres entiers q, q_1, on n'aura qu'à faire

$$n = \frac{N}{q}, \quad n_1 = \frac{N}{q_1},$$

pour que le but soit atteint, c'est-à-dire pour qu'on réussisse à ne rien changer finalement dans la source A et à produire deux choses seulement, à savoir : d'une part, un bénéfice de force motrice représenté par la différence $n\mathrm{S} - n_1\mathrm{S}_1$, laquelle, à raison des valeurs précédentes de n, n_1, se réduira à

$$\mathrm{N}\left(\frac{\mathrm{S}}{q} - \frac{\mathrm{S}_1}{q_1}\right);$$

et, d'autre part, une perte résultante de chaleur dans la source A′ égale à la différence $nq' - n_1 q'_1$, laquelle, à raison des mêmes valeurs de n, n_1, se réduira à

$$\mathrm{N}\left(\frac{q'}{q} - \frac{q'_1}{q_1}\right).$$

Donc, à ce point de vue, quand on rejettera les égalités $q' = q$, $q'_1 = q_1$, de la force motrice pourra être produite par le seul fait d'une perte de chaleur dans la source A′ ; ou réciproquement, avec une dépense de force motrice, on pourra produire une augmentation de chaleur dans la source A′, et pour qu'il n'y ait pas d'absurdité en cela, il faudra que le rapport de l'un à l'autre effet soit le même pour tous les gaz et pour toutes les vapeurs indistinctement, sans quoi l'on ferait de suite le mouvement perpétuel.

De plus, le rapport en question ne pourra dépendre que de la température t' de la source A′, parce qu'aucun changement n'aura été produit finalement dans la source A, et que le même résultat eût pu être obtenu à l'aide d'une autre source A″ à une température t'' différente de t.

Il s'ensuit donc que l'on devra avoir

$$(\delta) \qquad \frac{\dfrac{\mathrm{S}}{q} - \dfrac{\mathrm{S}_1}{q_1}}{\dfrac{q'}{q} - \dfrac{q'_1}{q_1}} = \Gamma(t'),$$

la lettre Γ servant à désigner une certaine fonction de la température qui devra être la même pour tous les fluides élastiques de la nature.

Je recommence maintenant, et, au lieu de m'astreindre à des opérations telles, qu'il en provienne la relation

$$n_1 q_1 - nq = 0,$$

je choisis à dessein des nombres entiers pour les quantités q', q'_1, et je pose

$$nq' - n_1 q'_1 = 0,$$

ce qui reviendra à faire

$$n = \frac{N}{q'}, \quad n_1 = \frac{N_1}{q'_1}.$$

de manière à annuler finalement tout échange de chaleur avec la source A′ et à ne laisser subsister que deux choses, à savoir, d'une part, un bénéfice de force motrice représenté par la différence $nS - n_1 S_1$, qui, d'après les valeurs actuelles des nombres entiers n, n_1, se réduira à

$$N_1\left(\frac{S}{q'} - \frac{S_1}{q'_1}\right),$$

et, d'autre part, une perte de chaleur dans la source A égale à la différence $n_1 q_1 - nq$, qui, d'après les mêmes valeurs de n, n_1, se réduira à

$$N_1\left(\frac{q_1}{q'_1} - \frac{q}{q'}\right).$$

Donc, à ce point de vue, le seul fait d'une perte de chaleur dans la source A entraînera une production de force motrice; ou réciproquement, le seul fait d'une dépense de force motrice entraînera une augmentation de chaleur dans la source A, et, pour qu'il n'y eût pas d'absurdité en cela, il faudra que le rapport de l'un à l'autre effet soit le même pour tous les fluides élastiques de la nature, sans quoi l'on ferait le mouvement perpétuel.

De plus, le rapport en question ne pourra dépendre que de la température t de la source A, et la fonction de t propre à exprimer un tel rapport devra se confondre identiquement avec la fonction Γ de l'équation (δ) quand on y fera $t' = t$. Ce sera donc la même fonction, et l'on aura

$$\frac{\dfrac{S}{q'} - \dfrac{S}{q}}{\dfrac{q}{q'} - \dfrac{q}{q'}} = \Gamma(t).$$

Or, maintenant, des équations (δ), (ε) on tirera, par voie d'élimination,

$$S = q'\Gamma(t') - q\Gamma(t),$$
$$S = q'_1\Gamma(t'_1) - q_1\Gamma(t_1),$$

c'est-à-dire que, en principe, la formule de MM. Carnot et Clapeyron, qui était

$$S = q\int_{t_1}^{t} \frac{dt}{C}.$$

devra être remplacée par la formule un peu plus générale

$$(3)\qquad q'\Gamma(t') - q\Gamma(t) = \int_t^{t'} \frac{d}{dt}\{q\Gamma(t)\}\,dt$$

qui se réduirait précisément à l'autre, si l'expérience nous faisait trouver $q' = q$, et de laquelle, au contraire, nous tirerions

$$S = G(q' - q),$$

si l'expérience ou le raisonnement nous faisaient trouver

$$\Gamma(t) = \text{constante } G.$$

Il y a à faire remarquer que je suis parvenu à la formule (3) sans faire aucune hypothèse sur la nature intime de la chaleur dans le volume des fluides élastiques. La formule (3) sera donc le pivot fondamental de la théorie des effets dynamiques de la chaleur; ce sera une relation supérieure qui dominera à la fois la théorie de M. Carnot et les théories plus récentes de quelques autres physiciens.

Par le mode de raisonnement que j'ai suivi, en me laissant aller au cours naturel des idées dans la voie ouverte par M. Carnot, la formule (3) est devenue du premier coup aussi complète que la formule (a), après trois raisonnements consécutifs; car, en supposant que l'on veuille imaginer maintenant une série de sources auxiliaires à des températures quelconques $t_0, t_1, t_2, t_3, \ldots, t_{n-1}, t_n$, perdant et recevant successivement les unes après les autres les quantités de chaleur $q_0, q_1, q_2, q_3, \ldots, q_{n-1}, q_n$, sans qu'il reste ni excédant ni déficit dans aucune des sources intermédiaires

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3, \ldots,\quad A_{n-1},$$

l'on trouvera, par la formule (3), les quantités de force motrice partielles

$$\begin{aligned}
&q_1\Gamma(t_1) - q_0\Gamma(t_0),\\
&q_2\Gamma(t_2) - q_1\Gamma(t_1),\\
&q_3\Gamma(t_3) - q_2\Gamma(t_2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&q_n\Gamma(t_n) - q_{n-1}\Gamma(t_{n-1}),
\end{aligned}$$

dont la somme se réduira précisément à la différence

$$q_n\Gamma(t_n) - q_0\Gamma(t_0),$$

que la même formule (3) fera trouver pour une seule opération de t_0 à t_n, ou inversement de t_n à t_0. Cette propriété vient de ce que le second membre de la formule (3) a pris de suite la forme d'une intégrale définie de t à t'.

On a encore identiquement

$$(3\ bis)\qquad \begin{aligned} S &= q'\Gamma(t') - q\Gamma(t) = q'\{\Gamma(t') - \Gamma(t)\} + (q' - q)\Gamma(t)\\ &= (q' - q)\Gamma(t') + q\{\Gamma(t') - \Gamma(t)\}.\end{aligned}$$

et par là on voit que, sans rien préjuger de l'égalité ou de l'inégalité des quantités de chaleur q, q', échangées entre une source A à la température t, et une autre source A′ à la température t', la quantité de force motrice théoriquement possible pourra toujours être calculée de trois manières exactement équivalentes qui se réduiront à ce qui suit.

De l'une des manières, on calculera comme si la quantité de chaleur q', enlevée à la source A′ à la température t', était transmise intégralement à la source A à la température t, et qu'ensuite, dans cette dernière source, il y eût une extinction de chaleur égale à la différence $q' - q$.

De l'autre manière, on calculera comme si la différence $q' - q$ était détruite préalablement dans la source A′ à la température t', et que, ensuite, la quantité de chaleur restante q fût transportée intégralement de la température t' à la température t.

De la troisième manière, enfin, on calculera comme si la quantité de chaleur q', enlevée à la source A′ à la température t', était détruite intégralement dans cette source, et qu'ultérieurement une quantité de chaleur q fût reproduite intégralement dans la source A à la température t.

Mais cette triple interprétation s'évanouirait si l'on avait

$$(t' - t) = \text{constante } G,$$

et, par suite, la relation unique

$$S = (q' - q) G.$$

Avant de faire valoir des motifs pour ou contre la relation

$$(t' - t) = \text{constante},$$

il me reste à faire remarquer que le mode de démonstration de la formule (3), au moyen des formules (δ), (ε), deviendrait illusoire si les quantités q, q' de l'un des fluides élastiques étaient proportionnelles aux quantités correspondantes q_1, q'_1 de l'autre fluide élastique, c'est-à-dire si l'on avait l'égalité

$$\frac{q'}{q} = \frac{q'_1}{q_1},$$

parce que, dans ce cas-là, les dénominateurs des formules (δ), (ε) deviendraient nuls, et que, par suite, les deux formules se réduiraient à la relation unique

$$\frac{S}{S_1} = \frac{q}{q_1} = \frac{q'}{q'_1},$$

de laquelle on ne pourrait plus tirer la formule (3).

Mais, d'abord, si la relation (ζ) ne se présentait qu'exceptionnellement dans le cours des opérations qui ont été décrites, on n'aurait qu'à procéder à ces opérations avec d'autres courbes BB′, $B_1B'_1$ sur les *fig.* 1 et 2, ou employer d'autres fluides élastiques, et pourvu qu'il existât un seul fluide dans la nature qui, étant employé successivement avec tous les autres, ne fît pas avoir la relation (ζ), il est clair que l'on réussirait en-

cote à démontrer la formule (3) au moyen des formules (δ), (ε) pour tous les gaz et pour toutes les vapeurs indistinctement.

Ainsi, le mode de démonstration de la formule (3) ne saurait être en défaut que dans le cas unique où, pour tous les fluides élastiques de la nature et pour tous les systèmes de courbes BB′, $B_1B'_1$ de chacun de ces fluides sur nos *fig.* 1 et 2, l'on aurait universellement la relation (ζ).

Or, à la seule inspection des *fig.* 1 et 2, l'on comprendra avec une parfaite évidence que, pour deux courbes données BB′, $B_1B'_1$ d'un fluide élastique déterminé, il y aura toujours une certaine fonction de la température, telle que l'on pourra écrire

$$q = f(t), \quad q' = f(t');$$

puis, pour d'autres courbes BB′, $B_1B'_1$ du même fluide, ou d'un fluide différent, on devra poser

$$q_1 = f_1(t), \quad q'_1 = f_1(t'),$$

la fonction f_1 pouvant généralement être différente de f.

Cela étant, on trouvera

$$\frac{q'}{q} = \frac{f(t')}{f(t)}, \quad \frac{q'_1}{q_1} = \frac{f_1(t')}{f_1(t)}.$$

et pour que la relation (ζ) puisse avoir lieu universellement, il faudra que les fonctions f, f_1 soient telles, qu'en désignant par K, K_1 deux constantes arbitraires, et par $\eta(t)$ une même fonction de la température t pour tous les fluides élastiques de la nature, l'on ait

$$f(t) = K\eta(t), \quad f_1(t) = K_1\eta(t).$$

Il faudra, en un mot, que l'on ait

$$(\theta) \quad \left\{ \begin{array}{l} q = K\eta(t), \quad q' = K\eta(t') \\ \text{pour deux courbes données BB}', \text{ B}_1\text{B}'_1, \text{ et} \\ q_1 = K_1\eta(t), \quad q'_1 = K_1\eta(t') \end{array} \right.$$

pour tout autre système de courbes de même espèce.

Dès lors la relation (η) se réduira à

$$\frac{S}{S_1} = \frac{K}{K_1}, \quad \text{ou à} \quad \frac{S}{K} = \frac{S_1}{K_1},$$

et si l'on désigne par $f(t, t')$ une certaine fonction universelle des températures t, t', on en conclura

$$S = Kf(t, t'), \quad S_1 = K_1 f(t, t');$$

puis, de la même manière que dans le mode de démonstration de la formule (a) de MM. Carnot et Clapeyron, on reconnaîtra que la fonction $f(t, t')$ devra être de telle nature que, en procédant à n opérations successives, par échelons quelconques de t

à t_n, il faudra que l'on trouve

$$f(t_0, t_n) = f(t_0, t_1) + f(t_1, t_2) + f(t_2, t_3) + \ldots + f(t_{n-1}, t_n)$$

ce qui reviendra à dire que l'on devra avoir

$$f(t_0, t_n) = \int_{t_0}^{t_n} \frac{d\Gamma_1(t)}{dt} dt = \Gamma_1(t_n) - \Gamma_1(t_0),$$

la fonction $\Gamma_1(t)$ étant la même pour tous les fluides indistinctement.

Ainsi l'on aura

$$(i) \qquad S = K[\Gamma_1(t') - \Gamma_1(t)] = K\int_t^{t'} \frac{d\Gamma_1(t)}{dt} dt,$$

et, par conséquent, l'on retombera sur la formule de MM. Carnot et Clapeyron, à cela près que la constante arbitraire K jouera le rôle de la quantité q dans la formule (a).

Or la formule (3) conduira précisément au même résultat quand on y fera à la fois

$$q = K\gamma(t), \quad q' = K\gamma(t');$$

car on trouvera, de cette manière,

$$S = K[\gamma(t')\Gamma(t') - \gamma(t)\Gamma(t)] = K\int_t^{t'} \frac{d}{dt}[\gamma(t)\Gamma(t)]dt;$$

par conséquent, ce sera alors la fonction composée $\gamma(t)\Gamma(t)$ qui remplacera la fonction simple $\Gamma_1(t)$ de la formule (i) et qui jouera le même rôle avec la constante arbitraire K que celui que la fonction $\int \frac{dt}{C}$ jouait avec la quantité q dans la formule (a).

Je conclus de cette discussion que la formule (3) est d'une généralité absolue et d'une exactitude entière, sauf à savoir, ou par expérience ou par d'autres raisonnements, si l'on doit y faire ou $q' = q$ ou $\Gamma(t) =$ constante, en observant toutefois que l'on ne saurait avoir à la fois $q' = q$ et $\Gamma(t) =$ constante, parce qu'il en résulterait $S = 0$, ce qui est incompatible avec les *fig.* 1 et 2.

La généralité de la formule (3) étant bien établie, je reporte mon attention sur l'une des *fig.* 1, 2, et j'observe que si, entre deux courbes données $B'B$, $B_1B'_1$ prolongées jusqu'à l'axe Ov, on prend pour t une valeur de plus en plus petite, la courbe BB_1 s'abaissera de plus en plus, et que, en même temps, la quantité S deviendra l'aire curviligne $uB'B'_1u_1$ prolongée jusqu'à sa rencontre avec l'axe des v.

Sur la *fig.* 1, les plus basses des courbes BB_1 ne rencontreront peut-être l'axe Ov que sous des angles finis; mais sur la *fig.* 2, dans le cas d'un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, la plus basse des courbes BB_1 devra être l'axe des v lui-même. Il y aura là de la vapeur extrêmement raréfiée à une pression nulle et à une température très-basse t_0. La quantité de chaleur q_0 de l'une à l'autre des courbes $B'Bu$, $B'_1B_1u_1$ sur l'axe Ov ne sera pas égale à zéro, parce qu'il devra être possible

encore de faire varier le volume v du mélange par une addition ou par une soustraction de chaleur.

En faisant diminuer progressivement le volume v d'une telle sorte de vapeur et en empêchant la pression p de renaître, par suite d'un enlèvement continuel de la quantité de chaleur exprimée, on devra pouvoir ramener la vapeur jusqu'à l'état liquide, à la température constante t_0; mais on ne comprend plus quelle sorte de différence il pourrait y avoir dans ce cas-là entre l'état liquide proprement dit et l'état correspondant de vapeur sous une pression nulle; les deux états se confondront vraisemblablement en un seul, ou plutôt l'état liquide n'existera plus, et quand on continuera à enlever de la chaleur, la vapeur passera directement à l'état solide, sous une pression nulle, à la température en question t_0.

Après la complète solidification du mélange à la température t_0, il devra être possible encore d'en enlever de la chaleur et, par suite, d'en abaisser la température au-dessous de t_0 de la manière qu'il nous est facile de constater avec un corps solide quelconque placé sous la cloche d'une machine pneumatique.

La température t_0 d'une vapeur sous une pression nulle aura sans doute une valeur différente pour chaque espèce de vapeur, et quand le milieu atmosphérique aura une température inférieure à t_0, ce milieu ne pourra être imprégné de vapeur de l'espèce de matière qu'on considérera; telle est vraisemblablement la constitution de la plupart des corps solides qui nous environnent et qui, à l'état de poussière seulement, peuvent être suspendus momentanément dans l'air atmosphérique; excepté quand une telle poussière, par des combinaisons chimiques, pourra donner lieu à d'autres produits susceptibles d'imprégner de l'air d'une manière durable.

Ainsi, en désignant par q_0 ce que deviendra la quantité q quand on aura $p = 0$, $t = t_0$, la formule (3) deviendra

$$S_t^{t'} = q'\Gamma(t') - q_0\Gamma(t_0);$$

puis, quand on y changera t' en t, on aura

$$S_t^t = q\Gamma(t) - q_0\Gamma(t_0).$$

Les premiers membres de ces deux formules seront les aires curvilignes $uB'B'_1u_1$, uBB_1u_1 comptées à partir de l'axe Ov jusqu'aux courbes $B'B'_1$, BB_1, *fig.* 2, et la différence de ces deux aires fera précisément la quantité S de la formule (3).

D'après ces raisonnements, une espèce de vapeur déterminée ne pourra servir à produire de la force motrice qu'à partir d'une température donnée t jusqu'à la limite inférieure t_0, et la quantité de force possible avec une somme de chaleur q à la température initiale t sera

$$S_{t_0}^t = q\Gamma(t) - q_0\Gamma(t_0).$$

Mais il suffirait qu'il y eût une autre espèce de vapeur dont la limite t'_0 fût inférieure

à t_0 pour que, à la température t_0, on pût faire passer la somme de chaleur latente q de la première vapeur dans la seconde, ce qui permettrait d'obtenir encore une quantité de force motrice égale à

$$S'^{t_0}_{t'_0} = q_0 \Gamma(t_0) - q'_0 \Gamma(t'_0),$$

et ainsi de suite, une ou plusieurs fois, pourvu que l'on eût à sa disposition une source froide d'une température inférieure à t_0, t'_0, t''_0, ...

Les mêmes considérations seront directement applicables à la *fig.* 1, quand on n'y concevra que deux courbes infiniment rapprochées $B'Bu$, $B'_1B_1u_1$, ce qui obligera de mettre dq', dq, dq_0, en place de q', q, q_0.

On aura alors, à partir d'une courbe donnée BB_1 jusqu'à l'axe Ov,

$$S^t_{t_0} = dq\Gamma(t) - dq_0\Gamma(t_0),$$

et, d'une pareille bande curviligne à une autre bande adjacente, la température limite t_0 sur l'axe des v, ira sans doute en augmentant avec v, ce qui obligera d'écrire pour une bande quelconque uBB_1u_1 de largeur finie,

$$S^t_t = q\Gamma(t) - \int_u^{u_1} dq_0\Gamma(t_0),$$

au lieu que sur la *fig.* 2, on aura

$$t_0 = \text{constante},$$

et, par suite

$$S^t_{t_0} = q\Gamma(t) - q_0\Gamma(t_0).$$

Ces considérations me semblent très-propres à bien éclaircir la signification de la formule (3) pour un fluide élastique quelconque, et j'en conclus notamment que *le produit $q\Gamma(t)$ est la mesure rationnellement exacte de la quantité de force motrice qu'il soit théoriquement possible de concevoir en lieu et place d'une somme de chaleur q à une température donnée t.*

Les courbes $B'B$, B'_1B des *fig.* 1 et 2 étant prolongées jusqu'à l'axe des v, on aura toujours

$$(4)\quad \begin{cases} q'\Gamma(t') = \text{aire curviligne } uB'B'_1u_1 + C, \\ q\Gamma(t) = \text{aire curviligne } uBB_1u_1 + C, \end{cases}$$

la lettre C étant employée ici pour désigner la quantité $\int dq\Gamma(t_0)$ de u en u_1, sur l'axe Ov, et de la soustraction de ces deux formules proviendra la quantité parfaitement déterminée S de la formule (3).

Par suite, la quantité $\Gamma(t)$ sera l'*équivalent mécanique* de l'unité de chaleur à une température t, et, à une autre température t', l'unité de chaleur aura pour équivalent mécanique la quantité $\Gamma(t')$; mais en supposant que l'on doive avoir

$$\Gamma(t) = \text{constante } G,$$

cela ne changera rien à la signification fondamentale des formules (4), et il faudra alors

que l'on ait en principe

$$(bis)\quad \begin{cases} G q' = \text{aire curviligne } u B' B'_1 u_1 + C, \\ G q = \text{aire curviligne } u B B_1 u_1 + C, \end{cases}$$

indépendamment de tout ce que l'expérience pourra faire trouver encore au sujet des relations des quantités q, q' avec d'autres parties des *fig.* 1 et 2, comme par exemple avec les aires ABB_1A_1, $A'B'B'_1A'_1$, etc.

Tel est et sera toujours le point essentiel de ma théorie. Un autre point essentiel, c'est que, en tout état de choses, entre deux courbes données $B'Bu$, $B'_1B_1u_1$ des *fig.* 1 et 2, le produit $q\Gamma(t)$ ira nécessairement en augmentant avec t, soit que l'augmentation vienne du facteur q, soit qu'elle vienne de la fonction $\Gamma(t)$.

J'arrive maintenant à ce que l'on peut dire pour ou contre la relation

$$\Gamma(t) = \text{constante}.$$

Je suppose que, entre deux sources de chaleur A, A′ à des températures différentes t, t', on renonce à se servir d'un fluide élastique comme véhicule de la chaleur de A′ vers A; alors la transmission de chaleur se fera librement, par rayonnement ou par contact, de la source la plus chaude à la source la moins chaude, et l'on doit supposer naturellement que ce qui sortira de l'une passera intégralement dans l'autre.

Mais si, dans ce cas-là, on écrivait

$$q' = q,$$

il arriverait que la source A′ perdrait une somme de force vive égale au produit $q\Gamma(t')$, tandis que la source A gagnerait une somme de force vive égale au produit $q\Gamma(t)$; il y aurait donc une perte de travail ou de force vive égale à la différence

$$q'\Gamma(t') - q\Gamma(t) = q\{\Gamma(t') - \Gamma(t)\},$$

ce qui choquerait singulièrement notre bon sens, puisqu'aucune entrave n'est supposée avoir été mise à la libre transmission de la chaleur de A′ vers A.

Pour éviter une telle difficulté, l'on devra écrire

$$q'\Gamma(t') - q\Gamma(t) = 0,$$

tandis que, avec l'emploi d'un fluide élastique comme véhicule de la chaleur, on aura

$$q'\Gamma(t') - q\Gamma(t) = S.$$

De cette manière, il y aura toujours parfaite conservation de force vive, et, de plus, comme ce sera la quantité de force vive reçue par un corps qui fera l'augmentation de chaleur de ce corps, il sera extrêmement vraisemblable que ce que les physiciens sont parvenus à mesurer sous le nom d'une quantité de chaleur est précisément le produit $q\Gamma(t)$, au lieu du facteur q de mes raisonnements. A ce point de vue donc, la discussion se trouverait close, et l'on devrait faire

$$\Gamma(t) = \text{constante } G.$$

Mais il y a à objecter que, dans ce cas-là, les formules (3 *bis*) se réduiront à

$$S = q' - q = G,$$

et sembleront indiquer qu'il est parfaitement indifférent d'avoir de la chaleur à une haute ou à une basse température, alors qu'il est de toute évidence qu'une température élevée est une chose de prix qui ne saurait plus être retrouvée gratuitement quand on l'aura laissée se perdre sans les précautions voulues par les *fig.* 1 et 2; alors surtout que les *fig.* 1 et 2 nous montrent la nécessité d'opérer entre des températures t, t', aussi différentes que possible pour obtenir le plus de force motrice possible.

A une telle objection, on peut répondre, à la vérité, que nous ne connaissons actuellement d'autre manière de convertir de la chaleur en force motrice que de nous servir de quelque fluide élastique, et que c'est la nécessité seulement d'employer un tel moyen qui nous oblige d'opérer entre des limites de température aussi écartées que possible quand nous ne voulons pas perdre bénévolement de la force motrice; qu'une pareille circonstance dépendante de la nature seulement des intermédiaires que nous sommes obligé d'employer, peut véritablement être indifférente au principe de physique rationnel d'après lequel on aura

$$S = q - q = G.$$

Quoi qu'il en soit, à défaut d'une évidence absolue, je conserverai la fonction $\Gamma(t)$ dans tout ce qui va suivre, d'autant plus que peut-être la présence de cette fonction servira à faciliter la transition qu'il y aura à établir un jour des effets purement calorifiques aux effets lumineux et électriques des corps.

Tout ceci n'est, selon moi, que la continuation très-naturelle des recherches de MM. Carnot et Clapeyron, après que M. Regnault eut révoqué en doute l'égalité $q' = q$.

CHAPITRE III.

Établissement des formules générales $q = \Gamma(t, u)$, $\Gamma(t, u) = \int_{u_0}^{u} \frac{d}{du} F(t, u)\, du$, $dq = \frac{d}{du} F(t, u)\, du = f(t, u)\, du$, *sans que l'on fasse aucune hypothèse sur la nature intime de la chaleur. — De la nécessité de rendre une différentielle exacte la relation fondamentale* $dQ = \Gamma(t) f(t, u)\, du - p\, dv$, *ou bien la relation complémentaire de celle-là* $dA = \frac{d}{dt}(\Gamma(t) F(t, u))\, dt - p\, dv$. *Des significations précises des quantités* A, Q, R *qui sont reliées entre elles par l'équation* $A + Q = R = \Gamma(t)\Gamma(t, u)$, *etc.*

L'aire S du quadrilatère BB′B′$_1$B$_1$ des *fig.* 1 et 2 devant être déterminée par la formule

$$S = q'\Gamma(t') - q\Gamma(t),$$

il faudra qu'on sache représenter algébriquement les quantités q, q' sans faire aucune hypothèse sur la nature intime de la chaleur.

Or il est évident, à la seule inspection des *fig.* 1 et 2, que, pour chaque espèce de fluide élastique, il y aura une certaine fonction F des variables t, u au moyen de laquelle on pourra écrire, de B en B_1, le long d'une courbe $\varphi(v, p) = t$,

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l} q = F(t, u_1) - F(t, u) = \displaystyle\int_u^{u_1} \frac{d}{du} F(t, u)\, du, \\ \text{et, de } B' \text{ en } B'_1 \text{ le long d'une courbe } \varphi(v, p) = t', \\ q' = F(t', u_1) - F(t', u) = \displaystyle\int_u^{u_1} \frac{d}{du} F(t', u)\, du; \end{array}\right.$$

car, de cette manière, la quantité de chaleur q, le long d'une courbe BB_1 entre deux courbes données BB', $B_1B'_1$, pourra varier d'une manière quelconque de bas en haut sur les *fig.* 1, 2, et d'une manière quelconque encore d'une bande uBB_1u_1 à une autre.

En faisant, pour abréger,

$$(6)\quad \frac{dF(t, u)}{du} = f(t, u),$$

on aura, entre deux courbes infiniment rapprochées BB', $B_1B'_1$,

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} dq = f(t, u)\, du, \\ dq' = f(t', u)\, du; \end{array}\right.$$

puis, quand on supposera encore

$$t' = t + dt,$$

on aura, d'une part,

$$dq = f(t, u)\, du,$$

d'autre part,

$$dq' = f(t + dt, u)\, du = f(t, u)\, du + \frac{df(t, u)}{dt}\, dt\, du.$$

c'est-à-dire que, pour deux points infiniment rapprochés B, B'_1 par lesquels on sera toujours libre de mener deux arcs BB_1, $B'B'_1$ de l'espèce $\varphi(v, p) = t$ et deux arcs BB', $B_1B'_1$ de l'espèce $\psi(v, p) = u$, la quantité dq le long de l'arc BB_1 sera un infiniment petit du premier ordre, et que la quantité correspondante dq', le long de l'arc $B'B'_1$, ne différera de celle-là que d'un infiniment petit du second ordre.

Cela posé, quand on voudra faire aller les quantités v, p d'un fluide élastique le long d'une ligne donnée quelconque BB'_1E, on pourra décomposer l'arc s de la ligne donnée en éléments infiniment petits ds représentés par BB'_1 sur la *fig.* 1; puis, au lieu d'aller directement de B en B'_1, on pourra aller, d'une part, de B en B_1, et de là en B'_1,

ce qui nécessitera une dépense de chaleur égale à dq; d'autre part, on pourra aller de B en B′, et de là en B′₁, ce qui nécessitera une dépense de chaleur égale à dq'.

Donc, puisque les quantités dq, dq' ne différeront entre elles que d'un infiniment petit du second ordre, on pourra dire que la quantité de chaleur nécessaire pour aller directement de B en B′₁ le long de la longueur donnée ds, sera représentée, à un infiniment petit du deuxième ordre près, par le terme différentiel

$$dq = f(t, u)\, du.$$

Pour qu'il ne reste aucun doute à cet égard, j'observe que, en tout état de choses, la quantité de chaleur nécessaire pour aller d'un point t, u à un autre point infiniment rapproché $t + dt$, $u + du$ doit être une quantité infiniment petite, et que, par suite, il doit être possible de représenter une telle quantité par une expression de la forme

$$dq = a(t, u)\, dt + b(t, u)\, du.$$

Mais quand on fera $du = 0$ dans une telle expression, on devra trouver $dq = 0$, et, par suite, il faudra qu'on ait $a(t, u) = 0$, ce qui ne permettra d'avoir généralement que $dq = b(t, u)\, du$ comme par les formules (7).

Dans la manière de voir de MM. Carnot et Clapeyron, la fonction $f(t, u)$ ne devait pas dépendre de la variable t, et, par suite, on avait

$$dq' = dq = f(u)\, du.$$

Il était permis, enfin, de modifier la forme algébrique de l'équation

$$\psi(v, p) = u,$$

de manière que, sans rien changer à la nature de chacune des courbes BB′, B₁B′₁ sur la *fig.* 1, on avait simplement

$$dq' = dq = du.$$

Mais avec l'objection faite par M. Regnault, cela ne sera plus permis, et l'on sera obligé de développer la formule (3) à l'aide des formules (5), (6), (7).

Ainsi, quand on voudra trouver la somme de chaleur nécessaire pour faire aller les quantités v, p d'un fluide élastique d'un point t_0, u_0 à un autre point t_1, u_1 le long d'une ligne donnée quelconque BB′₁E, il faudra qu'on fasse la somme de tous les termes différentiels

$$dq = f(t, u)\, du$$

le long de cette ligne, ce qui reviendra à poser

$$C = \int_{u_0}^{u_1} f(t, u)\, du, \tag{8}$$

à la condition que, pendant le cours de l'intégration, les variables t, u seront assujetties

à une certaine relation

$$\chi(t, u) = 0,$$

qui sera l'équation de la ligne donnée en t, u, et au moyen de laquelle on trouverait l'équation de la même ligne en v, p sous la forme

$$\chi[\varphi(v, p), \psi(v, p)] = 0.$$

Quand la ligne donnée se confondra exceptionnellement avec une des courbes

$$\psi(v, p) = \text{constante } u,$$

on aura

$$du = 0,$$

et le second membre de la formule (8) sera égal à zéro.

Quand la ligne donnée se confondra exceptionnellement avec une courbe

$$\varphi(v, p) = \text{constante } t,$$

le second membre de l'équation (8) sera directement intégrable, et l'on aura

$$G = \int_{u_0}^{u} f(t, u)\, du = F(t, u) - F(t, u_0).$$

Dans tout autre cas, le second membre de l'équation (8) ne deviendra intégrable que lorsqu'on y aura remplacé t par sa valeur en u tirée de l'équation

$$\chi(t, u) = 0$$

de la ligne donnée.

Je suppose, à présent, qu'il soit question de faire aller les quantités v, p d'un fluide élastique le long d'une ligne rentrante sur elle-même $L_0 L'_0 L'_1 L_1 L_0$, *fig.* 3. On pourra mener, alors, une infinité de courbes aa', bb',... de l'espèce

$$\psi(v, p) = \text{constante } u;$$

puis, par les points de division (a, b), (a', b') où ces courbes-là rencontreront la ligne rentrante sur elle-même $L_0 L'_0 L'_1 L_1 L_0$, on pourra mener des courbes de l'espèce

$$\varphi(v, p) = \text{constante } t,$$

de manière à former une infinité de petits parallélogrammes $aebd$, $a'e'b'd'$, composés chacun de deux triangles, tels que aeb, adb,... et $a'e'b'$, $a'd'b'$,.... Je suppose encore, pour mieux fixer les idées, que, de L_0 à L'_0, la ligne rentrante sur elle-même se confonde avec la courbe initiale

$$\psi(v, p) = u_0,$$

et, de L_1 en L'_1, avec la courbe finale

$$\psi(v, p) = u_1.$$

Cela posé, on comprendra bien clairement comment la formule (8) fera trouver des quantités de chaleur égales à zéro le long de chacune des longueurs $L_0L'_0$, $L_1L'_1$, tandis que, de L_0 en L_1, en suivant la ligne dentelée qui proviendra de tous les triangles *adb*, ou bien la ligne dentelée qui proviendra de tous les triangles *aeb*, on aura, de l'une ou l'autre manière, à un infiniment petit près,

$$C = \int_u^{u_1} f(t, u)\,du,$$

quand on ira de L_0 en L_1, et, au contraire,

$$-C = \int_{u_1}^{u} f(t, u)\,du,$$

quand on ira de L_1 en L_0.

Pareillement, de L'_0 en L'_1, on aura

$$C' = \int_u^{u_1} f(t', u)\,du,$$

et, au contraire, de L'_1 en L'_0,

$$-C' = \int_{u_1}^{u} f(t', u)\,du.$$

Ainsi, la formule (8) aura la propriété de faire trouver chacune des quantités C, C′ avec le signe + ou avec le signe —, selon que de la chaleur devra être fournie ou ôtée au fluide élastique.

Il s'ensuit que, dans le cas où l'on aurait besoin de connaître la différence

$$C - C' = \int_u^{u_1} f(t', u)\,du - \int_u^{u_1} f(t, u)\,du,$$

il ne serait pas nécessaire de calculer séparément chacune des quantités C, C′ pour en prendre ensuite la différence, et que l'on parviendrait exactement au même résultat si l'on s'avisait de faire l'intégration de la formule (8) tout à l'entour de la ligne rentrante sur elle-même $L_0L'_0L'_1L_1L_0$ jusqu'à revenir au point de départ, dans le sens indiqué par des flèches sur la *fig.* 3. Le résultat ne dépendrait pas du commun point de départ et d'arrivée de l'intégration sur la ligne $L_0L'_0L'_1L_1L_0$, et il serait exactement de signe contraire si l'on opérait en sens contraire sur la *fig.* 3.

Pour indiquer une telle opération algébrique tout à l'entour d'une ligne rentrante quelconque de longueur *s*, j'écrirai

$$C' - C = \int^{s} f(t, u)\,du.$$

Je veux d'ailleurs laisser indécise ici la question de savoir s'il n'y aura pas un véritable contre-sens, au point de vue physique des choses, à faire la somme algébrique de

différentes quantités de chaleur dq, dq' venues de températures très-différentes t, t', alors que la fonction universelle $\Gamma(t)$ ne sera pas remplacée par une constante dans la théorie. Ce que j'ai en vue seulement en ce moment, c'est de parvenir à la représentation algébrique bien complète de toutes choses sur la *fig.* 1 sans faire aucune hypothèse sur la nature intime de la chaleur, et ce but-là, je l'atteindrai manifestement en ne me servant que des formules (6), (7), (8), sauf, ultérieurement, à y joindre telles conditions restrictives que l'expérience ou le raisonnement pourront indiquer.

Ainsi, pour deux courbes infiniment rapprochées

$$\psi(v, p) = u, \quad \psi(v, p) = u + du,$$

la formule (3) deviendra

$$dS = \Gamma(t')\,dq' - \Gamma(t)\,dq = \Gamma(t')\,f(t', u)\,du - \Gamma(t)\,f(t, u)\,du.$$

Ce sera l'aire de l'une des bandes $aa'b'b$ de la *fig.* 3, et pour la somme de toutes les bandes analogues, comprises dans la ligne fermée $L_0 L'_0 L'_1 L_1 L_0$, on aura

$$S = \int_u^{u_1} \Gamma(t')\,f(t', u)\,du - \int_u^{u_1} \Gamma(t)\,f(t, u)\,du,$$

la première intégrale du second membre devant être prise de L'_0 en L'_1, et la seconde de L_0 en L_1.

Il suit de là que, en écrivant généralement

$$S = \int \Gamma(t)\,f(t, u)\,du,$$

et en convenant de faire l'intégration du second membre tout à l'entour de la ligne fermée $L_0 L'_0 L'_1 L_1 L_0$ dans le sens marqué par des flèches sur la *fig.* 3, on trouvera identiquement le même résultat sous la forme plus simple

$$(9) \qquad S = \int_0^s \Gamma(t)\,f(t, u)\,du,$$

les variables t, u devant être assujetties tout à l'entour de l'aire S à une certaine relation

$$\chi(t, u) = 0,$$

qui sera l'équation de la ligne s en t, u, et au moyen de laquelle on trouverait l'équation de la même ligne s en v, p sous la forme

$$\chi[\varphi(v, p), \psi(v, p)] = 0.$$

La quantité S ressortira, d'ailleurs, du calcul avec le signe + ou avec le signe —, selon qu'on effectuera l'intégration dans le sens des flèches marquées sur la *fig.* 3, ou

en sens contraire, c'est-à-dire selon que la quantité S représentera du travail produit ou du travail consommé.

Quant à la signification physique de la formule (9), rien n'empêchera de concevoir une infinité de sources de chaleur A′ à toutes les températures t' qui régneront progressivement le long de la ligne $L'_0 L'_1$, et une infinité de sources de chaleur A à toutes les températures t qui régneront progressivement le long de la ligne $L_0 L_1$. En employant, alors, successivement chacune des sources A′ à fournir au fluide élastique une quantité de chaleur dq' avec une différence de température sensiblement nulle, et, pareillement, chacune des sources A à enlever au fluide élastique une quantité de chaleur dq, aussi avec une différence de température sensiblement nulle, la formule (9) représentera le maximum de force motrice théoriquement possible avec toutes les quantités de chaleur dq' enlevées aux sources A′ à des températures inégales t' et avec toutes les quantités de chaleur dq cédées aux sources A à des températures inégales t, ou, réciproquement, ce sera la quantité de force motrice qu'il faudra dépenser pour enlever toutes les quantités de chaleur dq aux différentes sources A et pour céder toutes les quantités de chaleur dq' aux différentes sources A′; car l'opération directe et l'opération inverse seront également possibles, et, par suite, il ne saurait y avoir aucune perte ni dans l'un ni dans l'autre cas.

De cette manière, la formule (9) aura, par rapport à une étendue quelconque S sur la *fig.* 1, la même signification que la formule (3) par rapport à l'aire quadrilatérale $BB'B'_1B_1$, et, en effet, dès l'instant qu'on voudra faire une application de la formule (9) à l'aire quadrilatérale $BB'B'_1B_1$ de la *fig.* 1, on retrouvera identiquement la relation de principe

$$S = q'\Gamma(t') - q\Gamma(t).$$

Mais toute aire S délimitée par une ligne rentrante sur elle-même, telle que $L_0 L'_0 L'_1 L_1 L_0$ sur la *fig.* 3, pourra être déterminée aussi par une application de la formule

$$(9\ bis) \qquad S = \int_1^s p\,dv,$$

en lieu et place de la formule (9); l'intégration devant être faite dans le même sens de l'une et l'autre manière tout à l'entour de la ligne $L_0 L'_0 L'_1 L_1 L_0$.

Donc, on aura à la fois les formules (9) et (9 *bis*), la dernière d'une manière géométriquement évidente, et l'autre d'après un mode de raisonnement analogue à celui de M. Carnot.

Donc, enfin, la différence

$$\Gamma(t) f(t, u)\,du - p\,dv$$

devra être la différentielle exacte d'une certaine fonction Q, et l'on aura la *relation fondamentale*

$$(10) \qquad dQ = \Gamma(t) f(t, u)\,du - p\,dv.$$

Dès lors une certaine condition devra être remplie, sans quoi la formule (10) deviendrait absurde, c'est-à-dire sans quoi les aires S des équations (9) et (9 *bis*) ne pourraient être égales.

Pour trouver la condition en question de la manière la plus simple, j'imagine que les équations fondamentales

$$\varphi(v, p) = t, \quad \psi(v, p) = u$$

aient pu être résolues en v, p et aient fait trouver les relations équivalentes

$$v = \alpha(t, u),$$
$$p = \beta(t, u),$$

au moyen desquelles on aura généralement

$$dv = \frac{dv}{dt}\,dt + \frac{dv}{du}\,du,$$

$$dp = \frac{dp}{dt}\,dt + \frac{dp}{du}\,du.$$

L'équation (10) deviendra alors

$$dQ = \left(\Gamma(t) f(t, u) - p\frac{dv}{du}\right) du - p\frac{dv}{dt}\,dt,$$

et entraînera les deux relations distinctes

$$\Gamma(t) f(t, u) - p\frac{dv}{du} = \frac{dQ}{du},$$

$$-p\frac{dv}{dt} = \frac{dQ}{dt},$$

ce qui exigera que l'on ait

$$\frac{d}{dt}\left(\Gamma(t) f(t, u) - p\frac{dv}{du}\right) = -\frac{d}{du}\left(p\frac{dv}{dt}\right),$$

et, en développant,

$$(11) \qquad \frac{d}{dt}\left(\Gamma(t) f(t, u)\right) = \frac{d}{dt}\left(p\frac{dv}{du}\right) - \frac{d}{du}\left(p\frac{dv}{dt}\right) = \frac{dp}{dt}\frac{dv}{du} - \frac{dp}{du}\frac{dv}{dt}.$$

En multipliant ensuite par p, et en y substituant

$$p\frac{dv}{du} = \Gamma(t) f(t, u) - \frac{dQ}{du},$$

$$p\frac{dv}{dt} = -\frac{dQ}{dt},$$

on aura

$$11\ bis \qquad p\frac{d}{dt}[\Gamma(t)f(t,u)] - \frac{dp}{dt}\Gamma(t)f(t,u) = \frac{dQ}{dt}\frac{dp}{du} - \frac{dQ}{du}\frac{dp}{dt};$$

mais, par cette transformation, l'équation (11) se confondra avec celle que l'on trouvera directement en cherchant à rendre une différentielle exacte la valeur de dv tirée de l'équation (10) sous la forme

$$dv = \frac{\Gamma(t)f(t,u)}{p}du - \frac{dQ}{p} = \frac{\Gamma(t)f(t,u) - \frac{dQ}{du}}{p}du - \frac{\frac{dQ}{dt}}{p}dt.$$

Ce sera donc une seule et même chose que de vouloir rendre une différentielle exacte en t, u, soit dQ, soit dv, dans l'équation (10).

On pourra aussi prendre v, p comme variables indépendantes. Il faudra alors que, dans le second membre de l'équation (10), on fasse usage des relations primitives

$$t = \varphi(v, p),$$
$$u = \psi(v, p),$$

au moyen desquelles on aura généralement

$$dt = \frac{dt}{dv}dv + \frac{dt}{dp}dp,$$
$$du = \frac{du}{dv}dv + \frac{du}{dp}dp.$$

En posant ensuite

$$\Gamma(t)f(t,u)\frac{du}{dv} = X,$$
$$\Gamma(t)f(t,u)\frac{du}{dp} = Y,$$

l'équation (10) se réduira à

$$dQ = (X - p)\,dv + Y\,dp,$$

et entraînera les deux relations distinctes

$$X - p = \frac{dQ}{dv},$$
$$Y = \frac{dQ}{dp},$$

ce qui exigera que l'on ait

$$\frac{d}{dp}[X - p] = \frac{dY}{dv},$$

ou

$$\frac{dX}{dp} - \frac{dY}{dv} = 1$$

En faisant encore

$$\Gamma(t) f(t, u) = Z,$$

on aura

$$X = Z \frac{du}{dv}.$$

$$Y = Z \frac{du}{dp},$$

et, en considérant d'abord Z comme une fonction inconnue en v, p, la condition trouvée deviendra

$$1 = \frac{d}{dp}\left(Z \frac{du}{dv}\right) - \frac{d}{dv}\left(Z \frac{du}{dp}\right) = \frac{dZ}{dp}\frac{du}{dv} - \frac{dZ}{dv}\frac{du}{dp}.$$

En considérant ensuite la même quantité Z comme une fonction donnée en t, u, on aura

$$\frac{dZ}{dp} = \frac{dZ(t, u)}{dt}\frac{dt}{dp} + \frac{dZ(t, u)}{du}\frac{du}{dp},$$

$$\frac{dZ}{dv} = \frac{dZ(t, u)}{dt}\frac{dt}{dv} + \frac{dZ(t, u)}{du}\frac{du}{dv},$$

et, par suite, la condition nécessaire se changera en

(12) $$1 = \frac{d}{dt}[\Gamma(t) f(t, u)]\left(\frac{du}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{du}{dp}\frac{dt}{dv}\right).$$

Ce sera l'équation (11) mise sous une nouvelle forme, et quand on y fera

$$\frac{du}{dv} = \frac{X}{\Gamma(t) f(t, u)} = \frac{p + \frac{dQ}{dv}}{\Gamma(t) F(t, u)},$$

$$\frac{du}{dp} = \frac{Y}{\Gamma(t) F(t, u)} = \frac{\frac{dQ}{dp}}{\Gamma(t) F(t, u)},$$

on trouvera encore

(12 *bis*) $$\frac{\Gamma(t) F(t, u)}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t) F(t, u)]} = \left(p + \frac{dQ}{dv}\right)\frac{dt}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dt}{dv}.$$

D'autre part, on conclura de l'équation (10),

$$du = \frac{p + \frac{dQ}{dv}}{Z}\, dv + \frac{\frac{dQ}{dp}}{Z}\, dp,$$

et, pour que cette expression de du devienne une différentielle exacte, il faudra que

l'on ait

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{p+\frac{dQ}{dv}}{Z}\right)=\frac{d}{dv}\left(\frac{\frac{dQ}{dp}}{Z}\right),$$

ou, en développant,

$$Z\left(1+\frac{d^2Q}{dv\,dp}\right)-\left(p+\frac{dQ}{dv}\right)\frac{dZ}{dp}=Z\frac{d^2Q}{dv\,dp}-\frac{dQ}{dp}\frac{dZ}{dv},$$

puis, en réduisant,

$$Z=\left(p+\frac{dQ}{dv}\right)\frac{dZ}{dp}-\frac{dQ}{dp}\frac{dZ}{dv}.$$

En y remplaçant, enfin, les dérivées de la quantité Z en v, p par les valeurs déjà connues de ces dérivées en fonction des dérivées correspondantes de la même quantité Z en t, u, et en tenant compte de la relation auxiliaire assez facile à trouver,

$$\left(p+\frac{dQ}{dv}\right)\frac{du}{dp}-\frac{dQ}{dp}\frac{du}{dv}=0,$$

on retombera précisément sur l'équation (12 *bis*).

Ce sera donc aussi une seule et même chose que de vouloir rendre une différentielle exacte en v, p, soit dQ, soit du, dans l'équation (10).

Et, en effet, il y a un théorème général d'après lequel toute expression de la forme

$$X\,dx+Y\,dy+Z\,dz=0,$$

qui est une différentielle exacte, reste encore une différentielle exacte quand on en tire l'une quelconque des trois différentielles dx, dy, dz en fonction des deux autres.

Le théorème persiste, d'ailleurs, quand on exprime une ou plusieurs des quantités x, y, z en fonction d'autres variables indépendantes; par conséquent, quand on joindra à l'équation (10) les deux relations fondamentales

$$\varphi(v,p)=t,\quad \psi(v,p)=u,$$

et qu'on passera successivement à toutes les combinaisons possibles des quantités Q, v, p, t, u prises deux à deux, l'on se trouvera conduit naturellement à un grand nombre de manières différentes d'exprimer une seule et même chose, qui se réduira au fond à la nécessité de pouvoir envisager l'équation (10) comme une pure identité par rapport à deux quelconques des quantités Q, v, p, t, u qui s'y trouveront actuellement ou qui pourront y être introduites, à volonté, d'après les autres relations du sujet.

L'une ou l'autre des équations (11) et (12) eût pu être trouvée plus simplement, en apparence, si, dans la relation connue

$$dS=\Gamma(t)\,dt+\Gamma(t)\,dq=\{\Gamma(t')f(t',u)-\Gamma(t)f(t,u)\}\,dt,$$

on avait fait

$$t'=t+dt.$$

ce qui eût donné, pour l'aire quadrilatérale infiniment petite $BB'B'_1B_1$,

$$dS = \frac{d}{dt}\{\Gamma(t) f(t, u)\}\, dt\, du = \frac{d\cdot\{\Gamma(t) F(t, u)\}}{dt\, du}\, dt\, du,$$

tandis que, d'un autre côté, on eût pu déterminer synthétiquement sur la fig. 1 la grandeur de la même aire dS, d'après les équations supposées données,

$$\varphi(v, p) = t, \quad \varphi(v, p) = t + dt,$$
$$\psi(v, p) = u, \quad \psi(v, p) = u + du,$$

des quatre arcs de courbe qui servent à renfermer l'aire dS, et que, enfin, on eût pu égaler les deux expressions.

Mais, de cette autre manière, on se fût trouvé engagé dans des combinaisons synthétiques assez pénibles et différentes pour chaque système de variables indépendantes, sans la moindre idée de la diversité des formes et de la signification multiple des équations (11), (11 *bis*), (12), (12 *bis*), (13), (13 *bis*), etc., qui acquerront une très-grande importance par la suite.

Ainsi, par exemple, M. Thompson a jugé convenable de prendre v, t pour variables indépendantes, ce qui obligerait à de nouvelles recherches synthétiques, tandis que, au moyen de la formule (10), on aura à faire immédiatement

$$f(t, u)\, du = f(t, u)\frac{du}{dv}\, dv + f(t, u)\frac{du}{dt}\, dt.$$

Cette expression ayant été représentée par M. Thompson dès l'abord par

$$M\, dv + N\, dt,$$

on voit que la formule (10) deviendra

$$dQ = \{M\Gamma(t) - p\}\, dv + N\Gamma(t)\, dt,$$

et entraînera les deux relations distinctes

$$M\Gamma(t) - p = \frac{dQ}{dv},$$

$$N\Gamma(t) = \frac{dQ}{dt},$$

ce qui exigera que l'on ait

$$\frac{d}{dt}\{M\Gamma(t) - p\} = \frac{d}{dv}\{N\Gamma(t)\},$$

ou

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\{M\Gamma(t)\} - \frac{d}{dv}\{N\Gamma(t)\} = M\frac{d\Gamma(t)}{dt} + \Gamma(t)\left(\frac{dM}{dt} - \frac{dN}{dv}\right).$$

On aura, d'ailleurs

$$M\Gamma(t) = \Gamma(t) f(t, u) \frac{du}{dv} = Z \frac{du}{dv},$$

$$M\Gamma(t) = \Gamma(t) f(t, u) \frac{du}{dt} = Z \frac{du}{dt}.$$

et, par suite, en considérant d'abord Z comme une fonction en v, t,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\left(Z \frac{du}{dv}\right) - \frac{d}{dv}\left(Z \frac{du}{dt}\right) = \frac{dZ}{dt}\frac{du}{dv} - \frac{dZ}{dv}\frac{du}{dt};$$

puis, en considérant Z comme une fonction en u, t,

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{dZ}{du}\frac{du}{dt} + \frac{dZ}{dt} = 0,$$

$$\frac{dZ}{dv} = \frac{dZ}{du}\frac{du}{dv} + \frac{dZ}{dt} = 0;$$

et, en substituant dans la relation précédente,

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dZ}{dt}\frac{du}{dv} = \frac{d}{dt}[\Gamma(t) f(t, u)]\frac{du}{dv}. \tag{13}$$

Ce sera la même condition que celle des équations (11) et (12); puis, quand on en éliminera la dérivée partielle $\frac{du}{dv}$ au moyen de la relation connue

$$\Gamma(t) f(t, u) \frac{du}{dv} = M\Gamma(t) = p + \frac{dQ}{dv},$$

elle se changera en

$$\frac{\Gamma(t) f(t, u)}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t) f(t, u)]} = \frac{p + \frac{dQ}{dv}}{\frac{dp}{dt}}. \tag{13 bis}$$

et ne différera pas de ce que l'on trouvera directement quand on voudra rendre une différentielle exacte la valeur de du tirée de la formule (10) sous la forme

$$du = \frac{p + \frac{dQ}{dv}}{Z} dv + \frac{\frac{dQ}{dt}}{Z} dt.$$

On pourrait de même prendre comme variables indépendantes (p, t), (v, u), (p, u), et toujours la nécessité de rendre une différentielle exacte le deuxième membre de l'équation (10) ferait trouver de la manière la plus simple la condition qui devrait avoir lieu entre les fonctions Q, $\Gamma(t)$, $f(t, u)$ et les autres quantités du problème (p, t, u).

L'équation (10) devra subsister, en un mot, comme une pure identité entre les quantités Q, v, p, t, u par rapport à deux quelconques d'entre elles comme variables indépendantes, et, par suite d'une telle identité, il devra être possible d'en tirer sous la forme d'une différentielle exacte chacune des quantités infiniment petites dQ, dv, dp, dt, du. C'est là ce que je suis parvenu à exprimer de différentes manières par les équations (11), (11 *bis*), (12), (12 *bis*), (13), (13 *bis*), et ce que je pourrais exprimer encore d'un grand nombre d'autres manières, qui seraient toutes parfaitement équivalentes entre elles, en ce que chacune d'elles n'exprimerait que l'idée mère d'une pure identité de l'équation (10) par rapport à deux quelconques des quantités Q, v, p, t, u prises comme variables indépendantes.

Si la formule (10) n'avait pas d'autre avantage que celui-là, on pourrait tout aussi bien, en place de l'équation (9 *bis*), écrire

$$S = -\int_{v_1}^{v_0} v\,dp,$$

le sens de l'intégration étant le même que dans la formule (7), c'est-à-dire le même que celui des flèches marquées sur la *fig.* 3, et, alors, on serait conduit à rendre une différentielle exacte la quantité

$$\Gamma(t)\,f(t, u)\,du - v\,dp.$$

Cela reviendrait à faire, dans l'équation (10),

$$p\,dv = d(vp) - p\,dv,$$

et, par suite, à poser

$$(10\ bis)\qquad d(\mathrm{Q} - vp) = \Gamma(t)\,f(t, u)\,du - v\,dp,$$

ou bien, en se servant de l'équation (6), on pourrait écrire d'abord

$$d\mathrm{Q} = \frac{d}{du}\left[\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u)\right]du - p\,dv,$$

puis, on observerait que, en désignant spécialement par $d[\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u)]$ la différentielle complète de la fonction $\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u)$, on aura en principe

$$d[\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u)] = \frac{d}{du}[\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u)]\,du + \frac{d}{dt}[\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u)]\,dt,$$

et, par suite, en en retranchant l'équation (10),

$$(10\ ter)\qquad d[\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u) - \mathrm{Q}] = \frac{d}{dt}[\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u)]\,dt + p\,dv.$$

En retranchant encore de celle-là l'expression

$$d(vp) = v\,dp + p\,dv,$$

on aurait la quatrième transformée

$$(10\ quater)\qquad d[\Gamma(t)F(t,u) - Q - vp] = \frac{d}{dt}[\Gamma(t)\Gamma(t,u)]\,dt - v\,dp,$$

et il devrait être parfaitement indifférent, au point de vue abstrait des choses, de rendre une différentielle exacte le second membre de celle des quatre équations (10), (10 *bis*), (10 *ter*), (10 *quater*) que l'on voudrait. C'est, en effet, ce que l'on parviendrait à vérifier directement sur chacune des équations en question, en faisant attention seulement que, à raison de la formule (6), on aura

$$\frac{d}{dt}[\Gamma(t)F(t,u)] = \frac{d^2[\Gamma(t)F(t,u)]}{dt\,du}.$$

et que, en même temps, l'aire quadrilatérale infiniment petite BB'B''B des *fig.* 1 et 2 devra être identiquement égale à

$$\frac{d^2[\Gamma(t)F(t,u)]}{dt\,du}\,dt\,du.$$

Mais l'équation (10) méritera d'être distinguée tout particulièrement de chacune des trois autres, en ce que la quantité Q qui s'y trouve au premier membre acquerra une signification physique très-nette et très-importante, ainsi que je vais le faire voir.

Le deuxième membre de la formule (10) devant toujours être une différentielle exacte, il s'ensuit que, en intégrant la formule (10) le long d'un arc de courbe quelconque s d'un point t, u à un autre point t', u' sur l'une des *fig.* 1 et 2, on trouvera toujours le même résultat, quel que soit l'arc de courbe s le long duquel on fera l'intégration.

Ainsi, la fonction Q aura une valeur parfaitement déterminée au point t, u et une autre valeur parfaitement déterminée au point t', u'.

Quelle que puisse être la courbe s qu'on mènera du premier point au second, on aura toujours identiquement

$$Q' - Q = \int_{t,u}^{t',u'} \Gamma(t)f(t,u)\,du - p\,dv = \int_{t,u}^{t',u'} \Gamma(t)f(t,u)\,du - \int_{t,u}^{t',u'} p\,dv.$$

Chacune des intégrales définies du second membre variera très-manifestement avec la forme de la courbe s, mais la différence de ces intégrales ne changera pas.

Cela étant, on n'aura qu'à choisir des courbes qui puissent annuler respectivement l'une ou l'autre intégrale définie, et l'on comprendra très-clairement sur les *fig.* 1 et 2 la signification de la quantité Q.

Je fais d'abord u = constante, et, par suite, $du = 0$, ce qui reviendra à aller de B en B' sur les *fig.* 1 et 2; alors l'équation précédente se réduira à

$$Q' = Q + \text{aire } ABB'A'.$$

Donc, de B en B', sans addition ni retranchement de chaleur, la quantité Q aug-

ajoutera exactement de la quantité de travail qu'on dépensera pour produire un tel effet physique ; cette quantité de travail restera emmagasinée dans le gaz tant que les variables v, p, t ne changeront pas, et quand on reviendra de B′ en B, le gaz restituera une telle quantité de travail, ce qui fera une diminution égale dans la quantité Q′.

La quantité totale de travail qu'un gaz pourra restituer sans addition ni retranchement de chaleur à partir d'un point donné B se trouvera représentée manifestement par l'aire triangulaire ABu sur les *fig.* 1 et 2 ; mais, au point u, sur l'axe Ov, on a alors Q = 0.

Si l'on désigne par u_A la valeur particulière de u pour celle des courbes $f(v, p) = u$ qui passera au point A, et par Q_A la valeur correspondante de la fonction Q, on aura manifestement du point A au point u, en désignant par t la température constante ou variable qui régnera le long de l'axe Ov,

$$Q = Q_A + \int_{u_A}^{u} \Gamma(t) f(t, u)\, dv,$$

puis, de u en B, le long de la courbe u = constante, on aura

$$Q = Q' + \text{aire } AuB;$$

par suite, en y substituant la valeur de Q′,

$$Q = Q_A + \int_{u_A}^{u} \Gamma(t) f(t, u)\, du + \text{aire } AuB.$$

Cela signifie qu'on pourra faire naître dans le fluide élastique la quantité Q qu'il possédera en B, en lui communiquant d'abord la quantité de chaleur nécessaire pour faire aller le volume v du fluide de O en A, et de là en u le long de l'axe des v, sans faire aucune dépense de travail, et à comprimer ensuite le fluide élastique de u en B le long de la courbe uB, en dépensant une quantité de travail égale à l'aire AuB sans ôter ni retrancher de la chaleur.

La même quantité Q pouvant être produite dans le fluide élastique le long de toute autre courbe, je supposerai, en second lieu, que l'on veuille faire aller les variables v, p du fluide de A en B le long de la perpendiculaire AB; alors l'intégrale de $p\,dv$ sera nulle, et l'on aura

$$Q = Q_A + \int_{u_A}^{u} \Gamma(t) f(t, u)\, du.$$

Ce sera une dépense purement calorifique qui fera naître la quantité Q, et il faudra que les deux expressions trouvées soient identiques. De la formule (9), appliquée tout à l'entour de la ligne fermée ABuA, on conclura, en effet,

$$\text{aire } ABu = \int_{u_A}^{u} \Gamma(t) f(t, u)\, du - \int_{u_A}^{u} \Gamma(t) f(t, u)\, du,$$

et, au moyen de cette relation, l'identité en question sera parfaitement évidente.

Ainsi *la fonction* Q *représentera la quantité de travail ou de force vive susceptible d'être produite par la totalité de la chaleur contenue actuellement dans un gaz ou dans un fluide élastique* au point B des *fig.* 1 et 2.

Mais de la quantité totale Q, le fluide ne sera capable de restituer qu'une partie égale à l'aire du triangle ABu. Quand cette partie aura été restituée, le fluide se trouvera constitué sous une pression égale à zéro, et la chaleur qui s'y trouvera encore ne pourra être convertie en force motrice qu'autant que l'on parviendra à faire passer cette chaleur dans un autre fluide élastique susceptible d'être constitué sous une pression suffisamment élevée à la température t_0, où le précédent fluide atteignait la limite $p = 0$.

Pour exprimer simplement une propriété aussi importante que celle-là dans la théorie des effets dynamiques de la chaleur, je désignerai à l'avenir par B l'aire du triangle AuB, et je conclus de ce qui précède que l'on aura, d'une part,

$$(14)\quad \begin{cases} B = \displaystyle\int_{u_A}^{u} \Gamma(t) f(t, u)\, du - \int_{u_A}^{u} \Gamma(t_0) f(t_0, u)\, du, \\ \text{d'autre part,} \\ Q = Q_A + \displaystyle\int_{u_A}^{u} \Gamma(t) f(t, u)\, du = Q_A + \int_{u_A}^{u} \Gamma(t_0) f(t_0, u)\, du + B, \end{cases}$$

l'une des intégrales devant être prise de u_A à u le long de la perpendiculaire AB, et l'autre de u_A à u le long de l'axe Ov.

J'observe encore que, dans le second membre de l'expression de Q, la somme des deux premiers termes sera une certaine fonction $\omega(u)$ de la seule variable u, ce qui permettra d'écrire

$$(15)\quad \begin{cases} \omega(u) = Q_A + \displaystyle\int_{u_A}^{u} \Gamma(t) f(t, u)\, du, \\ Q = \omega(u) + B. \end{cases}$$

Je veux faire voir enfin que, si telle est la signification de la quantité Q en un point B de la *fig.* 1, la même signification se reproduira d'une manière bien évidente quand on passera de B en B'$_1$ le long d'une courbe quelconque BB'$_1$.

L'intégrale de la formule (10) me donnera, en effet, de B en B'$_1$, le long d'un arc de courbe quelconque BB'$_1$,

$$Q'_1 - Q = \int_{t, u}^{t_1, u_1} \Gamma(t) f(t, u)\, du = \text{aire } ABB'_1A_1.$$

D'autre part, en remontant à la signification bien connue des quantités $q(t)$, $\Gamma(t)$ des formules (3), (4) et (5), ou en appliquant directement la formule (10), j'aurai

$$\text{aire } uBB'_1u_1 = \int_{t, u}^{t_1, u_1} \Gamma(t) f(t, u)\, du - \int_{t}^{t_1} \Gamma(t) f(t, u)\, du.$$

et, en éliminant l'intégrale commune des seconds membres, je trouverai

$$Q' - Q = \text{aire } uBB'_1u - \text{aire } ABB'_1A'_1 + \int_u^{u_1} \Gamma(t_0) f(t_0, u)\, du;$$

puis, en y substituant la valeur de Q des formules (14) et en transposant

$$Q' = Q_A + \int_{u_A}^{u} \Gamma(t_0) f(t_0, u)\, du + B + \text{aire } uBB'_1u - \text{aire } ABB'_1A'_1 - \int_u^{u_1} \Gamma(t_0) f(t_0, u)\, du.$$

Mais, à la simple inspection de la figure, en désignant par B' l'aire triangulaire $A'B'u_1$, on aura

$$B' = B + \text{aire } uBB'_1u_1 - \text{aire } ABB'_1A'_1;$$

d'autre part, les deux intégrales partielles le long de l'axe des v, l'une de A en u, l'autre de u en u_1, se réuniront en une seule, et l'on aura enfin

$$Q' = Q_A + \int_{u_A}^{u_1} \Gamma(t_0) f(t_0, u)\, du + B' = \omega(u) + B. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

En résumé, la fonction Q des équations (10) et (14) représentera cette somme de travail ou de force vive de laquelle différents savants se sont occupés avec tant de persistance depuis les travaux de M. Carnot, comme devant être *le parfait équivalent mécanique de la quantité totale de chaleur contenue dans un fluide élastique*.

La somme Q se composera de deux parties, dont l'une, égale à l'aire B du triangle ABu, sera susceptible d'être restituée, en effet, par la dilatation d'un fluide élastique le long de la courbe Bu, *fig.* 1, et dont l'autre $\omega(u)$, égale à l'intégrale du terme calorifique $\Gamma(t_0) f(t_0, u)\, du$ le long de l'axe des v sous une pression $p = 0$, ne pourra être convertie réellement en force motrice qu'autant que l'on saura faire passer la chaleur encore existante du premier fluide dans un autre fluide, susceptible d'être constitué sous une pression suffisamment élevée à la température t_0 où le premier fluide atteindra la limite $p = 0$; cette autre partie méritera d'être nommée la quantité de *force vive latente* d'un fluide élastique sous une pression nulle.

Dans la discussion de la fonction Q, j'ai mis à dessein Q_A pour la quantité de force vive latente d'un fluide élastique en un point donné A sur l'axe Ov de la *fig.* 1, afin de ne pas distraire l'attention de mes lecteurs par des idées de liquéfaction et de solidification qui se présentent naturellement à l'esprit quand on songe au fait physique du refroidissement indéfini d'un fluide sous une pression $p = 0$ jusqu'à la température la plus basse possible dans la nature.

Mais je puis dire, à présent, que la fonction $\omega(u)$ peut et doit naturellement être conçue comme ayant pour point de départ le moindre volume possible d'un corps à l'état solide sous une pression nulle.

La fonction Q ayant été ainsi bien exactement définie d'après les formules (10)

et (14), alors que la condition voulue par les équations (11),..., (13) est supposée remplie, on connaîtra en même temps la fonction $Q + \varphi p$ de la formule (10 *bis*) : ce sera l'aire B augmentée du rectangle OABG, plus la fonction $\omega(u)$; on aura, en un mot,

$$Q + \varphi p = \omega(u) + \text{aire } OuBG,$$

et, d'après l'équation (10 *bis*),

$$d(Q + \varphi p) = \Gamma(t) f(t, u)\, du + v\, dp.$$

Je parvenir à interpréter tout aussi clairement les équations (10 *ter*), (10 *quater*), il faut que je découvre la signification de la fonction $\Gamma(t) F(t, u)$ sur la *fig.* 1.

Je remonte donc à la formule (9) et je m'en sers pour trouver l'aire I_0IBuI_0 comprise entre une courbe donnée quelconque I_0II', la courbe IB ou $\varphi(v, p) =$ constante t, la courbe Bu ou $\psi(v, p) = u$, et l'axe Ov.

Je désigne par u_1 la valeur particulière de la variable u au point I, et, alors, comme la variable t sera constante le long de l'arc IB, j'aurai, de I en B, la quantité partielle

$$\int_{u_1}^{u} \Gamma(t) f(t, u)\, du = \Gamma(t) \int_{u_1}^{u} f(t, u)\, du = \Gamma(t) F(t, u) - \Gamma(t) F(t, u_1).$$

De B en u, je trouverai 0, à cause de

$$u = \text{constante}, \quad du = 0.$$

Le long de l'axe des v rien ne m'empêchera d'aller d'abord de u jusqu'en O, sauf ensuite à revenir de O en I_0 avant de remonter le long de la courbe donnée I_0II'.

J'aurai, de cette manière, de u jusqu'en O, la quantité connue $\omega(u)$ prise avec le signe —, c'est-à-dire

$$-\omega(u) = -Q_A - \int_{u_A}^{u} \Gamma(t) f(t, u)\, du = -\int_{u_0}^{u} \Gamma(t) f(t, u)\, du$$

Puis de O en I_0, et de là jusqu'en I le long de la courbe donnée I_0II', je trouverai l'expression

$$\int_{u_0}^{u_1} \Gamma(t) f(t, u)\, du,$$

dans laquelle les variables t, u devront être assujetties pendant le cours de l'intégration à une certaine relation

$$\chi(t, u) = 0,$$

qui sera l'équation de la ligne donnée OI_0II'.

Pour plus de simplicité, et pour bien fixer les idées, je désignerai par t_0, u_0 les variables t, u à partir du point O, et alors l'intégrale en question pourra être déterminée

à volonté sous la forme

$$a(t_1 - a(t_0)),$$

ou sous la forme

$$b(u_1) - b(u_0)).$$

Si la lettre t ne devait servir qu'à désigner un nombre déterminé, il serait parfaitement indifférent d'employer l'une ou l'autre forme; mais quand il s'agira de trouver une expression générale qui puisse être applicable à tous les points I, I′,... où la courbe donnée $I_0 II'$ sera rencontrée par différentes courbes BI, B′I′ de l'espèce générale $\varphi(v, p) = t$, alors il est clair que les quantités t, u_1 devront elles-mêmes être assujetties à l'équation de la courbe donnée, et que l'on devra avoir

$$\chi(t, u_1) = 0,$$

ce qui reviendra finalement à représenter la quantité cherchée par une certaine fonction de la variable t seulement.

Donc, en ajoutant toutes les quantités partielles à l'entour de la ligne fermée $IBuI_0OI_0I$, et en ayant égard à cette dernière considération, on trouvera

$$\text{aire } IBuI_0I = \Gamma(t)F(t, u) - \Gamma(t)F(t, u_1) + 0 - \omega(u) + a(t) - a(t_0),$$

et le deuxième terme du second membre ne sera lui-même qu'une certaine fonction de t, à cause de la relation $\chi(t, u_1) = 0$ au point limite I.

J'observe, en outre, que, lorsqu'on s'avisera de calculer l'aire OI_0IH comprise entre les deux axes Ov, Op et une courbe donnée I_0II' jusqu'au point de rencontre I de cette courbe avec l'arc BI ou $\varphi(v, p) = t$, on trouvera nécessairement aussi une certaine fonction de t que je représenterai par $\alpha(t)$.

Donc, en désignant par C l'aire $OHIBu$, on aura généralement

$$C = \Gamma(t)F(t, u) - \Gamma(t)F(t, u_1) + 0 - \omega(u) + a(t) - a(t_0) + \alpha(t).$$

Or, rien ne changera dans la relation connue

$$f(t, u) = \frac{dF(t, u)}{du}$$

quand on augmentera la fonction $F(t, u)$ d'une fonction arbitraire de t, et l'égalité précédente subsistera après comme avant, parce que les deux premiers termes du second membre augmenteront d'une même quantité l'un et l'autre, et que les trois derniers ne changeront pas.

Donc, quelle que soit la courbe donnée OI_0II', la fonction $F(t, u)$ pourra toujours être modifiée par l'adjonction d'une certaine fonction de t, de manière que l'on aura simplement

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} C = \Gamma(t)F(t, u) - \omega(u), \\ \text{ou inversement,} \\ \Gamma(t)F(t, u) = C + \omega(u), \end{array} \right.$$

la fonction $\omega(u)$ de cette dernière équation étant précisément la même que celle des équations (14) et (14 *bis*), c'est-à-dire la quantité que l'on trouvera en posant

$$\omega(u) = Q_1 + \int_{u_1}^{u} \Gamma(t_0) f(t_0, u)\, du = \int_{u_0}^{u} \Gamma(t_0) f(t_0, u)\, du = \int_{u_0}^{u} \Gamma(t_0) \frac{dF(t_0, u)}{du}\, du.$$

Dès lors, la fonction $\Gamma(t) F(t, u) - Q$ du premier membre de l'équation (10 *ter*) représentera l'aire OABIH sur la *fig.* 1, et, si je conviens de désigner cette aire par la lettre A, les équations (10 *ter*) et (10 *quater*) deviendront respectivement

$$dA = \frac{d}{dt}\{\Gamma(t) F(t, u)\}\, dt + p\,dv,$$

$$d(A - vp) = \frac{d}{dt}\{\Gamma(t) F(t, u)\}\, dt - v\,dp.$$

On aura, en même temps, sur la *fig.* 1,

$$C = A + B,$$

et, par suite, en substituant cette valeur de C dans la seconde des formules (15),

$$\Gamma(t) F(t, u) = A + B + \omega(u) = A + Q.$$

Quelles que puissent être du reste les valeurs des fonctions A, Q, dès l'instant qu'on s'avisera de faire la somme $dA + dQ$, on trouvera par l'addition des équations (10) et (10 *ter*), comme aussi par l'addition des équations (10 *bis*), (10 *quater*),

$$dA + dQ = d\{\Gamma(t) F(t, u)\},$$

et, par suite, sous forme finie, en disposant convenablement de la constante qui proviendra de l'intégration,

$$A + Q = \Gamma(t) F(t, u).$$

Il est tout aussi facile de voir que si, sans connaître encore la signification de la fonction A, je m'avisais de raisonner directement sur le second membre de l'équation (10 *ter*) comme j'ai raisonné sur le premier membre de l'équation (10), je parviendrais à démontrer que toute aire S délimitée par une ligne fermée s, pourra être calculée exactement par une application de la formule nouvelle

$$S = \int_0^s \frac{d}{dt}\{\Gamma(t) F(t, u)\}\, dt\, du, \tag{16}$$

en lieu et place de la formule (9), à la condition que, après avoir effectué d'abord la différentiation indiquée sous le signe de l'intégration par rapport à la seule variable t, on établira ensuite entre t, u, la relation voulue $\chi(t, u) = 0$ tout à l'entour de la ligne s, avant de procéder à la sommation des termes différentiels qui en proviendront.

Mais au lieu de raisonner ainsi, il me paraît préférable de remonter à la commune origine des formules (9) et (16).

J'observe donc que la fonction composée $\Gamma(t)\,F(t,u)$ est la double intégrale par rapport aux variables t, u de la différentielle seconde

$$\frac{d^2}{dt\,du}\{\Gamma(t)\,F(t,u)\}\,dt\,du,$$

et, comme il a été démontré plus haut que, d'après les formules (3) et (7), cette différentielle doit être identiquement égale à l'aire infiniment petite BB′B″B, de la *fig.* 1, comprise entre deux courbes infiniment proches,

$$\varphi(v,p) = t, \quad \varphi(v,p) = t + dt,$$

et deux autres courbes infiniment proches

$$\psi(v,p) = u, \quad \psi(v,p) = u + du,$$

j'en conclus que l'intégrale en question, augmentée d'une fonction arbitraire de t et d'une autre fonction arbitraire de u, doit être l'expression générale de toute aire S susceptible d'être délimitée sur la figure par deux courbes

$$\varphi(v,p) = t, \quad \psi(v,p) = u,$$

et une autre courbe quelconque située en deçà de celles-là.

Pour le faire voir bien clairement et pour reconnaître en même temps ce qui devra servir à déterminer dans chaque cas particulier les fonctions arbitraires en t et en u de l'intégrale générale, je retourne à la *fig.* 3, et, après y avoir mené une multitude de courbes infiniment proches de chacune des espèces φ, ψ à travers l'étendue S ayant pour contour une ligne fermée quelconque s, j'essaye de faire la somme de tous les parallélogrammes infiniment petits dans lesquels se trouvera partagée l'aire entière S.

Chacun des petits parallélogrammes sera mesuré par la différentielle seconde proposée, et je pourrai d'abord faire la somme de tous les parallélogrammes qui se trouveront situés entre deux courbes consécutives

$$\psi(v,p) = u, \quad \psi(v,p) = u + du,$$

ce qui reviendra à regarder u, du comme des constantes, et à faire varier t seulement.

Or l'intégrale générale, à ce point de vue, sera

$$\frac{d}{du}\{\Gamma(t)\,F(t,u)\}\,du + \text{fonction arbitraire de } u;$$

puis, quand je m'arrêterai aux deux limites t, t' sur le contour de l'aire S, j'aurai la différence

$$\frac{d}{du}\{\Gamma(t')\,F(t',u)\}\,du - \frac{d}{du}\{\Gamma(t)\,F(t,u)\}\,du,$$

qui sera égale à l'aire de la bande cherchée le long d'une courbe quelconque $\psi(v,p) = u$.

Cette différence se réduira d'abord à

$$\Gamma(t')f(t',u)\,du - \Gamma(t)f(t,u)\,du$$

et se confondra identiquement avec celle qui m'a conduit à la formule (9); par conséquent, quand je ferai la somme de toutes les différences analogues pour toutes les valeurs consécutives de u, du dans l'étendue de l'aire S, je retrouverai identiquement la relation connue de la formule (9),

$$S = \int_{u}^{u_1} \Gamma(t')f(t',u)\,du - \int_{u_0}^{u_1} \Gamma(t)f(t,u)\,du = \int_{0}^{s} \Gamma(t)f(t,u)\,du.$$

Mais je vois tout aussi clairement que je pourrais m'y prendre d'une autre manière, en faisant d'abord la somme de tous les petits parallélogrammes compris entre deux courbes infiniment proches

$$\varphi(v,p) = t, \quad \varphi(v,p) = t + dt,$$

ce qui reviendra à regarder t, dt comme des constantes et à faire varier u seulement.

L'intégrale générale, à ce point de vue, sera

$$\frac{d}{dt}[\Gamma(t)F(t,u)]\,dt + \text{fonction arbitraire } t;$$

puis, quand je m'arrêterai aux deux limites u_0, u_1 sur le contour de l'aire S, j'aurai la différence

$$\frac{d}{dt}[\Gamma(t)F(t,u_1)]\,dt - \frac{d}{dt}[\Gamma(t)F(t,u_0)]\,dt$$

pour la bande cherchée le long d'une courbe quelconque $\varphi(v,p) = t$.

Quand, ensuite, je ferai la somme de toutes les bandes analogues pour toutes les valeurs consécutives de t, dt, dans l'étendue de l'aire S, j'aurai manifestement aussi la quantité cherchée S; mais je l'aurai sous la forme nouvelle

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}[\Gamma(t)F(t,u_1)]\,dt - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}[\Gamma(t)F(t,u_0)]\,dt,$$

qui, dans son espèce, pourra être représentée à la manière de la formule (9) par la formule (16) déjà écrite.

Il doit donc être possible de démontrer que les formules (9) et (16) sont identiques toutes les fois qu'on les appliquera à une même ligne rentrante sur elle-même s.

Et, en effet, quand on prendra la différentielle complète de la fonction $\Gamma(t)F(t,u)$, on aura, comme à l'occasion des formules (10 *ter*), (10 *quater*),

$$d[\Gamma(t)F(t,u)] = \frac{d}{dt}[\Gamma(t)F(t,u)]\,dt + \Gamma(t)f(t,u)\,du;$$

puis rien n'empêchera d'écrire une telle relation pour tous les éléments successifs d'une

ligne quelconque menée d'un point t, u, à un autre point t', u'; rien aussi n'empêchera de faire la somme de toutes les équations successives, c'est-à-dire de faire l'intégration d'une telle équation différentielle, ce qui donnera

$$(17)\quad \Gamma(t')\,F(t',u') - \Gamma(t)\,F(t,u) = \int_{t,u}^{t',u'} \frac{d}{dt}\{\Gamma(t)\,F(t,u)\}\,dt + \int_{t,u}^{t',u'} \Gamma(t)\,f(t,u)\,du.$$

Il est d'ailleurs évident que chacune des intégrales du second membre variera avec la forme de la courbe qu'on mènera d'un point donné t, u à un autre point donné t', u'; mais, dans l'equation (17), le premier membre ne changera pas, et, par conséquent, la somme des deux intégrales du second membre sera exactement indépendante de la forme de la courbe à laquelle on voudra les appliquer; cette somme ne dépendra jamais que du point de départ et du point d'arrivée; elle sera rigoureusement égale à l'accroissement de la fonction générale $\Gamma(t)\,F(t,u)$, à partir du point initial t, u jusqu'au point final t', u'. Par conséquent, toutes les fois que l'extrémité d'une ligne s en t', u' reviendra au point de départ de cette ligne en t, u, le premier membre de l'équation (17), se réduira à 0 et l'on aura exactement entre les deux intégrales du second membre,

$$17\ bis \qquad 0 = \int_0^s \frac{d}{dt}\{\Gamma(t)\,F(t,u)\}\,dt + \int_0^s \Gamma(t)\,f(t,u)\,du.$$

d'où l'on voit enfin que les quantités S des formules (9) et (16) seront toujours égales, mais de signes contraires, et que, pour éviter une telle opposition de signe, le sens de l'intégration devra changer de l'une à l'autre.

La véritable identité entre les formules (9) et (16) ne pourra, en un mot, être exprimée que par la relation

$$17\ ter \qquad \int_0^s \frac{d}{dt}\{\Gamma(t)\,F(t,u)\}\,dt = \int_s^0 \{\Gamma(t)\,F(t,u)\}\,du;$$

et, en effet, si l'on essayait d'appliquer directement chacune des formules (9) et (16) à l'aire quadrilatère $BB'B'_1B_1$ de la *fig* 1, on s'en assurerait très-facilement.

Je vais le faire voir d'une manière tout à fait générale, en me servant de la formule (16) pour déterminer l'aire S comprise entre deux courbes BI, B*u* et une autre courbe quelconque menée de I en C sur la *fig*. 1. Je continuerai à désigner par u_I la valeur particulière de la variable u au point I, et je désignerai par t_C la valeur particulière de t au point C.

Cela convenu, en appliquant d'abord la formule (16) le long de l'arc CB, il me faudra regarder u comme constant, et, par suite, je trouverai la quantité

$$\int_{t_C}^{t} \frac{d}{dt}\{\Gamma(t)\,F(t,u)\}\,dt = \Gamma(t)\,F(t,u) - \Gamma(t_C)\,F(t_C,u).$$

Le long de l'arc BI j'aurai t = constante, $dt = 0$, et, par suite, je trouverai 0

De I en C, le long de la courbe donnée, j'aurai à déterminer l'intégrale définie d'une fonction en t, u dans laquelle les variables t, u devront être assujetties à l'équation $\chi(t, u) = 0$ de la courbe donnée; cette intégrale définie pourra donc être obtenue à volonté sous la forme

$$a(t_C) - a(t_I),$$

ou sous la forme

$$b(u) - b(u_I),$$

et si je n'avais en vue que la valeur numérique de l'aire S pour des valeurs déterminées de t, u, je serais parfaitement libre d'employer l'une ou l'autre de ces deux expressions, mais quand il s'agira de trouver la formule générale de l'aire S pour toutes les valeurs imaginables des variables t, u, et pour une courbe indéfinie menée à travers les points C, I de la figure, je ne pourrai me dispenser d'avoir égard à la considération incidente que voici :

Dans la différence $a(t_C) - a(t_I)$ la quantité t_I variera avec u d'après la forme de la courbe donnée, c'est-à-dire d'après la relation

$$\chi(t_I, u) = 0,$$

et, par conséquent, la quantité $a(t_C)$ deviendra une fonction déterminée de u.

Pareillement, dans la différence $b(u) - b(u_I)$, la quantité u_I variera avec t d'après la relation

$$\chi(t, u_I) = 0,$$

et, par conséquent, la quantité $b(u_I)$ deviendra une fonction déterminée de t.

Ainsi, l'on aura

$$a(t_C) = \text{fonction } u = b'(u),$$

$$b(u_I) = \text{fonction } t = a'(t),$$

et, par suite,

$$a(t_C) - a(t_I) = b'(u) - a(t),$$

$$b(u) - b(u_I) = b(u) - a'(t).$$

Mais la quantité cherchée ne pourra avoir qu'une seule valeur, et, par suite de ce que t, u sont des variables arbitraires, il faudra que l'on ait identiquement

$$a'(t) = a(t), \quad b'(u) = b(u).$$

Par suite, enfin, l'on trouvera l'aire S par l'expression parfaitement déterminée

$$S = \Gamma(t) F(t, u) - \Gamma(t_C) F(t_C, u) + b(u) - a(t),$$

dans laquelle le terme $\Gamma(t_C) F(t_C, u)$ représentera une fonction de la variable u seulement.

Si l'on remonte au point de départ de ces raisonnements, et que, pour deux valeurs

déterminées de t, u, on conçoive une autre courbe $\chi_1(t, u) = 0$, par les deux mêmes points I, C, il est bien clair que les deux premiers termes de la formule ne changeront pas et que, au lieu de la différence $b(u) - a(t)$, on trouvera une expression analogue $b_1(u_1) - a_1(t_1)$.

On aura donc

$$S_1 - S = [b_1(u_1) - a_1(t_1)] - [b(u_0) - a(t_0)],$$

et l'on arriverait au même résultat en appliquant directement la formule (9) tout à l'entour de l'aire $S_1 - S$ le long des deux arcs

$$\chi(t, u) = 0, \quad \chi_1(t, u) = 0,$$

qui serviront à délimiter l'aire $S_1 - S$; mais la différence $S_1 - S$ ne sera qu'une constante, puisque les quantités t, u sont supposées avoir les valeurs déterminées t_C, u_1 des points I, C.

La deuxième courbe $\chi_1(t, u) = 0$ pouvant être prolongée indéfiniment sur la figure, on aura l'expression générale correspondante

$$S_1 = \Gamma(t) F(t, u) - \Gamma(t_C) F(t_C, u) - b_1(u_1) - a_1(t_1),$$

et, au point de vue purement algébrique de la question, pour deux courbes indéfinies supposées données, la différence $S_1 - S$ se réduira toujours à une expression de la forme

$$\sigma = S_1 - S = \alpha(t) + \beta(u);$$

puis, quand on passera de t à t' sans faire varier u, on aura

$$\sigma' - \sigma = \alpha(t') - \alpha(t),$$

et pareillement, quand on passera de u à u' sans faire varier t, on aura

$$\sigma' - \sigma = \beta(u') - \beta(u),$$

ce qui fera comprendre très-clairement la signification générale des fonctions $\alpha(t)$, $\beta(u)$ sur la figure.

Je reviens maintenant à la formule (16), et je suppose que la courbe donnée au lieu d'aller d'une manière quelconque de I en C, descende d'abord en I_0, et suive ensuite l'axe des v jusqu'au point u.

Alors, de u en B le long de la courbe $\psi(v, p) =$ constante u, je trouverai la quantité

$$\Gamma(t) F(t, u) - \Gamma(t_0) F(t_0, u).$$

De B en I le long de la courbe $\varphi(v, p) =$ constante, je trouverai 0.

De I en I_0, je trouverai une expression déterminée qui devra finalement être envisagée comme une fonction $a(t)$ de la variable t.

Au lieu d'aller directement de I_0 en u, je pourrai aller d'abord de I_0 en O, et ensuite de O en u.

En allant de I_0 en O, je ne trouverai qu'une certaine constante; puis, de O en u,

j'aurai à m'occuper de la quantité

$$\int_{t_0, u_0}^{t, u} \frac{d}{dt}[\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u)]\,dt,$$

dans laquelle, après avoir effectué la différentiation indiquée, je devrai établir entre t, u la relation voulue le long de l'axe des v; cela étant sous-entendu, j'aurai l'expression générale

$$\mathrm{S} = \Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u) - \Gamma(t_0)\,\mathrm{F}(t_0, u_0) + a(t) + \text{constante} - \int_{t_0, u_0}^{t, u} \frac{d}{dt}[\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u)]\,dt,$$

puis, de la formule (17), appliquée spécialement de O en u, je conclurai

$$\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u) - \Gamma(t_0)\,\mathrm{F}(t_0, u_0) = \int_{t_0, u_0}^{t, u} \frac{d}{dt}\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u)\,dt + \int_{u_0}^{u} \Gamma(t_0)\,f(t_0, u)\,du,$$

et, par conséquent, l'expression trouvée de S sera de la forme

$$\mathrm{S} = \Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u) + a(t) + \text{constante} - \int_{u_0}^{u} \Gamma(t_0)\,f(t_0, u)\,du,$$

comme celle que j'ai eue précédemment par une application de la formule (9); par conséquent aussi, j'en déduirai toutes les mêmes conséquences et je retrouverai les formules (15).

J'observe maintenant que, d'après les formules (14) et (15), il me sera toujours permis d'écrire

$$dQ = dB + \frac{d\omega(u)}{du}\,du.$$

$$(18)\quad \begin{cases} d(\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u)) = dC + \dfrac{d\omega(u)}{du}\,du, \\ \dfrac{d}{dt}[\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u)] = \dfrac{dC}{dt}, \\ \dfrac{d}{du}[\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u)] = \Gamma(t)\,f(t, u) = \dfrac{dC}{du} + \dfrac{d\omega(u)}{du}, \end{cases}$$

et que, par suite, les équations (10), (10 *ter*) se réduiront aux relations purement géométriques

$$(19)\quad \begin{cases} dB = \dfrac{dC}{du}\,du - p\,dv, \\ dA = \dfrac{dC}{dt}\,dt + p\,dv \end{cases}$$

dont la simple addition me fera trouver

$$dA + dB = dC.$$

et, sous forme finie,

$$A + B = C.$$

De même, s'il me plaisait d'abaisser une perpendiculaire du point B sur l'axe Op, et de désigner par A_1, B_1 les deux aires correspondantes, les équations (10 *bis*), (10 *quater*) se réduiraient à

$$(19\ bis)\quad \begin{cases} dB_1 = \dfrac{dC}{du}\,du + v\,dp, \\ dA_1 = \dfrac{dC}{dt}\,dt - v\,dp, \end{cases}$$

et me feraient trouver par leur simple addition

$$A_1 + B_1 = C;$$

puis, par leur soustraction des formules (19),

$$B_1 - B = A - A_1 = vp;$$

ce qui est évident de soi-même sur la *fig.* 1 et rendra les formules (19 *bis*) inutiles, puisqu'on sera toujours libre de parvenir aux mêmes résultats en faisant

$$v\,dp = d(vp) - p\,dv,$$

$$B + vp = B_1,$$

$$A - vp = A_1.$$

Je ne m'arrêterai pas à faire voir avec quelle grande facilité on parviendrait à représenter exactement dans leurs grandeurs finies les aires uBB_1u_1, $uB'B'_1u_1$, $ABB'A'$, $A_1B_1B'_1A'_1$, ABB_1A_1, $A'B'B'_1A'_1$, et, enfin, l'aire quadrilatérale $BB'B'_1B_1$, si l'on connaissait les fonctions A, B, C en t, u.

Je me bornerai à faire remarquer que lorsque les différences $t' - t$, $u_1 - u$ seront infiniment petites, on trouvera les mêmes relations sous les formes plus simples que voici

$$\frac{dC}{du}\,du = \text{aire } uBB_1u_1,$$

$$\frac{dC}{dt}\,dt = \text{aire } HIBB'I'H',$$

$$\frac{dB}{dt}\,dt = -p\,\frac{dv}{dt}\,dt = \text{aire } ABB'A',$$

$$\frac{dA}{du}\,du = +p\,\frac{dv}{du}\,du = \text{aire } ABB_1A_1.$$

On trouvera encore :

$$\frac{dB}{du}\,du = \text{aire } uBB_1u_1 - \text{aire } ABB_1A_1 = \frac{dC}{du}\,du - \frac{dA}{du}\,du,$$

$$\frac{dA}{dt}\,dt = \text{aire } HIBB'I'H' - \text{aire } ABB'A' = \frac{dC}{dt}\,dt - \frac{dB}{dt}\,dt,$$

et il ne sera pas nécessaire de chercher tout cela sur la *fig.* 1, car la première des équations (19) équivaudra aux deux équations partielles

$$\frac{dB}{dt} = -p\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{dB}{du} = \frac{dC}{du} - p\frac{dv}{du}.$$

et la seconde équivaudra aux deux équations partielles

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dC}{dt} + p\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{dA}{du} = +p\frac{dv}{du};$$

mais, à raison de la relation

$$C = A + B,$$

cela ne fera que les deux conditions distinctes

$$(20)\quad \begin{cases} \dfrac{dB}{dt} = -p\dfrac{dv}{dt}, \\[2ex] \dfrac{dA}{du} = +p\dfrac{dv}{du}, \end{cases}$$

et les deux équations (19) se réduiront elles-mêmes à la formule unique

$$(21)\quad p\,dv = \frac{dA}{du}\,du - \frac{dB}{dt}\,dt,$$

qui est directement évidente sur la *fig.* 1, et dont le second membre, après avoir été divisé par p, devra être une différentielle exacte.

Les équations (19 *bis*) se réduiront de même à la relation unique

$$(21\ bis)\quad v\,dp = -\frac{dA_1}{du}\,du + \frac{dB_1}{dt}\,dt.$$

Les équations (19), où la valeur de dv tirée de la formule (21), comme aussi la valeur de dp tirée de la formule (21 *bis*), seront naturellement des différentielles exactes, sans condition aucune, quand on aura réussi à calculer les deux quantités A, B d'après les formes algébriques supposées données des fonctions $\varphi(v, p) = t$, $\psi(v, p) = u$; mais quand l'une de ces fonctions ne sera pas connue, ou que le calcul des aires A, B

n'aura pu être effectué complétement, on sera obligé de faire marcher de pair avec les formules (19), ou avec la formule (21), la condition algébriquement nécessaire pour que celle des formules que l'on voudra ou devra employer soit, en effet, une différentielle exacte.

J'ai fait voir depuis longtemps comment cette condition pourra être exprimée par l'une des équations (11), (11 *bis*), (12), (12 *bis*), (13), (13 *bis*), dans lesquelles il sera toujours permis de remplacer les quantités $\Gamma(t)f(t, u)$ et Q par C et B, et qui, elles-mêmes, prendraient encore de nouvelles formes si je voulais y introduire la quantité A, ou bien les quantités vp, A_1, B_1, C_1, sans parler des cas non examinés où il me plairait de prendre comme variables indépendantes, soit p, t, soit v, u, soit p, u.

Je ne veux pas m'arrêter à de pareils développements ici.

J'ai voulu faire voir seulement quelle était la plus simple expression possible en même temps que la fécondité des relations purement géométriques du sujet que j'ai à traiter. Je dis des relations purement géométriques du sujet que j'ai à traiter, car les équations (19), (19 *bis*), (20) et (21) s'appliqueront à tels systèmes de courbes entre-croisées que l'on voudra dans un plan, et si j'exprimais que l'angle d'entre-croisement doit être égal à un angle droit, je me trouverais amené aux difficultés du problème des courbes orthogonales.

Toute cette théorie ne prendra une signification calorifique que lorsqu'aux équations (19), (20) et (21) on joindra les équations (14), (15), (18), et alors, plutôt que d'employer un si long cortège d'équations, il sera préférable de ne faire usage que des deux relations (10) et (10 *ter*), qui se confondront, en réalité, avec les équations (19).

Je poserai donc

$$(22)\quad \begin{cases} \Gamma(t)F(t, u) = R, \\ \Gamma(t)dq = \Gamma(t)f(t, u)\,du = \dfrac{dR}{du}\,du, \end{cases}$$

$$(23)\quad \begin{cases} dQ = \Gamma(t)f(t, u)\,du - p\,dv = \dfrac{dR}{du}\,du - p\,dv, \\ dA = \dfrac{d}{dt}[\Gamma(t)F(t, u)]\,dt + p\,dv = \dfrac{dR}{dt}\,dt + p\,dv, \end{cases}$$

et, en ajoutant les deux formules (23), je trouverai sous forme finie

$$A + Q = R,$$

la quantité Q devant avoir la signification voulue par les formules (14) et (14 *bis*), c'est-à-dire

$$Q = B + \int_{u_0}^{u} \Gamma(t_0)f(t_0, u)\,du,$$

ce qui entraînera

$$R - A + Q = C + \int_{u_0}^{u} \Gamma(t_0) f(t_0, u) du,$$

conformément aux équations (15).

Les formules (22) *et* (23) *seront*, en un mot, *les équations nécessaires et suffisantes de la théorie des effets dynamiques de la chaleur*, et les dissertations auxquelles je me suis livré jusqu'ici n'auront servi qu'à en faire comprendre l'entière portée ainsi que la vraie signification.

Le but essentiel que j'avais en vue, indépendamment du désir de répandre un grand nombre d'éclaircissements purement géométriques sur la *fig.* 1, c'était de faire voir que l'on sera toujours parfaitement libre d'intégrer chacune des équations (23) le long d'une courbe menée arbitrairement sur la *fig.* 1 d'un point donné t_0, u_0 à un autre point donné t_1, u_1, et que, de cette manière, on aura généralement

$$(24)\quad \begin{cases} Q_1 - Q_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dR}{du} du - \int_0^1 p\, dv, \\ A_1 - A_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dR}{dt} dt + \int_0^1 p\, dv, \end{cases}$$

la différence $Q_1 - Q_0$ et chacun des deux termes de cette différence ayant des significations physiques très importantes, tandis que la différence $A_1 - A_0$ et les deux termes de cette différence ne seront que des quantités auxiliaires, venues d'une règle abstraite de calcul, en vertu de laquelle on aura toujours

$$(24\ bis)\qquad R_1 - R_0 = \int_0^1 \frac{dR}{dt} dt + \int_0^1 \frac{dR}{du} du,$$

ce qui fera trouver

$$Q_1 - Q_0 + A_1 - A_0 = R_1 - R_0,$$

et, en intervertissant,

$$A_1 + Q_1 - R_1 = A_0 + Q_0 - R_0,$$

conformément à la relation déjà connue

$$A + Q = R;$$

ou, réciproquement, ce qui à l'aide de cette dernière relation, fera rentrer les équations (23) l'une dans l'autre.

De ce point de vue général de la question, j'ai voulu notamment faire dépendre le cas particulier où, en allant le long d'un arc de courbe quelconque s, de t_0, u_0 en t_1, u_1, l'arc s se refermera par la jonction de ses deux extrémités, ce qui réduira les for-

mules (24) à

(24 *ter*)
$$\begin{cases} 0 = \int_0^{v} \frac{dR}{du}\, du - \int_0^{v} p\, dv, \\ 0 = \int_0^{v} \frac{dR}{dt}\, dt - \int_0^{v} p\, dv, \end{cases}$$

et la formule (24 *bis*) à

(24 *quater*)
$$0 = \int_0^{v} \frac{dR}{dt}\, dt - \int_0^{v} \frac{dR}{du}\, du.$$

J'ai d'ailleurs été amené à concevoir directement la première des formules (24 *ter*) d'après la seule connaissance de la formule (3) qui provenait du mode de raisonnement un peu étendu ou perfectionné de M. Carnot, et de cette unique donnée j'ai pu m'élever au cas le plus général des formules (23) et (24) par une marche de raisonnement absolument rigoureuse.

Il m'a fallu chercher la condition algébriquement nécessaire pour que les formules (24 *ter*) et (24) pussent réellement avoir lieu, et cette condition exigeait que le second membre de l'une ou de l'autre des équations (23) fût une différentielle exacte, ce qui m'a fait trouver les équations (11) et (11 *bis*), (12) et (12 *bis*), (13) et (13 *bis*), selon que je prenais comme variables indépendantes ou u, t, ou v, p, ou v, t.

J'ai fait voir encore que la condition en question était susceptible d'être transformée de bien des manières entre les dérivées partielles des quantités v, p, vp, A, Q, R en t, u, et que, finalement, les équations (23) devaient avoir lieu comme de pures identités par rapport à deux quelconques des quantités t, u, v, p, vp, A, Q, R prises comme variables indépendantes, ce qui faisait entrevoir un nouveau champ de transformations fort étendu; ce qui me permettrait, enfin, à l'aide de la relation fondamentale

(25)
$$R = A - Q,$$

de laisser entièrement de côté les deux équations (23) et d'y substituer la relation unique

(26)
$$p\, dv = \frac{dA}{du}\, du - \frac{dQ}{dt}\, dt,$$

qui ne sera plus une différentielle exacte, mais de laquelle il devra être possible de tirer sous la forme d'une différentielle exacte soit dv, soit du, soit dt, et même dp quand on voudra faire usage encore de la relation auxiliaire

$$v\, dp = d(vp) - p\, dv = d(vp) - \frac{dA}{du}\, du + \frac{dQ}{dt}\, dt.$$

La formule (26) est directement évidente à la seule inspection de la page 1, et, au point de vue purement algébrique des choses, il pourrait être assez avantageux d'en faire usage en lieu et place des équations (23); mais, du moment où il s'agira d'avoir

égard aux significations physiques des quantités A, Q, R, l'équation (26) perdra toute son importance, et il sera préférable d'y substituer la première des équations (23) qui est

$$dQ = \Gamma(t) f(t, u)\, du - p\, dv,$$

(27) sauf quelquefois à y joindre la relation complémentaire

$$dA = \frac{d}{dt}[\Gamma(t) f(t, u)]\, dt + p\, dv,$$

dont la simple addition, avec la précédente, fera avoir

$$A + Q = R.$$

Je réussirai, par la suite, à trouver sous formes finies et bien explicites les solutions générales des formules (23) et (26), ainsi que des équations (11), (11 *bis*), (12), (12 *bis*), (13), (13 *bis*), etc., en me donnant arbitrairement, soit A en v, t et R en t, u, soit Q en v, u et R en t, u, soit enfin A en v, t et Q en v, u.

J'aurais pu expliquer ces méthodes générales d'intégration ici; mais après y avoir réfléchi, il m'a semblé préférable de ne les exposer que progressivement dans l'ordre naturel des idées par lesquelles j'y ai été conduit en voulant résoudre des problèmes de plus en plus élevés de la théorie des gaz permanents et de celle des vapeurs.

CHAPITRE IV.

Discussion des propriétés calorifiques d'un fluide élastique par rapport à des accroissements infiniment petits des quantités v, p, t, u sans que l'on préjuge rien de la nature intime de la chaleur. — De la manière dont ces propriétés générales dépendront des différentielles exactes $dQ = \Gamma(t) f(t, u)\, du - p\, dv$, $dA = \frac{d}{dt}[\Gamma(t) F(t, u)]\, dt + p\, dv$.

La théorie des effets dynamiques de la chaleur ayant été ramenée par les formules (23) ou (27) à l'équation principale

$$dQ = \Gamma(t) f(t, u)\, du - p\, dv = \frac{dR}{du}\, du - p\, dv,$$

(A) à laquelle n'est venue s'adjoindre l'équation complémentaire

$$dA = \frac{d}{dt}[\Gamma(t) F(t, u)]\, dt + p\, dv = \frac{dR}{dt}\, dt + p\, dv,$$

que par une règle abstraite de calcul en vertu de laquelle on aura toujours, sous forme finie,

$$A + Q = R,$$

il me reste encore à développer la partie la plus importante du sujet, celle des quantités de chaleur nécessaires pour faire aller les variables v, p d'un fluide élastique d'un point donné B à un autre point quelconque B'_1 sur la *fig.* 1.

Pour cela, je retourne à la seconde des formules (22), ou plutôt à la première des formules (7), qui est

$$(B) \qquad dq = f(t, u)\, du,$$

et qui représente, en principe, la quantité de chaleur nécessaire de B en B_1 pour un accroissement infiniment petit de la variable u le long de la courbe $\varphi(v, p) =$ constante t. Cette quantité est de la *chaleur latente*, c'est-à-dire de la chaleur qui ne peut impressionner le thermomètre, parce que la température t est constante le long de la courbe BB_1, et la dénomination usitée de chaleur latente acquiert ainsi pour tous les gaz permanents la même signification que celle qu'elle a reçue depuis longtemps pour les vapeurs. La seule différence qu'il y aura, c'est que pendant la formation d'une vapeur, la courbe $\varphi(v, p) =$ constante t deviendra une ligne droite parallèle à l'axe Ov, comme sur la *fig.* 2.

D'un point quelconque t, u à un autre point t, u_1 le long d'une courbe $\varphi(v, p) =$ constante t, la quantité de chaleur latente sera

$$(C) \qquad q = \int_u^{u_1} f(t, u)\, du = F(t, u_1) - F(t, u).$$

Quand il s'agira d'aller du point B à un autre point infiniment rapproché B'_1 à côté de la courbe BB_1, on pourra aller, d'abord de B en B_1, puis de B_1 en B'_1 le long d'une courbe $\psi(v, p) =$ constante u_1.

De B en B_1, on dépensera une quantité de chaleur

$$dq = f(t, u)\, du,$$

et le thermomètre restera stationnaire. De B_1 en B'_1 la température augmentera par suite d'une dépense de travail égale à l'aire $A_1 B_1 B'_1 A'_1$, mais on ne fera aucune dépense de chaleur.

D'un autre côté, on pourra aller, d'abord de B en B', puis de B' en B'_1.

De B en B', par suite d'une dépense de travail égale à l'aire ABB'A', la température éprouvera le même accroissement dt que de B_1 en B'_1, mais on ne fera aucune dépense de chaleur. De B' en B'_1 la variable u éprouvera le même accroissement du que de B en B_1, et l'on dépensera une quantité de chaleur

$$dq' = f(t + dt, u)\, du = f(t, u)\, du + \frac{d}{dt} f(t, u)\, dt\, du.$$

Ainsi, les quantités dq, dq' différeront infiniment peu l'une de l'autre quand les points B, B'_1 seront infiniment rapprochés, et de cette circonstance je conclus que, pour aller de B en B'_1 le long d'une courbe quelconque, il suffira que le chemin BB'_1 soit d'une longueur infiniment petite ds, pour que, à un infiniment petit du second ordre

près, la quantité de chaleur à dépenser soit égale au terme différentiel du premier ordre $dq = f(t, u)\,du$.

Donc, le long d'une courbe indéfinie BB'₁ E, à partir d'un point donné t_0, u_0 jusqu'à un autre point t_1, u_1 d'une telle courbe, j'aurai à faire la somme de tous les termes consécutifs $dq = f(t, u)\,du$, ce qui me ramènera à la formule (8) déjà connue,

$$\text{D} \qquad C = \int_{u}^{u_1} f(t, u)\,du,$$

les variables t, u de cette formule devant être assujetties, pendant le cours de l'intégration, à la relation

$$\chi(t, u) = 0,$$

qui sera l'équation de la courbe BB'₁ E en t, u, et au moyen de laquelle on trouvera l'équation de la même courbe en v, p sous la forme

$$\chi[\varphi(v, p), \psi(v, p)] = 0.$$

Je crois avoir mis cela hors de toute contestation à l'occasion des formules (7) et (8), et je ne m'y arrêterai pas davantage ici.

Mais je dois faire observer que la formule (D) suppose implicitement qu'il est permis de faire une somme de différentes quantités de chaleur dq venant de températures très-différentes, ce qui est choquant en soi-même au point de vue physique des choses tant que la fonction $\Gamma(t)$ ne devra pas être remplacée par une constante dans la théorie; car, j'ai fait remarquer depuis longtemps, aussitôt après l'établissement de la formule (3), que si l'on veut éviter la nécessité d'admettre une perte de force vive dans le phénomène de la transmission libre de la chaleur entre deux corps A, A' à des températures différentes t, t', alors que la fonction universelle $\Gamma(t)$ n'est pas supposée égale à une constante, il faut que l'on érige en principe que toute somme de chaleur q', venue librement d'un corps à une température t' dans un autre corps à une température t, acquerra dans ce dernier corps une valeur différente q, d'après la relation

$$0 = q'\Gamma(t') - q\Gamma(t),$$

de laquelle on tirera

$$q = \frac{q'\Gamma(t')}{\Gamma(t)}.$$

Or, à ce point de vue, la formule (8) ou (D) n'aurait plus de sens, et pour la rectifier, il faudrait concevoir une certaine température fixe T, à laquelle on commencerait par rapporter toute quantité élémentaire de chaleur dq venue d'une température différente t.

Une somme de chaleur dq à la température t vaudrait, en réalité,

$$\frac{\Gamma(T)\,dq}{\Gamma(t)},$$

à la température fixe T, et, par suite, la formule (8) ou (D) devrait être remplacée par

$$(D') \qquad C = \frac{1}{\Gamma(T)} \int_{u_0}^{u_1} \Gamma(t) f(t, u) du,$$

ce qui reviendrait à dire, en d'autres termes, que la vraie mesure de la chaleur doit être, non pas le terme $f(t, u)\,du$, mais le produit $\Gamma(t) f(t, u)\,du$.

Il ne s'agirait plus, enfin, que de savoir si les quantités de chaleur mesurées par les physiciens sont véritablement de l'espèce $\Gamma(t)\,dq$, ou de l'espèce dq seulement, de mes raisonnements : dans le premier cas, il faudrait s'empresser de remplacer la fonction $\Gamma(t)$ par une constante G dans la théorie; et, dans le second cas, il faudrait conserver la fonction $\Gamma(t)$ comme une quantité variable avec t.

Or, dans ce qui va suivre ici, je n'aurai à m'occuper que des quantités de chaleur nécessaires pour aller d'un point t, u à un autre point infiniment rapproché $t + dt$, $u + du$; je ne me servirai donc ni de la formule (D), ni de la formule (D'), mais de la formule (B) seulement. Les quantités de chaleur dq dont je m'occuperai seront toujours de l'espèce des quantités q, q' de la formule (3), c'est-à-dire des quantités de chaleur venant d'un corps entretenu à une température donnée t ou t', et allant dans un autre corps dont la température sera infiniment peu différente.

De cette manière, je resterai dans l'entière rectitude de mes raisonnements sans être obligé de me prononcer absolument, ni sur la nature de la fonction universelle $\Gamma(t)$ (que, pour plus de généralité, je conserverai dans mes formules), ni sur la manière dont la chaleur pourra se transmettre, et changer ou ne pas changer dans sa quantité, entre des corps librement en présence, à des températures très-différentes t, t'.

Ainsi d'un point quelconque t, u à un autre point infiniment rapproché $t + dt$, $u + du$, j'aurai constamment

$$dq = f(t, u)\,du;$$

puis, des expressions algébriques des quantités v, p en t, u, je conclurai

$$dv = \frac{dv}{dt} dt + \frac{dv}{du} du.$$

$$dp = \frac{dp}{dt} dt + \frac{dp}{du} du.$$

Ce seront les accroissements des coordonnées v, p pour deux accroissements donnés dt, du sur la *fig.* 1, et toutes les fois que je supposerai $u =$ constante, je trouverai

$$dv = \frac{dv}{dt} dt, \quad dp = \frac{dp}{dt} dt, \quad dq = 0.$$

Quand, au contraire, je supposerai $t =$ constante, je trouverai

$$dv = \frac{dv}{du} du, \quad dp = \frac{dp}{du} du,$$

ou, inversement,

$$du = \frac{dv}{\frac{dv}{du}} = \frac{dp}{\frac{dp}{du}},$$

et, par suite, *la quantité de chaleur latente proprement dite* de B en B_1, le long d'une courbe $\varphi(v, p) =$ constante t, pourra être mise sous les deux formes équivalentes

$$(E) \quad \left\{ \begin{aligned} dq = f(t, u)\, du &= \frac{f(t, u)}{\frac{dv}{du}}\, dv, \\ &= \frac{f(t, u)}{\frac{dp}{du}}\, dp. \end{aligned} \right.$$

Le long de toute autre courbe BB'_1, la température t variera, et l'on aura à volonté

$$(F) \quad \left\{ \begin{aligned} dq = f(t, u)\, du &= \frac{f(t, u)}{\frac{dv}{du}} \left(dv - \frac{dv}{dt}\, dt \right), \\ &\text{ou} \\ dq = f(t, u)\, du &= \frac{f(t, u)}{\frac{dp}{du}} \left(dp - \frac{dp}{dt}\, dt \right); \end{aligned} \right.$$

puis, quand on fera

$$p = \text{constante} \quad \text{ou} \quad dp = 0,$$

on trouvera *la chaleur spécifique à pression constante* sous la forme

$$(F') \qquad c_0 = \left(\frac{dq_0}{dt} \right) = - \frac{f(t, u) \frac{dp}{dt}}{\frac{dp}{du}},$$

et quand on fera

$$v = \text{constante} \quad \text{ou} \quad dv = 0,$$

on trouvera *la chaleur spécifique à volume constant* sous la forme

$$(F'') \qquad c_1 = \left(\frac{dq_1}{dt} \right) = - \frac{f(t, u) \frac{dv}{dt}}{\frac{dv}{du}}.$$

Les produits $c_0 dt$, $c_1 dt$ sont nommés ordinairement les quantités de chaleur sensibles à pression constante et à volume constant.

Les formules (F) peuvent être interprétées alors très-simplement en disant que la

quantité de chaleur dq pour aller d'un point à un autre sera toujours la somme de la chaleur sensible à volume constant et de la chaleur latente proprement dite qui dépendra du seul accroissement de volume, ou bien la somme de la chaleur sensible à pression constante et de la chaleur latente proprement dite qui dépendra du seul accroissement de la pression, ces deux sommes étant nécessairement égales à cause de l'équation de condition

$$du = \frac{dv - \frac{dv}{dt}dt}{\frac{dv}{du}} = \frac{dp - \frac{dp}{dt}dt}{\frac{dp}{du}}.$$

On pourra aussi se donner arbitrairement les accroissements dv, dp, et alors il n'y aura ni double interprétation ni équation de condition, car l'on trouvera les deux relations parfaitement déterminées

$$dt = \frac{-\frac{dp}{du}du + \frac{dv}{du}dp}{\frac{dp}{dt}\frac{dv}{du} - \frac{dp}{du}\frac{dv}{dt}},$$

$$du = \frac{\frac{dp}{dt}dv - \frac{dv}{dt}dp}{\frac{dp}{dt}\frac{dv}{du} - \frac{dp}{du}\frac{dv}{dt}}.$$

dont la première fera connaître l'accroissement dt et dont la seconde entraînera

$$dq = f(t, u)\,du = \frac{f(t, u)\frac{dp}{dt}}{\frac{dp}{dt}\frac{dv}{du} - \frac{dp}{du}\frac{dv}{dt}}dv - \frac{f(t, u)\frac{dv}{dt}}{\frac{dp}{dt}\frac{dv}{du} - \frac{dp}{du}\frac{dv}{dt}}dp;$$

puis, au moyen de l'équation (11), il sera permis d'écrire

$$dt = -\frac{\frac{dp}{du}}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t)f(t, u)]}dv + \frac{\frac{dv}{du}}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t)f(t, u)]}dp,$$

$$dq = \frac{f(t, u)\frac{dp}{dt}}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t)f(t, u)]}dv - \frac{f(t, u)\frac{dv}{dt}}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t)f(t, u)]}dp,$$

et quand on fera d'abord

$$p = \text{constante}, \quad dp = 0,$$

on trouvera

$$\text{G)}\quad \left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{T}_0 = \left(\frac{dt}{dv}\right) = -\frac{\dfrac{dp}{du}}{\dfrac{d}{dt}\{\Gamma(t)f(t,u)\}},\\
&q_0 = \left(\frac{dq}{dv}\right) = \frac{f(t,u)\dfrac{dp}{dt}}{\dfrac{d}{dt}\{\Gamma(t)f(t,u)\}}.\\
&\text{Quand, au contraire, on fera } v = \text{constante}, \ dv = 0, \text{ on trouvera}\\
&\mathfrak{T}_1 = \left(\frac{dt}{dp}\right) = \frac{\dfrac{dv}{du}}{\dfrac{d}{dt}\{\Gamma(t)f(t,u)\}},\\
&q_1 = \left(\frac{dq}{dp}\right) = -\frac{f(t,u)\dfrac{dv}{dt}}{\dfrac{d}{dt}\{\Gamma(t)f(t,u)\}},\\
&\text{et, à l'aide des quatre quantités } \mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_1, q_0, q_1, \text{ on aura généralement}\\
&\qquad dt = \mathfrak{T}_0\,dv + \mathfrak{T}_1\,dp,\\
&\qquad dq = q_0\,dv + q_1\,dp;\\
&\text{par suite, l'on pourra calculer la quantité}\\
&\qquad c = \frac{dq}{dt} = \frac{q_0\,dv + q_1\,dp}{\mathfrak{T}_0\,dv + \mathfrak{T}_1\,dp},
\end{aligned}\right.$$

qui meritera d'être nommee la chaleur specifique d'un fluide elastique dans la direction ds allant d'un point quelconque v, p à un autre point infiniment voisin $v + dv$, $p + dp$; car il suffira d'y faire respectivement $p =$ constante et $v =$ constante, pour en déduire, comme cas particuliers, les quantités de chaleur specifiques, déjà connues dans des directions parallèles aux axes Ov et Op sur la *fig.* 1,

$$c_0 = \frac{q_0}{\mathfrak{T}_0}, \quad c_1 = \frac{q_1}{\mathfrak{T}_1}.$$

Le produit $c\,dt$ représentera, en un mot, de la chaleur sensible dans la direction ds allant d'un point v, p à un autre point $v + dv$, $p + dp$, et la dénomination de chaleur latente n'aura plus aucune signification directe; car, pour deduire des formules (G) ce qui vraiment sera de la chaleur latente le long d'une courbe $\varphi(v, p) =$ constante t, de B en B$_1$, il faudra qu'on fasse $dt = 0$, et, par conséquent,

$$0 = \mathfrak{T}_0\,dv + \mathfrak{T}_1\,dp,$$

d'où

$$dp = -\frac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{S}_1}\,dv \quad \text{ou} \quad dv = -\frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}_0}\,dp,$$

et, par suite,

$$dq = \frac{q_0\mathfrak{S}_1 - q_1\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{S}_1}\,dv = -\frac{q_0\mathfrak{S}_1 - q_1\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{S}_0}\,dp,$$

ce qui, toute réduction faite après la substitution des valeurs de $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$, q_0, q_1, d'après les formules (G), coïncidera, il est vrai, avec les formules (E), mais ne pourra plus être considéré comme une chose simple à cause de la manière indirecte dont j'y serai parvenu.

Il y a à faire remarquer encore que, dans ce cas-là, on trouvera une valeur infiniment grande pour c, et que jamais la connaissance des deux chaleurs spécifiques principales c_0, c_1 ne suffira pour faire connaître la quantité finie c ou le produit infiniment petit $c\,dt$ dans une direction quelconque ds; j'en conclus que, lorsqu'on voudra prendre v, p comme variables indépendantes, on devra abandonner à la fois l'idée de chaleur latente et l'idée de chaleur sensible ou de chaleur spécifique, pour ne considérer comme des choses simples que les quatre quantités $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$, q_0, q_1 des formules (G).

J'ai voulu faire voir, en un mot, par cette dissertation, que les locutions usitées de chaleur latente, de chaleur spécifique et de chaleur sensible ne devaient pas être entendues comme ayant des significations absolument distinctes applicables chacune à des phénomènes calorifiques très-différents les uns des autres; car j'ai fait voir très-clairement que, pour aller de B en B'$_1$ sur la *fig.* 1, la même quantité $dq = f(t, u)\,du$, qui était de la chaleur latente seulement quand t, u étaient les deux variables indépendantes, a dû être remplacée par de la chaleur latente proprement dite et par de la chaleur sensible quand je voulais prendre comme variables indépendantes soit v, t, soit p, t, et que, enfin, quand il me plaira de prendre v, p comme variables indépendantes, il ne devra plus être question ni de chaleur latente ni de chaleur sensible, mais bien des quantités de chaleur q_0, q_1 susceptibles de produire une augmentation égale à 1, d'une part dans le volume v, d'autre part dans la pression p d'un fluide élastique, tandis que la température éprouvera les accroissements correspondants $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$.

Ce dernier système, auquel on est conduit naturellement quand on prend v, p comme variables indépendantes, est le plus convenable au point de vue des relations fondamentales

$$\varphi(v, p) = t, \quad \psi(v, p) = u$$

et des interprétations géométriquement possibles sur la *fig.* 1; je vais donc le développer en entier, en partant directement de l'équation (B).

J'aurai d'abord

$$dt = \frac{dt}{dv}\,dv + \frac{dt}{dp}\,dp,$$

$$du = \frac{du}{dv}\,dv + \frac{du}{dp}\,dp,$$

et, par suite,

$$dq = f(t, u)\,du = f(t, u)\frac{du}{dv}\,dv + f(t, u)\frac{du}{dp}\,dp.$$

Je conviendrai de poser

$$\frac{dt}{dv} = \mathfrak{S}_0, \quad \frac{dt}{dp} = \mathfrak{S}_1,$$

$$f(t, u)\frac{du}{dv} = q_0, \quad f(t, u)\frac{du}{dv} = q_1,$$

ce qui me donnera les deux relations essentielles

$$dt = \mathfrak{S}_0\,dv + \mathfrak{S}_1\,dp,$$
$$dq = q_0\,dv + q_1\,dp.$$

Je désignerai encore par ds la petite longueur menée d'un point v, p à un point voisin $v + dv$, $p + dp$, et par δ l'angle de la droite ds avec l'axe Ov sur la *fig.* 1, ce qui me donnera

$$(\mathrm{H}) \quad \begin{cases} dv = ds\cos\delta, \quad dp = ds\sin\delta, \\ dt = (\mathfrak{S}_0\cos\delta + \mathfrak{S}_1\sin\delta)\,ds, \\ dq = f(t, u)\,du = (q_0\cos\delta + q_1\sin\delta)\,ds, \\ c = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{q_0\cos\delta + q_1\sin\delta}{\mathfrak{S}_0\cos\delta + \mathfrak{S}_1\sin\delta} \end{cases}$$

De cette manière, les rapports des accroissements dt, dq à l'élément ds seront toujours finis et la quantité c ne passera à l'infini que lorsque le dénominateur de la dernière des formules (H) se réduira à zéro, ce qui entraînera

$$dt = 0, \quad t = \text{constante}.$$

La quantité c deviendra nulle, au contraire, quand le numérateur se réduira à zéro, ce qui entraînera

$$dq = 0, \quad du = 0, \quad u = \text{constante}.$$

Il suit de là que, en désignant par α, β les obliquités des tangentes aux courbes φ, ψ avec l'axe Ov, on devra avoir respectivement

$$0 = \mathfrak{S}_0\cos\alpha + \mathfrak{S}_1\sin\alpha, \quad 0 = q_0\cos\beta + q_1\sin\beta.$$

d'où l'on tirera

$$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{\mathfrak{S}_0}{\mathfrak{S}_1}, \quad \operatorname{tang}\beta = -\frac{q_0}{q_1}.$$

Je fais

$$a = \sqrt{\mathfrak{S}_0^2 + \mathfrak{S}_1^2}, \quad b = \sqrt{q_0^2 + q_1^2},$$

puis, en tenant compte du sens de la direction α, de B en B′, et du sens de la direc-

tion β, de B en B′ sur la *fig.* 1, je trouve

$$\cos\alpha = +\frac{\vartheta_1}{a}, \quad \cos\beta = -\frac{q_1}{b},$$

$$\sin\alpha = -\frac{\vartheta_0}{a}, \quad \sin\beta = +\frac{q_0}{b}.$$

J'en conclus d'abord

$$\sin(\beta - \alpha) = \frac{q_0\vartheta_1 - q_1\vartheta_0}{ab},$$

(I) la différence $\beta - \alpha$ représentant l'angle B′ BB$_1$, sur la *fig.* 1.

Je remonte ensuite aux formules (H) et je trouve, d'une part, le long de la courbe BB$_1$,

$$dq_{\varphi} = f(t, u)\,du = (q_0\cos\alpha + q_1\sin\alpha)\,ds_{\varphi} = \frac{q_0\vartheta_1 - q_1\vartheta_0}{a}\,ds_{\varphi},$$

d'autre part, le long de la courbe BB′,

$$dt_{\psi} = (\vartheta_0\cos\beta + \vartheta_1\sin\beta)\,ds_{\psi} = \frac{q_0\vartheta_1 - q_1\vartheta_0}{b}\,ds_{\psi}.$$

Ainsi, du moment où les physiciens seront parvenus à trouver expérimentalement les quatre quantités ϑ_0, ϑ_1, q_0, q_1 d'un fluide élastique en un point donné v, p sur la *fig.* 1, on connaîtra non-seulement les directions des tangentes aux courbes BB$_1$, BB′, mais encore la quantité de chaleur latente ou le terme calorifique fondamental $f(t, u)\,du$ le long de l'arc BB$_1$, ainsi que l'augmentation de température le long de l'arc BB′ par rapport à un élément de longueur ds sur l'un et l'autre arc.

On voit surtout que, à part les facteurs respectifs

$$\frac{1}{ab}, \quad \frac{ds_{\varphi}}{a}, \quad \frac{ds_{\psi}}{b},$$

ce sera la même quantité

$$q_0\vartheta_1 - q_1\vartheta_0$$

qui représentera à la fois le sinus de l'angle B′ BB$_1$, la quantité de chaleur latente le long de l'arc BB$_1$ et l'accroissement de la température le long de l'arc BB′.

Pour aller plus loin encore, j'observe que la discussion des formules (H) se rapporte à deux expressions seulement dont chacune est de l'espèce

$$r = m_0\cos\delta + m_1\sin\delta,$$

l'une pour les valeurs de dt et l'autre pour les valeurs de dq.

Or, si l'on désigne par

$$d = \sqrt{m_0^2 + m_1^2}$$

la diagonale d'un rectangle construit sur les longueurs m_0, m_1 comme côtes, et par ι l'angle que fera avec cette diagonale une droite menée du commun sommet des longueurs d, m_0 comme foyer, sous une obliquité δ avec le côté m_0 du rectangle, il est facile de voir que la quantité r de la formule, considérée comme une longueur sur une

telle droite oblique, deviendra la projection de la diagonale d sur la droite oblique, et que l'on aura simplement

$$r = d \cos i.$$

Donc le lieu des extrémités des longueurs r sera une circonférence de cercle décrite sur la longueur d comme diamètre, et, une fois qu'une telle circonférence aura été décrite, la quantité r sera constamment égale à la longueur du rayon vecteur qu'on pourra mener du commun sommet des longueurs d, m_0 comme foyer jusqu'à la rencontre de la circonférence.

Telle sera donc la loi mathématique, d'une part, des accroissements de température dt, et, d'autre part, des quantités de chaleur dq des formules (H).

De plus, il est facile de voir que ce que je viens de nommer la diagonale d du rectangle ou le diamètre de la circonférence deviendra, d'une part, en ce qui concerne les accroissements de température dt, la quantité a du calcul, portée comme une longueur à partir du point B sur la normale à la courbe BB_1 à travers l'aire $BB'B'_1B_1$, et, d'autre part, en ce qui concerne les quantités de chaleur dq, la quantité b du calcul, portée comme une longueur à partir du même point B sur la normale à la courbe BB', aussi à travers l'aire $BB'B'_1B_1$.

De cette manière, on comprendra de suite dans quelle direction on devra marcher pour que, à une longueur constante ds corresponde, d'une part, la plus grande valeur de dt, et, d'autre part, la plus grande valeur de dq; ce sera sur les normales aux courbes BB_1, BB' que l'on trouvera de telles valeurs maxima.

Quand on mènera une longueur ds du côté extérieur à la circonférence passant par le point B, il faudra que l'on prolonge cette longueur en sens opposé jusqu'à la rencontre de la circonférence, et l'on reconnaîtra facilement qu'un tel renversement de construction dénotera un changement de signe dans la quantité correspondante dt ou dq.

Si l'on désigne ensuite par i_a, i_b les angles i d'un rayon vecteur quelconque avec les deux diamètres a, b dirigés normalement aux courbes BB_1, BB'_1, on aura simultanément, dans la direction de ce rayon vecteur,

$$\text{K.} \quad \begin{cases} dt = a \cos i_a \, ds, \\ dq = b \cos i_b \, ds. \end{cases}$$

Si l'on désigne encore par ε l'angle compris entre les deux longueurs a, b, on aura, d'une part,

$$i_a - i_b = \text{constante } \varepsilon,$$

et, d'autre part, l'angle ε sera le supplément de l'angle $\beta - \alpha$, d'où l'on conclura

$$\sin \varepsilon = \sin(i_a - i_b) = \sin(\beta - \alpha) = \frac{q_0 z_1 - q_1 z_0}{ab},$$

et, inversement,

$$q_0 z_1 - q_1 z_0 = ab \sin \varepsilon,$$

ce qui apprend que la quantité $q_0 z_1 - q_1 z_0$ sera égale à l'aire du parallélogramme qu'on pourra former sur les longueurs a, b comme côtés.

On voit aussi qu'une telle relation ne s'appliquera pas plutôt aux quantités $\mathfrak{F}_a$, q_a et $\mathfrak{F}_b$, q_b de deux directions parallèles aux axes Ov, Op, qu'aux quantités analogues $\mathfrak{F}'_0$, q'_0 et $\mathfrak{F}'_1$, q'_1 de deux directions perpendiculaires quelconques menées par le point B sur la *fig.* 1.

Les deux dernières des formules (I) deviendront ensuite

$$dq_b = f(t, u)\,du = \frac{q_0\mathfrak{F}_1 - q_1\mathfrak{F}_0}{a}\,ds_b = b\sin\varepsilon\,ds_b,$$

$$dt_b = \frac{q_0\mathfrak{F}_1 - q_1\mathfrak{F}_0}{b}\,ds_b = a\sin\varepsilon\,ds_b.$$

et par là on voit que, sauf les facteurs ds_b, ds_b, la quantité de chaleur latente, le long de la courbe BB_1, sera égale à la plus courte distance de l'extrémité de la droite b à la longueur a, tandis que l'accroissement de la température, le long de la courbe BB', sera égale à la plus courte distance de l'extrémité de la droite a à la longueur b; c'est, en effet, ce que l'on trouverait directement dans l'un et l'autre cas, si, dans les formules (K), on mettait respectivement $\sin\varepsilon$ en place de $\cos i_a$ et $\cos i_b$, ainsi que cela résulterait de la simple inspection d'une figure sur laquelle on tracerait les deux circonférences dont a, b sont les diamètres dirigés normalement aux courbes BB_1, BB' sous un angle compris ε.

Quand on cherchera à déterminer l'écartement normal ds_a de deux courbes infiniment proches dont les équations sont $\varphi(v, p) = t$, $\varphi(v, p) = t + dt$, et, de même, l'écartement normal ds_b de deux courbes infiniment proches dont les équations sont $\psi(v, p) = u$, $\psi(v, p) = u + du$, on trouvera respectivement

$$ds_a = \frac{dt}{a}, \quad ds_b = \frac{dq}{b}.$$

puis, de la seule inspection de la figure, on conclura

$$ds_a \sin\varepsilon = ds_b, \quad ds_b \sin\varepsilon = ds_a;$$

mais je ne m'arrêterai point à cela. Je me bornerai à faire remarquer que, d'après les premières des formules (H), on aura encore

$$\left\{\begin{aligned} dv_a &= ds_a\cos\alpha = +\frac{\mathfrak{F}_a}{a}\,ds_a, \quad dv_b = ds_b\cos\beta = -\frac{q_b}{b}\,ds_b, \\ dp_a &= ds_a\sin\alpha = -\frac{\mathfrak{F}_a}{a}\,ds_a, \quad dp_b = ds_b\sin\beta = -\frac{q_b}{b}\,ds_b. \end{aligned}\right.$$

(V) et que, par suite, les deux dernières des formules (I) deviendront

$$\left\{\begin{aligned} dq_b &= f(t, u)\,du = \frac{q_0\mathfrak{F}_1 - q_1\mathfrak{F}_0}{a}\,ds_b = (q_0\mathfrak{F}_1 - q_1\mathfrak{F}_0)\frac{dv_b}{\mathfrak{F}_a} = -(q_0\mathfrak{F}_1 - q_1\mathfrak{F}_0)\frac{dp_b}{\mathfrak{F}_a}, \\ dt_b &= \frac{q_0\mathfrak{F}_1 - q_1\mathfrak{F}_0}{b}\,ds_b = -(q_0\mathfrak{F}_1 - q_1\mathfrak{F}_0)\frac{dv_b}{q_b} = +(q_0\mathfrak{F}_1 - q_1\mathfrak{F}_0)\frac{dp_b}{q_b}. \end{aligned}\right.$$

Quand, enfin, on voudra y faire entrer les chaleurs spécifiques principales c_0, c_1, on aura

$$q_0 = c_0 \vartheta_0, \quad q_1 = c_1 \vartheta_1,$$

ce qui donnera

$$\text{I} \quad \left\{ \begin{array}{l} q_0 \vartheta_1 - q_1 \vartheta_0 = \vartheta_0 \vartheta_1 (c_0 - c_1); \\ \text{et, de même que, pour des directions rectangulaires quelconques, on aura} \\ \text{toujours} \\ \qquad q'_0 \vartheta'_1 - q'_1 \vartheta'_0 = ab \sin \varepsilon = q_0 \vartheta_1 - q_1 \vartheta_0, \\ \text{de même aussi, pour de telles directions rectangulaires, on aura} \\ \qquad \vartheta'_0 \vartheta'_1 (c'_0 - c'_1) = ab \sin \varepsilon = \vartheta_0 \vartheta_1 (c_0 - c_1). \end{array} \right.$$

Donc il sera nécessaire et suffisant que la chaleur spécifique à pression constante c_0 excède la chaleur spécifique à volume constant c_1 pour que les propriétés calorifiques d'un fluide élastique puissent être d'accord avec les relations géométriques des *fig.* 1 et 2.

Si l'on avait $c_0 = c_1$ (par suite $c'_0 = c'_1$), l'angle ε serait nul et les deux courbes BB_1, BB'_1 se confondraient l'un avec l'autre. On aurait à la fois $dq_\varphi = 0$, $dt_\psi = 0$, et il ne saurait plus y avoir de phénomènes calorifiques comme ceux des *fig.* 1 et 2. Si l'on avait $c_0 < c_1$, des phénomènes analogues se produiraient dans un ordre exactement renversé.

Telles sont les propriétés générales des effets calorifiques d'un fluide élastique à l'entour d'un point donné B de la *fig.* 1 sans que l'on ait à faire aucune hypothèse sur la nature intime de la chaleur; car toute expression d'une quantité infiniment petite dz de la forme

$$dz = X\,dx + Y\,dy,$$

qu'elle soit une différentielle exacte ou non, comportera exactement les mêmes interprétations que l'expression de r des raisonnements précédents, et quand on aura à considérer le rapport de deux pareilles expressions par rapport aux mêmes accroissements dx, dy des coordonnées rectangulaires x, y d'un point dans un plan, on parviendra nécessairement à toutes les relations géométriques que je viens de développer au sujet des quantités infiniment petites dt, dq sur la *fig.* 1.

Ces relations ne prendront une signification mécanique que lorsqu'on invoquera, en outre, les formules (A) du commencement de cette dissertation, et, alors, il ne sera plus permis de considérer les quantités ϑ_0, ϑ_1, q_0, q_1 comme étant complétement indépendantes les unes des autres.

Il faudra que les quantités ϑ_0, ϑ_1, q_0, q_1 soient déterminées par les quatre premières des équations (G) quand on voudra employer t, u comme variables indépendantes; mais ce système de notations n'est pas celui qui me réussira par la suite.

Ce qu'il y aura de mieux à faire, en général, ce sera de réunir les équations (22) et la première des équations (23), c'est-à-dire l'équation (B) et la première des équa-

tions (A) en une seule expression de la forme

$$(\mathrm{L}) \qquad \Gamma(t)\,dq - \Gamma(t)f(t,u)\,du = dQ + p\,dv,$$

sauf, ensuite, à développer les différentielles exactes du, dQ, dv en fonction de celles des quantités v, p, t, u que l'on voudra faire servir de variables indépendantes.

Il y a à faire remarquer, d'ailleurs, que par cela seul qu'on aura

$$dq = f(t,u)\,du,$$

la quantité infiniment petite dq ne saurait être une différentielle exacte qu'autant que la fonction $f(t,u)$ ne dépendrait pas de la variable t.

Cela convenu, quand v, p devront être les deux variables indépendantes, on conclura immédiatement de l'équation (L),

$$(\mathrm{M}) \qquad \left\{\begin{aligned} q_0\Gamma(t) &= \Gamma(t)f(t,u)\frac{du}{dv} = \frac{dQ}{dv} + p,\\ q_1\Gamma(t) &= \Gamma(t)f(t,u)\frac{du}{dp} = \frac{dQ}{dp}; \end{aligned}\right.$$

puis, quand on éliminera Q par voie de différentiation entre les équations (M), on retrouvera la condition (12), et quand on substituera dans celle-là les dérivées de u en v, p tirées des équations (M), ou bien quand on éliminera directement par voie de différentiation les dérivées de u en v, p des équations (M), on trouvera la condition (12 *bis*).

Il faudra, en un mot, que, ne perdant pas de vue la relation connue

$$dt = \frac{dt}{dv}dv + \frac{dt}{dp}dp = \vartheta_0\,dv + \vartheta_1\,dv,$$

on ait

$$(\mathrm{N}) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{\frac{d}{dt}\{\Gamma(t)f(t,u)\}} = \frac{du}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{du}{dp}\frac{dt}{dp},\\ &\text{ou, ce qui reviendra au même,}\\ &\frac{f(t,u)}{\frac{d}{dt}\{\Gamma(t)f(t,u)\}} = f(t,u)\left(\frac{du}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{du}{dp}\frac{dt}{dv}\right) = q_0\vartheta_1 - q_1\vartheta_0 = (c_0 - c_1)\vartheta_0\vartheta_1,\\ &\text{ou encore}\\ &\frac{\Gamma(t)f(t,u)}{\frac{d}{dt}\{\Gamma(t)f(t,u)\}} = \Gamma(t)f(t,u)\left(\frac{du}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{du}{dp}\frac{dt}{dv}\right) = \left(\frac{dQ}{dv} + p\right)\frac{dt}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dt}{dv}. \end{aligned}\right.$$

Quand, ensuite, on voudra connaître les chaleurs spécifiques c_0, c_1, ainsi que la

chaleur latente dq_φ, on se servira des relations

$$
(\mathrm{O})\quad
\left\{
\begin{aligned}
c_0\,\Gamma(t) &= \frac{q_0\,\Gamma(t)}{\vartheta_0} = \frac{\dfrac{d\mathrm{Q}}{dv}+p}{\dfrac{dt}{dv}} = \frac{\left(\dfrac{d\mathrm{Q}}{dv}+p\right)\dfrac{dt}{dp}}{\dfrac{dt}{dv}\,\dfrac{dt}{dp}},\\
c_1\,\Gamma(t) &= \frac{q_1\,\Gamma(t)}{\vartheta_1} = \frac{\dfrac{d\mathrm{Q}}{dp}}{\dfrac{dt}{dp}} = \frac{\dfrac{d\mathrm{Q}}{dp}\,\dfrac{dt}{dv}}{\dfrac{dt}{dv}\,\dfrac{dt}{dp}},\\
(c_0-c_1)\,\Gamma(t) &= \frac{\left(\dfrac{d\mathrm{Q}}{dv}+p\right)\dfrac{dt}{dp} - \dfrac{d\mathrm{Q}}{dp}\,\dfrac{dt}{dv}}{\dfrac{dt}{dv}\,\dfrac{dt}{dp}} = \frac{\Gamma(t)f(t,u)}{\dfrac{dt}{dv}\,\dfrac{dt}{dp}\,\dfrac{d}{dt}\{\Gamma(t)f(t,u)\}},\\
\frac{dq_\varphi}{dv_\varphi}\,\Gamma(t) &= \frac{q_0\vartheta_1 - q_1\vartheta_0}{\vartheta_1}\,\Gamma(t) = (c_0-c_1)\,\vartheta_0\,\Gamma(t) = \frac{\left(\dfrac{d\mathrm{Q}}{dv}+p\right)\dfrac{dt}{dp} - \dfrac{d\mathrm{Q}}{dp}\,\dfrac{dt}{dv}}{\dfrac{dt}{dp}}\\
&= \frac{\Gamma(t)f(t,u)}{\dfrac{dt}{dp}\,\dfrac{d}{dt}\{\Gamma(t)f(t,u)\}},\\
\frac{dq_\varphi}{dp_\varphi}\,\Gamma(t) &= \frac{q_0\vartheta_1 - q_1\vartheta_0}{\vartheta_0}\,\Gamma(t) = (c_0-c_1)\,\vartheta_1\,\Gamma(t) = \frac{\left(\dfrac{d\mathrm{Q}}{dv}+p\right)\dfrac{dt}{dp} - \dfrac{d\mathrm{Q}}{dp}\,\dfrac{dt}{dv}}{\dfrac{dt}{dv}}\\
&= \frac{\Gamma(t)f(t,u)}{\dfrac{dt}{dv}\,\dfrac{d}{dt}\{\Gamma(t)f(t,u)\}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Avec ce système de formules, les dérivées de t en v, p devront être tirées de l'équation $\varphi(v,p)=t$, supposée donnée, et l'on ne fera aucun usage de la seconde des équations (A).

Cependant, au point de vue purement algébrique des relations du sujet, on aura encore, par la seconde des équations (A),

$$
\frac{d}{dt}\{\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t,u)\}\,dt = d\mathrm{A} - p\,dv = \left(\frac{d\mathrm{A}}{dv} - p\right)dv + \frac{d\mathrm{A}}{dp}\,dp,
$$

et, par suite,

$$
(\mathrm{M}')\quad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\{\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t,u)\}\,\frac{dt}{dv} &= \frac{d\mathrm{A}}{dv} - p,\\
\frac{d}{dt}\{\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t,u)\}\,\frac{dt}{dp} &= \frac{d\mathrm{A}}{dp};
\end{aligned}
\right.
$$

puis, quand on éliminera la fonction A par voie de différentiation, on retrouvera la

première des équations (N) sous la forme exactement équivalente

$$\frac{1}{\dfrac{d^2[\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t,u)]}{dt\,du}} = \frac{du}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{du}{dp}\frac{dt}{dv};$$

et, quand, dans celle-là, on substituera les dérivées de t en v, p tirées des équations (M′) on trouvera, en place de la dernière des équations (N),

$$(\mathrm{N}')\qquad \frac{\dfrac{d}{dt}[\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t,u)]}{\dfrac{d^2[\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t,u)]}{dt\,du}} = \frac{d\mathrm{A}}{dp}\frac{du}{dv} - \left(\frac{d\mathrm{A}}{dp} - p\right)\frac{du}{dv}.$$

Les équations (M′), (N′) seront en A et u ce que les équations (M), (N) seront en Q et t; mais je ne m'arrêterai pas à développer à ce point de vue les expressions des quantités c_0, c_1, dq_0, parce que je n'en retirerai aucune utilité par la suite.

On pourra réunir enfin les deux systèmes d'équations, et alors en désignant, pour abréger, par $\mathrm{R}(t,u)$ la fonction composée $\Gamma(t)\,\mathrm{F}(t,u)$, on aura, par les équations (M),

$$(\mathrm{M}'')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{du}{dv} &= \frac{\dfrac{d\mathrm{Q}}{dv} + p}{\dfrac{d\mathrm{R}(t,u)}{du}},\\ \frac{du}{dp} &= \frac{\dfrac{d\mathrm{Q}}{dp}}{\dfrac{d\mathrm{R}(t,u)}{dp}},\end{aligned}\right.$$

et, par les équations (M′),

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dt}{dv} &= \frac{\dfrac{d\mathrm{A}}{dv} - p}{\dfrac{d\mathrm{R}(t,u)}{dt}},\\ \frac{dt}{dp} &= \frac{\dfrac{d\mathrm{A}}{dp}}{\dfrac{d\mathrm{R}(t,u)}{dt}};\end{aligned}\right.$$

au moyen de quoi l'équation (N′), comme aussi la dernière des équations (N), se réduiront l'une et l'autre à

$$(\mathrm{N}'')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\dfrac{d\mathrm{R}(t,u)}{dt}\dfrac{d\mathrm{R}(t,u)}{du}}{\dfrac{d^2\mathrm{R}(t,u)}{dt\,du}} &= \left(\frac{d\mathrm{Q}}{dv} + p\right)\frac{d\mathrm{A}}{dp} - \frac{d\mathrm{Q}}{dp}\left(\frac{d\mathrm{A}}{dv} - p\right)\\ &= \frac{d\mathrm{Q}}{dv}\frac{d\mathrm{A}}{dp} - \frac{d\mathrm{Q}}{dp}\frac{d\mathrm{A}}{dv} + p\frac{d(\mathrm{A}+\mathrm{Q})}{dp}.\end{aligned}\right.$$

On aura ensuite, en place des équations (O),

$$
(\mathrm{O}')\quad
\left\{
\begin{aligned}
c_1\,\Gamma(t) &= \frac{\dfrac{dQ}{dv}+p}{\dfrac{dA}{dv}-p}\,\frac{dR(t,u)}{dt}.\\
c\,\Gamma(t) &= \frac{\dfrac{dQ}{dv}}{\dfrac{dA}{dp}}\,\frac{dR(t,u)}{dt},\\
(c_1-c)\,\Gamma(t) &= \frac{\dfrac{dR(t,u)}{dt}\left(\left(\dfrac{dQ}{dv}+p\right)\dfrac{dA}{dp}-\dfrac{dQ}{dv}\left(\dfrac{dA}{dv}-p\right)\right)}{\left(\dfrac{dA}{dv}-p\right)\dfrac{dA}{dp}}\\
&= \frac{\left(\dfrac{dR(t,u)}{dt}\right)^2\dfrac{dR(t,u)}{du}}{\dfrac{d^2R(t,u)}{dt\,du}\left(\dfrac{dA}{dv}-p\right)\dfrac{dA}{dp}}.\\
\frac{dq_2}{dv_2}\,\Gamma(t) &= \frac{\dfrac{dR(t,u)}{dt}\,\dfrac{dR(t,u)}{du}}{\dfrac{d^2R(t,u)}{dt\,du}\,\dfrac{dA}{dp}},\\
\frac{dq_2}{dp_2}\,\Gamma(t) &= \frac{\dfrac{dR(t,u)}{dt}\,\dfrac{dR(t,u)}{du}}{\dfrac{d^2R(t,u)}{dt\,du}\left(\dfrac{dA}{dv}-p\right)}.
\end{aligned}
\right.
$$

Ces différentes formules auront une grande importance par la suite quand il s'agira de trouver les expressions algébriques des fonctions A, Q, R,..., d'après certains résultats expérimentaux. On arriverait à des relations analogues en prenant soit v, t, soit v, u,..., comme variables indépendantes; mais je ne m'en occuperai pas ici.

Je me bornerai à faire remarquer que la seconde des équations (N) ne dépendra au premier membre que des fonctions $f(t, u)$ et $\Gamma(t)$, tandis que le deuxième membre sera cette quantité si remarquable des formules (I), (I'), (I''), dont le produit par différents facteurs représentait à la fois le sinus de l'angle B'BB$_1$, la quantité de chaleur latente le long de l'arc BB$_1$, l'accroissement de la température le long de l'arc BB', la différence des chaleurs spécifiques principales, et encore la différence des chaleurs spécifiques dans deux directions perpendiculaires quelconques; une quantité, enfin, dont la valeur, parfaitement indépendante de tout système de directions perpendiculaires qui aura servi à la trouver sur la *fig.* 1, sera égale à l'aire du parallélogramme qu'on pourra former avec des longueurs a, b, comme côtés sur les normales aux courbes BB$_1$, BB'.

La seconde des équations (N) fera voir de nouveau que, si l'on avait $c_0 = c$, il ne saurait plus y avoir de phénomènes calorifiques.

Dans une telle hypothèse, un fluide élastique pourrait être dilaté et comprimé à volonté le long d'une courbe unique parfaitement déterminée sur la *fig.* 1, sans changer de température et sans prendre ni céder de la chaleur.

Le fluide élastique ferait l'office d'un de ces ressorts abstraits que l'on a imaginés depuis longtemps dans les applications usuelles de la Mécanique, et qui, avec une vertu analogue à celle des forces de la pesanteur, à cela près que l'intensité de leur action est plus ou moins variable au lieu d'être constante, n'existent sans doute pas dans la vraie nature des choses.

Au point de vue de Carnot et Clapeyron, la fonction $f(t, u)$ ne devait pas renfermer la variable t, et, par suite, la seconde des équations (N) devenait

$$\frac{1}{\frac{d}{dt}\Gamma(t)} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{C} = q_0\vartheta_1 - q_1\vartheta_0 = (c_0 - c_1)\vartheta_1\vartheta_0,$$

c'est-à-dire que la différence $q_0\vartheta_1 - q_1\vartheta_0$ devenait une même fonction de la température pour tous les corps de la nature; donc, dans ce cas-là, toutes les quantités que j'ai énumérées comme étant des produits de $q_0\vartheta_1 - q_1\vartheta_0$ par différents facteurs, ne dépendaient plus que de ces facteurs et de la fonction universelle C, ce qui entraînait une foule de théorèmes très-remarquables, surtout quand on s'appuyait encore sur les lois de Mariotte et de Gay-Lussac pour tous les gaz permanents, et sur les propriétés connues de la formation des vapeurs.

Mais, du moment où la fonction $f(t, u)$ dépendra de la variable t et pourra être différente d'un fluide élastique à un autre, tous ces théorèmes disparaîtront, et il s'agira principalement de trouver un système d'expérimentation au moyen duquel on parviendra un jour à connaître la fonction universelle $\Gamma(t)$ et la fonction spéciale $f(t, u)$ pour chaque espèce de fluides élastiques.

Il faudra, dans ce but, que les physiciens s'attachent à déterminer expérimentalement les formes de courbes $\varphi(v, p) = t$, $\psi(v, p) = u$, et les valeurs des quantités q_0, q_1, c_0, c_1, c, dq_φ en un grand nombre de points de la *fig.* 1. Il faudra, surtout, qu'ils visent à trouver les variations progressives des quantités q_0, q_1, c_0, c_1, c, dq_φ, le long de certaines courbes bien déterminées, de manière que, à l'aide du calcul, on puisse parvenir à remonter de quelques-unes des parties connues des équations (L), (M), (N), (O),..., aux lois générales des fonctions $\Gamma(t)$, $f(t, u)$, Q et A en v, p ou t, u,..., comme variables indépendantes.

J'espère ne rien laisser à désirer à ce sujet, par la suite, en discutant la question sous toutes ses faces, et en parvenant en fin de compte à satisfaire aux conditions (N) d'une manière excessivement générale.

CHAPITRE V.

La quantité Q doit être envisagée de telle manière qu'il n'y aura plus de perte de travail ou de force vive quand on tiendra compte à la fois des effets mécaniques et des effets calorifiques des corps.

La fonction Q des formules (10), (14), (23) et (A), (L), (M), (N), (O) étant précisément ce que l'on a cherché à connaître avec tant de persistance depuis les recherches de Carnot, à savoir, la quantité de force vive susceptible d'être produite en physique rationnelle par la quantité totale de chaleur contenue dans un fluide élastique, il s'ensuit que, une masse m de fluide supposée entraînée dans l'espace parallèlement à elle-même, avec une vitesse constante α, aura pour équivalent mécanique une quantité de force vive ou de travail Q_1 représentée par la somme

$$\text{I} \qquad Q_1 = Q + \frac{1}{2} m\alpha^2.$$

Quand le volume v ira en augmentant ou en diminuant d'une manière assez lente pour que les vitesses α ne soient pas modifiées sensiblement, pendant que de la chaleur traversera l'enveloppe du dehors au dedans ou du dedans au dehors, et pourvu que la température soit sensiblement égale à chaque instant dans toute l'étendue du volume v, la quantité Q variera d'après la relation connue

$$\text{II} \qquad dQ = \int (t\, f(t, u)\, du - p\, dv).$$

et, par conséquent, avec l'hypothèse $\alpha = \text{const.}$, la quantité Q_1 de la formule (I) éprouvera la même augmentation ou la même diminution que Q.

Je suppose maintenant que l'enveloppe servant à renfermer le gaz vienne à être saisie et détournée d'une manière quelconque de son état de mouvement rectiligne uniforme; alors les vitesses, les pressions et les températures cesseront d'être égales dans toute l'étendue du volume v, et, pendant le temps qu'il y aura de pareilles inégalités, on ne pourra songer à appliquer ni la formule (I) ni la formule (II) à la masse totale m du gaz.

Je suppose ensuite que, après un certain intervalle de temps, l'enveloppe servant à renfermer le gaz vienne à être entraînée de nouveau avec une vitesse constante α' différente, en grandeur et en direction, de la vitesse initiale α; alors, aux premiers instants du nouveau mouvement, il y aura encore des agitations intérieures, et les formules (I) et (II) continueront à être inapplicables; mais, au bout d'un certain temps, quand toutes les agitations auront complètement cessé, on devra pouvoir écrire

$$\text{I } bis \qquad Q_1 = Q + \frac{1}{2} m\alpha'^2$$

en place de la formule (I), et, pareillement,

$$\text{II } bis \qquad dQ_1 = \int (t\, f(t, u)\, du - p\, dv).$$

en place de la formule (II), pour le cas où de nouveau il y aurait des changements de volume dv' avec une assez grande lenteur pour que les changements correspondants des vitesses ω' fussent sensiblement négligeables.

Cela posé, la question sera de savoir quelle sorte de relation il devra y avoir entre les quantités Q, Q′ des formules (I) et (I *bis*), et, pour résoudre cette question, il me faudra discuter très-attentivement l'équation générale des forces vives, qui est

$$\text{(III)} \qquad \frac{1}{2}\Sigma\delta m\omega_1^2 - \frac{1}{2}\Sigma\delta m\omega_0^2 = T_m - T_r + \Sigma\int_0^1 R\,dr.$$

On sait que cette équation sera applicable à tous les instants du phénomène que je viens de décrire, pourvu qu'au deuxième membre on mette en ligne de compte *toutes les forces sans exception* qu'il pourra y avoir dans le système.

Or toutes les forces sans exception ne pourront être que de deux sortes: ou des forces intérieures mutuellement égales et opposées, ou des forces extérieures.

Les premières concourront toutes ensemble à former le terme résultant $\Sigma\int_0^1 R\,dr$.

Les autres comprenant, d'une part, les forces de pesanteur sur toutes les parcelles δm d'un système, et, d'autre part, les pressions à la surface ou paroi du volume v du système, seront ou des forces mouvantes ou des forces résistantes.

Le terme résultant de toutes les forces mouvantes extérieures sera T_m, et le terme résultant de toutes les forces résistantes extérieures sera T_r.

L'équation (III) étant ainsi conçue, le terme résultant $\Sigma\int_0^1 R\,dr$ des forces intérieures sera manifestement nul toutes les fois qu'un système se mouvra d'une seule pièce à la manière d'un corps rigide, et alors on aura l'ancienne formule du principe de la conservation des forces vives

$$\text{(IV)} \qquad \frac{1}{2}\Sigma\delta m\omega_1^2 - \frac{1}{2}\Sigma\delta m\omega^2 = T_m - T_r;$$

mais, hormis ce cas-là qui ne se rencontre guère, le terme résultant $\Sigma\int_0^1 R\,dr$ ne saurait généralement être égal à zéro. On l'a reconnu depuis longtemps, en ce que l'équation (IV) ne devenait applicable aux phénomènes usuels de la mécanique terrestre qu'à la condition d'y faire figurer le plus souvent une certaine perte, et d'autres fois un certain gain de travail.

On a donc dû laisser de côté la formule (IV) et n'employer que la formule (III) pour exprimer la véritable loi de la somme des forces vives d'un système, toutes les fois qu'il survenait des changements de figure pendant la durée du mouvement.

Les forces R n'ont été considérées d'abord que comme des fonctions parfaitement déterminées des longueurs des droites r dans les directions desquelles elles agissent; par

suite, on a eu

$$R = f(r), \quad \Sigma \int_0^{r_1} R\,dr = \Sigma \int_0^{r_1} f(r)\,dr,$$

et la quantité $\Sigma \int_0^{r_1} R\,dr$ redevenait identiquement la même quand toutes les distances r redevenaient les mêmes. Cela dénotait un état de parfaite élasticité, et la formule (III) ne cessait pas d'être celle du principe de l'entière conservation des forces vives.

Avec des corps ainsi constitués, il suffirait que l'on pût faire disparaître toutes les forces extérieures pour qu'un mouvement quelconque d'agitation des parcelles δm par rapport à leur commun centre de gravité, ou plutôt par rapport à l'état de mouvement moyen de translation et de rotation de Coriolis, dût se perpétuer indéfiniment.

On n'observe pas, à la vérité, qu'un mouvement d'agitation entre les différentes parcelles δm d'un corps ait jamais une durée un peu longue; mais aussi ne pouvons-nous jamais parfaitement isoler un corps de tous les autres, ni, par conséquent, annuler toutes les forces extérieures sur ce corps; de plus, nous voyons journellement que tout mouvement d'agitation dans un corps se communique promptement à des corps environnants, et, d'après cette simple remarque, on a pu concevoir la cessation finale de toute agitation dans un corps donné, sans que cela préjudiciât en rien à la signification générale du principe de la conservation des forces vives, dès l'instant qu'on supposait un état de parfaite élasticité.

Mais on a rencontré d'autres phénomènes où l'on n'a pu se refuser à regarder les fonctions f des relations $R = f(r)$ comme étant susceptibles de varier, soit graduellement, soit brusquement, d'un instant à l'autre, et alors la quantité $\Sigma \int_0^{r_1} R\,dr$ échappait à toute appréciation directe.

Il y a, en un mot, des corps imparfaitement élastiques, comme, par exemple, des matières molles et visqueuses, et, pareillement, des matières pulvérulentes, qu'on peut faire changer de figure indéfiniment, avec une dépense continuelle de travail, et qui, une fois abandonnées à elles-mêmes, reprennent très-promptement une figure bien déterminée, sans qu'une partie notable de travail ou de force vive ait pu se transmettre au dehors.

Pour de telles matières, la formule (III) serait absurde si l'on n'admettait pas que la quantité inconnue $\Sigma \int_0^{r_1} R\,dr$ a la propriété de croître négativement aussi longtemps qu'il y aura des changements de figure, c'est-à-dire des mouvements de rapprochement, d'écartement et de glissement entre les différentes parcelles δm du système.

Mais toute valeur négative de la quantité $\Sigma \int_0^{r_1} R\,dr$ une fois produite dans un corps

et non susceptible d'être restituée ultérieurement par ce corps, dénotera une perte de force vive qui aura eu lieu pendant la durée du mouvement.

Ainsi donc, pour toutes les matières molles et visqueuses, et, pareillement, pour toutes les matières pulvérulentes, on devra admettre une perte de force vive pendant la durée du changement de figure de ces matières.

On a été conduit au même résultat pour les liquides et pour les fluides élastiques toutes les fois que les différentes parcelles δm de pareilles sortes de matières se sont trouvées dans un état d'agitation très-considérable et non assujetti à une loi de continuité d'un point à un autre du système.

Or, en réfléchissant, à priori, sur le phénomène physique d'une matière molle ou d'une matière pulvérulente qui est susceptible d'être pétrie et déformée indéfiniment avec une dépense continuelle de travail, on ne peut se soustraire à la question de savoir ce qu'il en adviendra d'une telle dépense de travail dans la nature physique ou chimique du système.

Au point de vue purement mathématique de la formule (III), tout est dit quand on a admis la variabilité, soit graduelle, soit brusque, des fonctions $R = f(r)$ d'un instant à l'autre; mais quelle est la circonstance physique ou chimique qui se trouve intimement liée à un tel changement des fonctions $f(r)$? Cette question-là reste entière bien manifestement, et il doit y avoir une réponse à y faire.

Or, tout le monde sait que, dans les opérations de percussion, d'écrouissage et d'étirement des corps solides, il y a généralement une élévation de température, et, par suite, un dégagement de chaleur. Il en est de même du frottement des corps solides les uns contre les autres sous de très-grandes charges. Tous les frottements paraissent, à la vérité, être accompagnés de mouvements vibratoires, et c'est pour cela que je n'en ai pas encore parlé, parce que, dès qu'il y a des mouvements vibratoires quelque part, ces mouvements se transmettent très-rapidement à tous les corps environnants et produisent, de cette manière, une diminution dans la somme des forces vives des corps frottants sans qu'il faille admettre une destruction ou perte absolue de force vive; mais tous les frottements contre des surfaces peu unies et mal graissées, sous de grandes charges particulièrement, produisent en même temps une élévation de température, et, par suite, on a lieu de croire que toute perte de force vive dans la formule (III), non susceptible d'être attribuée à une transmission de mouvements vibratoires, se transformera en une quantité correspondante de chaleur, de telle sorte que si l'on avait égard à la fois aux phénomènes mécaniques et aux phénomènes calorifiques des corps, il ne saurait plus y avoir de perte de force vive.

Il a été reconnu, en effet, dès l'établissement de la formule (3) et démontré ensuite surabondamment par la discussion de la formule (10), que tout fluide élastique peut être employé à faire de la chaleur avec de la force motrice, ou, réciproquement, à produire de la force motrice avec de la chaleur [alors qu'on n'admettra pas l'égalité $q' = q$ dans la formule (3)].

La formule (III) pourra d'ailleurs être appliquée directement au phénomène de la

dilatation d'un fluide élastique sur les *fig.* 1 et 2, à la condition d'y faire à la fois

$$w_0 = 0, \quad w_1 = 0, \quad T_m = 0,$$

ce qui donnera simplement

$$0 = -T_r + \Sigma \int_0^1 R\,dr,$$

tandis que sur les *fig.* 1 et 2 on trouvera

$$0 = -T_r + \int_0^1 p\,dv.$$

Donc, dans ce cas-là, on aura identiquement

$$\Sigma \int_0^1 R\,dr = \int_0^1 p\,dv,$$

et ce sera une seule et même chose que d'écrire soit $-p\,dv$, soit $-\Sigma R\,dr$ dans le deuxième membre de l'équation (II); par conséquent, l'équation (II) fera voir immédiatement comment la quantité $\Sigma R\,dr$ variera avec l'état calorifique d'un fluide élastique sur les *fig.* 1 et 2, ce dont on ne s'est jamais occupé dans la mécanique ordinaire.

On aura, en un mot,

$$(V) \qquad dQ = \Gamma(t) f(t, u)\,du - \Sigma R\,dr$$

pour tel fluide qu'on voudra, non animé de vitesses, et renfermé dans une enveloppe de volume variable v susceptible de laisser passer une somme de chaleur $f(t, u)\,du$ du dehors en dedans, ou, inversement, du dedans au dehors, selon que du sera positif ou négatif.

D'après cette équation, la quantité $\Sigma R\,dr$ ne saurait augmenter ni diminuer sans qu'il survienne un changement égal et contraire dans la fonction Q, et, par suite, la fonction Q devra être envisagée comme étant la quantité totale d'espèce $\Sigma \int R\,dr$ dont un corps donné sera capable.

Je suppose maintenant qu'un fluide élastique soit renfermé dans un volume constant v parfaitement immobile, et, par conséquent, non susceptible de laisser passer des mouvements vibratoires au dehors, pendant qu'une quantité quelconque de travail T_m sera dépensée intérieurement à produire de l'agitation dans le fluide; alors l'équation (II) cessera d'être applicable à cause des vitesses qui naîtront et des changements qui surviendront à la fois dans les vitesses, dans les pressions et dans les températures des différentes parcelles δm d'un instant à l'autre; mais l'équation (III) subsistera à tout instant et donnera, à partir de l'état initial,

$$\frac{1}{2} \Sigma \delta m\, w_1^2 = T_m + \Sigma \int_0^1 R\,dr.$$

Je suppose encore que, après qu'une certaine quantité de travail T_m aura été dé-

pensée, le système se trouve abandonné à lui-même, et que, au bout d'un certain temps, toutes les vitesses w_1 soient redevenues égales à zéro; alors, pourvu que l'expérience vérifie la possibilité de l'extinction finale de toutes les vitesses w_1, la formule (II) redeviendra manifestement applicable sous la forme

$$dQ' = \Gamma(t')f(t', u')\,du' - p'\,dv',$$

et, tandis que, dans l'état initial, on avait, le long de la droite AB, *fig.* 1,

$$Q = Q_0 + \int_{u_0}^{u} \Gamma(t)f(t, u)\,du,$$

on aura, dans l'état final, le long de la même droite AB prolongée s'il le faut,

$$Q' = Q_0 + \int_{u_0}^{u'} \Gamma(t)f(t, u)\,du.$$

Cela étant, il s'agira de savoir trouver, en principe, la relation des quantités Q, Q'. J'admets d'ailleurs que le phénomène ait pu avoir lieu dans une enveloppe non perméable à la chaleur, et, dans cette supposition, il est manifeste que, en écrivant $Q' = Q$, il faudra qu'il y ait une perte de force vive représentée par l'expression

$$T_m = -\Sigma \int_0^1 R\,dr,$$

sans production de chaleur, au lieu que, en écrivant

$$Q' = Q + T_m = Q - \Sigma \int_0^1 R\,dr,$$

il y aura une production de chaleur tout à fait équivalente à la quantité de force vive disparue; et comme, dans le cas d'une parfaite élasticité, la quantité $\Sigma \int_0^1 R\,dr$ ne pourra jamais augmenter ni diminuer sans qu'il survienne un changement égal et contraire dans la fonction Q, ainsi que je l'ai fait voir tout à l'heure par la formule (V), il faudrait véritablement vouloir se refuser à toute évidence pour ne pas continuer à attribuer une telle signification à la quantité $\Sigma \int_0^1 R\,dr$ dans le cas d'une élasticité plus ou moins imparfaite.

La relation

$$Q' = Q - \Sigma \int_0^1 R\,dr \tag{VI}$$

paraît avoir été admise, en effet, par MM. Regnault, Joule et d'autres physiciens qui se sont occupés de cette matière.

Quant à la manière de trouver les variables p', t', u' du nouvel état calorifique du fluide élastique par rapport aux valeurs correspondantes p, t, u de l'état initial, il

faudrait que l'on connût les formes algébriques des fonctions

$$\varphi(v, p) = t, \quad \psi(v, p) = u, \quad f(t, u), \quad \Gamma(t),$$

et que, ensuite, le long de la perpendiculaire AB, à partir du point B, on écrivît la condition

$$\text{(VII)} \qquad \int_u^{u} \Gamma(t) f(t, u)\, du = Q' - Q = -2\int_0^{t} R\, dt.$$

Telle est la théorie à laquelle je suis conduit pour les expériences qui ont été publiées depuis longtemps par M. Joule.

La même théorie sera directement applicable aux deux expériences qui ont été annoncées par M. Regnault dans le *Compte rendu de l'Académie des Sciences* (séance du 18 avril 1853, tome XXXVI, page 180, premier exemple).

Dans l'une des expériences de M. Regnault, la dilatation a eu lieu dans une enveloppe extensible peu perméable à la chaleur, de manière que, en regardant les vitesses w des parcelles de gaz δm comme négligeables, la dilatation a dû se faire sensiblement le B en C sur la *fig.* 1 pendant que le volume v augmentait de OA à OA_1. La température a été notablement abaissée, et il y a eu une production de travail au dehors égale à l'aire $ABCA_1$.

Dans l'autre expérience, la dilatation a été la même, de OA à OA_1, dans une enveloppe peu perméable à la chaleur, mais l'enveloppe n'était pas extensible, et il n'y a pas eu une production de travail au dehors; une quantité de force motrice égale à l'aire $ABCA_1$ a dû être employée à imprimer des vitesses aux parcelles δm, puis ces vitesses se sont éteintes et ont reformé de la chaleur; par suite, la pression et la température du fluide élastique ont dû monter le long de la perpendiculaire AC jusqu'en un certain point D qui dépendra de la condition $dQ = 0$, c'est-à-dire de l'équation différentielle

$$\text{(VIII)} \qquad 0 = \Gamma(t) f(t, u)\, du - p\, dv,$$

représentant une certaine courbe BD à mener du point B jusqu'à la rencontre de l'axe Ov sur la *fig.* 1.

Il y aura manifestement à concevoir une telle courbe par chaque point B de la *fig.* 1, mais on ne voit pas directement, jusqu'ici, de quelle manière une courbe de l'espèce $Q =$ constante pourra se présenter par rapport aux deux courbes fondamentales $\varphi(v, p) = t$, $\psi(v, p) = u$, et, d'après la seconde expérience de M. Regnault, la courbe $Q =$ constante se confondrait avec la courbe $\varphi(v, p) = t$.

Une telle coïncidence, supposée générale, entraînerait des relations particulières dont je m'occuperai tout à l'heure, et qui ne sauraient avoir lieu pour des vapeurs, ainsi que je le ferai voir.

Quoi qu'il en soit de la forme de la courbe représentée par l'équation (VIII), il me sera très-facile de donner une entière généralité à ce nouvel ordre d'idées dans la

science de la mécanique en remontant aux formules (I), (I *bis*), qui étaient

$$\text{IX} \qquad \begin{cases} Q_1 = Q + \frac{1}{2} m\omega^2, \\ Q'_1 = Q' + \frac{1}{2} m\omega'^2, \end{cases}$$

et en y joignant, non-seulement la relation générale des forces vives sous la forme

$$\text{X} \qquad \frac{1}{2} m\omega'^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 = T_m - T_r + \Sigma \int R\,dr,$$

mais encore la relation nouvelle dont j'ai fait usage dans l'établissement de la formule (VI), et dont l'expression sera

$$\text{XI} \qquad Q' - Q + \Sigma \int R\,dr = 0,$$

au moyen de quoi je trouverai

$$\text{XII} \qquad \begin{cases} Q' - Q = (Q' - Q_1) + \left(\frac{1}{2} m\omega'^2 - \frac{1}{2} m\omega^2\right), \\ \qquad = Q' - Q + T_m - T_r + \Sigma \int R\,dr = T_m - T_r, \end{cases}$$

c'est-à-dire que, du moment où l'on érigera en principe la relation (XI), il y aura toujours une parfaite conservation des forces vives ou des quantités de travail produites par les seules forces extérieures d'un système, en ce sens que toute différence entre les quantités T_m, T_r se retrouvera par une quantité équivalente de chaleur, soit dans le corps même, où l'accroissement négatif de l'intégrale $\Sigma \int R\,dr$ aura fait naître, en effet, une telle quantité de chaleur, soit dans les corps environnants, où la quantité de chaleur produite aura pu s'écouler.

La formule (XI) ne servira d'ailleurs qu'à étendre aux corps imparfaitement élastiques ce qui, d'après l'équation (V), aura lieu nécessairement pour les fluides parfaitement élastiques.

CHAPITRE VI.

Développement de l'hypothèse qui consiste à regarder la quantité Q comme une fonction de la variable t seulement.

Les règles fondamentales de ma théorie des effets dynamiques de la chaleur étant actuellement établies, il ne me reste plus qu'à en développer les conséquences; et, d'abord, je m'occuperai des deux expériences déjà citées de M. Regnault.

Dans l'une de ces expériences, un volume d'air a été dilaté du simple au double, de OA à OA′ par exemple, sur la *fig.* 1, dans une enveloppe extensible peu perméable

à la chaleur, et sans que les particules d'air aient pu prendre des vitesses appréciables. La dilatation a dû se faire alors à très-peu près de B en C, le long de la courbe Bu, et il a dû y avoir à la fois un abaissement de température et une production de travail égale à l'aire ABCA$_1$.

Dans l'autre expérience, une capacité pleine d'air a été mise en communication avec une capacité de volume égal, dans laquelle était le vide pneumatique; à la fin de l'expérience, le volume de l'air s'est trouvé augmenté du simple au double comme tout à l'heure, mais aucun travail n'a pu être produit au dehors. Toute la force expansive de l'air a été employée à produire des vitesses, et, par suite, des tournoiements, puis les tournoiements se sont éteints et ont dû être remplacés par une quantité équivalente de chaleur.

Ainsi, dans la première expérience, la quantité Q aura dû éprouver une diminution égale à l'aire ABCA$_1$ sur la *fig.* 1, et, dans la seconde expérience, la quantité Q aura dû être constante. La température, à la fin de la seconde expérience, aura dû être égale à celle que l'on trouverait sur la *fig.* 1 à l'intersection de la perpendiculaire A C prolongée avec une certaine courbe BD dont l'équation différentielle sera

$$dQ = 0 \quad \text{ou} \quad \Gamma(t) f(t, u)\, du - p\, dv = 0.$$

Or, M. Regnault a trouvé que la température finale t' était égale à la température initiale t; donc, dans ce cas-là, le point D ne différerait pas du point B$_1$, et si l'on faisait d'une telle coïncidence une règle générale, il faudrait que la courbe BD ne différât pas de la courbe BB$_1$; il faudrait, en un mot, que le long de chacune des courbes $\varphi(v, p) =$ constante t on eût $Q =$ constante, et, par suite, dans toute l'étendue de la *fig.* 1, $Q =$ fonction (t), ce qui entraînerait différentes conséquences que je me propose de développer à fond.

Et, d'abord, j'observe que de B en B$_1$ le long d'une courbe $\varphi(v, p) =$ constante t, la première des formules (A) fera avoir généralement

$$Q_1 - Q = \Gamma(t) \int_{u_0}^{u_1} f(t, u)\, du - \int_{u_0}^{u_1} p \frac{dv}{du}\, du = q\,\Gamma(t) = \text{aire ABB}_1\text{A}_1.$$

Pareillement, de B′ en B′$_1$ le long d'une courbe $\varphi(v, p) =$ constante t', on aura

$$Q'_1 - Q' = \Gamma(t') \int_{u_0}^{u_1} f(t', u)\, du - \int_{u_0}^{u_1} p' \frac{dv'}{du}\, du = q'\,\Gamma(t') = \text{aire A}'\text{B}'\text{B}'_1\text{A}'_1.$$

Donc, en premier lieu, pour que l'on puisse trouver à la fois $Q_1 = Q$, $Q'_1 = Q'$, il faudra que l'on ait

$$q\,\Gamma(t) = \text{aire ABB}_1\text{A}_1,$$
$$q'\,\Gamma(t') = \text{aire A}'\text{B}'\text{B}'_1\text{A}'_1.$$

D'autre part, de B en B′, le long d'une courbe $\varphi(v, p) = u$, la première des formules (A) fera avoir généralement

$$Q' - Q = 0 - \int_t^{t'} p \frac{dv}{dt}\, dt = 0 + \text{aire ABB}'\text{A}',$$

et, pareillement, de B_1 en B'_1, le long d'une courbe $\psi(v, p) = u_1$, on aura

$$Q'_1 - Q_1 = 0 - \int_t^{t'} \rho' \frac{dv'}{dt} dt = 0 + \text{aire } A_1 B_1 B'_1 A'_1.$$

Donc, en second lieu, pour que l'accroissement de Q puisse être le même de B en B′ que de B_1 en B'_1, il faudra encore que l'on ait

$$\text{aire } A_1 B_1 B'_1 A'_1 = \text{aire } ABB'A'.$$

D'après cette dernière égalité, il suffira que toutes les courbes $\varphi(v, p) = t$ soient tracées sur la *fig.* 1, et qu'une seule des courbes $\psi(v, p) = u$ soit donnée pour que l'on parvienne à déterminer toutes les autres courbes ψ d'après celle-là.

Je suppose, en effet, que l'on me donne la courbe $B'Bu$ et un autre point quelconque B_1 sur l'arc indéfini BB_1 ou $\varphi(v, p) = t$; l'aire ABB′A′ aura alors une valeur parfaitement déterminée pour chacune des autres courbes $\varphi(v, p) = t'$ situées au-dessus comme au-dessous de l'arc BB_1, et, en cherchant à construire pour chacune d'elles une aire $A_1B_1B'_1A'_1$ égale à l'aire correspondante ABB′A′, il est bien évident que je trouverai un arc correspondant $B_1B'_1$ parfaitement déterminé; je réussirai donc à trouver la courbe $B'_1B_1u_1$ tout entière, et de même pour tous les points B_1 imaginables situés sur le prolongement de l'arc IB.

Réciproquement, quand on me donnera la courbe $B'_1B_1u_1$, j'en déduirai la courbe $B'Bu$, et la construction me réussira sans difficulté jusqu'au point de rencontre β avec celle des courbes $\varphi(v, p) = \text{constante } t$, qui partira du point u_1 et que je suppose être l'arc $u_1\beta$ sur la *fig.* 1.

Pour ce point-là, j'aurai à construire une aire $AB\beta\alpha$ égale à l'aire triangulaire $A_1B_1u_1$, et l'arc βu me restera inconnu.

Mais il est facile de démontrer encore que la quantité de force vive latente de u en u_1 le long de l'axe Ov devra être égale à zéro, et qu'il en résultera d'abord les deux égalités

$$\text{aire } uBB_1u_1 = \text{aire } ABB_1A_1,$$
$$\text{aire } A_1B_1u_1 = \text{aire } ABu,$$

par suite, la coïncidence de l'arc $u_1\beta$ avec l'axe Ov, et, enfin, la coïncidence du dernier élément ds de la courbe $B'Bu$ avec l'axe Ov.

Pour le faire voir, j'observe que, du moment où l'égalité

$$q\Gamma(t) = \text{aire } ABB_1A_1$$

devra avoir lieu dans toute l'étendue de la *fig.* 1, on aura spécialement pour l'arc $u_1\beta$, en désignant par t_0 la température constante le long de cet arc,

$$q_0\Gamma(t_0) = \text{aire } \alpha\beta u_1;$$

quand ensuite il me plaira de considérer deux courbes infiniment rapprochées $\psi(v, p) = u$, $\psi(v, p) = u + du$, la quantité q_0 devra naturellement être envisagée

comme un infiniment petit du premier ordre égal au terme différentiel $f(t_0, u)\,du$, tandis que l'aire $\alpha\beta u_1$ deviendra une quantité infiniment petite du second ordre.

J'en conclus que la relation

$$q_0\Gamma(t_0) = \text{aire } \alpha\beta u_1$$

ne saurait être applicable jusqu'à la dernière limite de petitesse de la différence $u_1 - u$ qu'autant que le rapport de q_0 à $u_1 - u$ se réduira à zéro à la limite $u_1 = u$, ce qui exigera que l'on ait

$$f(t_0, u) = 0.$$

Il s'ensuit que, dans la relation bien connue

$$\text{aire } u\,\mathrm{BB_1}\,u_1 = q\,\Gamma(t) - \int^{u_1} \Gamma(t_0) f(t_0, u)\,du,$$

on aura d'abord

$$0 = \int_u^{u_1} \Gamma(t_0) f(t_0, u)\,du,$$

puis

$$\text{aire } u\,\mathrm{BB_1}\,u_1 = q\,\Gamma(t) = \text{aire } \mathrm{ABB_1A_1};$$

et comme, en tout état de choses, on aura sur la *fig.* 1,

$$\text{aire } \mathrm{A_1B_1}\,u_1 = \text{aire } \mathrm{AB}\,u + \text{aire } u\,\mathrm{BB_1}\,u_1 - \text{aire } \mathrm{ABB_1A_1},$$

il s'ensuivra manifestement

$$\text{aire } \mathrm{A_1B_1}\,u_1 = \text{aire } \mathrm{AB}\,u.$$

Donc l'arc $u_1\beta$, représenté par l'équation

$$\varphi(v, p) = t_0,$$

devra se confondre avec l'axe $\mathrm{O}v$, et, à cause de la relation démontrée

$$f(t_0, u) = 0,$$

aucune somme de chaleur ne sera nécessaire pour faire aller le volume v du fluide de u en u_1 le long de l'axe $\mathrm{O}v$.

Par suite, enfin, de ce que l'on aura

$$f(t_0, u) = 0,$$

le dernier élément ds de la courbe $\mathrm{B}u$ devra tomber dans la direction de l'arc βu_1, laquelle direction est celle de l'axe $\mathrm{O}v$.

Or, de pareilles conséquences ne sauraient guère être admises au point de vue physique de la question pour un gaz permanent, et bien moins encore pour un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, ainsi que je vais le faire voir en peu de mots et d'une manière bien frappante.

Dès l'instant que, sur la *fig.* 2, on admettra les relations

$$q'\Gamma(t') = \text{aire } \mathrm{A'B'B'_1A'_1},$$
$$q\,\Gamma(t) = \text{aire } \mathrm{ABB_1A_1},$$

et, par suite, l'égalité

$$\text{aire } A_1 B_1 B'_1 A'_1 = \text{aire } ABB'A',$$

toutes les courbes de détente $B'B\,a$, $B'_1 B_1 a_1$,... deviendront une seule et même courbe transportée parallèlement à elle-même le long de l'axe Oo, et l'aire curviligne $BB'B'B$ ne sera ni plus ni moins grande que le rectangle correspondant $bB'B'_1 b$, qui aura même base $B'B'_1$ et même hauteur bB'. Tous les triangles $hi'k$, $bB'B$, $b_1 B'_1 B_1$,... seront égaux, et chacune des aires curvilignes $ki'B'_1 B_1$ sera égale au rectangle correspondant $hi'B'_1 b_1$.

Or, l'aire du triangle $b_1 B'_1 B_1$ représente l'augmentation de force motrice que l'on peut obtenir avec une machine à vapeur à détente complète comparativement à une machine à vapeur à détente nulle.

L'aire curviligne $ki'B'_1 B_1$ représente le maximum de force motrice théoriquement possible avec la seule chaleur latente du mélange de liquide et de vapeur de i' en B'_1 sur la *fig.* 2.

L'aire du triangle iik, peu supérieure à l'aire des triangles égaux $hi'k$, $b_1 B'_1 B_1$, représente le maximum de force motrice théoriquement possible avec la quantité de chaleur sensible de la masse liquide de i en i' le long de la courbe $i_0 ii'$.

Les aires $ii'B'_1 b_1$, $hi'B'_1 b_1$ dont la différence est la même que celle des triangles $iii'k$, $hi'k$ représentent, à très-peu près, la quantité de force motrice directe de la valeur dépensée, c'est-à-dire la quantité de force motrice que l'on obtient dans une machine sans détente avec la même dépense de chaleur que celle qui, dans une machine à détente complète, fait obtenir en plus l'aire du triangle $b_1 B'_1 B$ [*].

(*) De la manière dont les machines à vapeur sont disposées, on obtient, à la vérité, dans le cylindre travailleur des quantités de force motrice égales à l'une des aires $PP'B'_1 B_1$, $PP'B_1 b_1$, selon que la machine est à détente complète ou à détente nulle; mais il faut qu'on en défalque ce que coûte l'alimentation de la chaudière.

Si l'on voulait satisfaire à la règle théorique de ne jamais mettre en présence des corps d'inégales températures, il faudrait que la pompe alimentaire pût saisir un volume Pk d'eau et de vapeur à la température t du condenseur; puis il faudrait que le mélange saisi fût refoulé sur lui-même le long de la courbe ki', de manière que, avec une dépense de travail égale à l'aire $Pki'P'$, par coup de piston, la chaudière pût recevoir un volume $P'i'$ de liquide à la température t'.

De cette manière, il ne resterait comme bénéfice que l'une des aires $ki'B'_1 B_1$, $ki'B'_1 b_1$, selon que la machine serait à détente complète ou à détente nulle, et la chaudière n'aurait à dépenser que la quantité de chaleur latente de i' en B'_1.

Cela exigerait une pompe alimentaire trop volumineuse, et l'on préfère avec raison n'alimenter la chaudière qu'avec un volume Pi de liquide à la température t du condenseur.

On devra alors mener par le point i une courbe ih' de l'espèce $\psi(v, p) =$ constante u, par rapport à une masse d'eau entièrement liquide, et le travail de la pompe alimentaire sera représenté par l'aire $Pih'P'$; ce qui fera réaliser, en outre, l'aire quadrilatérale $ih'i'k$ dans la machine à détente complète, comme dans la machine sans détente; mais, par contre, la chaudière aura à fournir d'abord la quantité de chaleur sensible de h' en i' sur la *fig.* 2; plus, ensuite, la quantité de chaleur latente de i' en B'_1.

Ce que je viens de nommer la quantité de chaleur sensible de h' en i' sur la *fig.* 2 est la quantité

Ainsi donc, l'aire $h i' B'_1 B_1$, ou le maximum de force motrice théoriquement possible avec la seule chaleur latente d'un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, ne sera ni plus ni moins grand que l'aire $h i' B'_1 b_1$ ou la quantité de force motrice directe d'une machine sans détente dans laquelle on fera une dépense de chaleur égale à la somme de la chaleur latente et de la chaleur sensible de la vapeur employée.

Je suppose, par exemple, qu'il y ait une température de 100 degrés dans la chaudière et de 50 degrés dans le condenseur d'une machine à vapeur d'eau ; je suppose encore que le point B'_1 ne diffère pas sensiblement du point I' sur la *fig.* 2, c'est-à-dire,

---

de chaleur à dépenser par la chaudière pour que le volume d'eau introduit $P'h'$ sous la pression OP' dans la chaudière, soit porté à sa température d'ébullition t' pendant que le volume augmentera de $P'h'$ à $P'i'$. Il y a une distinction à faire entre cette quantité de chaleur et celle qu'il faudrait employer pour faire aller la masse liquide de i en i' le long de la courbe $i_0 i i'$ sous une pression variable $p = \Omega(t)$.

D'abord le volume d'eau $P'h'$, sous la pression OP' de la chaudière, différera excessivement peu du volume initial Pi sous la pression OP du condenseur, à cause de la compressibilité à peu près nulle de l'eau, et en même temps la température ϑ au point h' surpassera excessivement peu la température t au point i.

Ensuite, si je désigne par dq, dq' les quantités élémentaires de chaleur qu'il sera nécessaire d'employer pour faire aller la température du liquide de t à $t + dt$, d'une part, le long de la courbe $i i'$, et, d'autre part, le long de la petite ligne $h' i'$, en supposant, d'ailleurs, que la ligne $i h'$, presque droite et parallèle à l'axe Op, est une courbe d'espèce $\psi(v, p) = u$ par rapport à la masse liquide, je n'aurai qu'à appliquer à une telle masse liquide les principes généraux de ma théorie des fluides élastiques, pour trouver la condition nécessaire

$$\text{aire } i h' i' = \int_{\vartheta}^{t'} \Gamma'(t)\, dq' - \int_{t}^{t'} \Gamma(t)\, dq.$$

D'autre part, en représentant par

$$v = w = \text{fonction } t,$$

l'équation de la courbe indéfinie $i_0 i i'$, je trouverai manifestement

$$\text{aire } i h' i' = \int_{t}^{t'} w\, dp - w'(p' - p) = p'w' - pw - \int_{t}^{t'} p\, dw$$

et je serai conduit à égaler les seconds membres de ces équations pour avoir la condition mathématiquement nécessaire entre les quantités dq, dq'.

Il faudrait que le volume Pi de liquide à la température t du condenseur fût échauffé progressivement dans le cylindre de la pompe alimentaire jusqu'à la température t' de la chaudière sous une pression variable $p = \Omega(t)$, le long de la courbe $i_0 i i'$ sur la *fig.* 2, pour que le travail de la pompe alimentaire devînt exactement égal à l'aire $Pii'P'$ en place de l'aire $Pih'P'$, et pour que la quantité de chaleur à dépenser fût égale à l'intégrale

$$\int_{t}^{t'} dq,$$

le long de la courbe $i i'$, en place de l'autre intégrale

$$\int_{t}^{t'} dq',$$

le long de la droite $h' i'$.

en d'autres termes, que la vapeur employée soit sensiblement sèche : alors, chaque kilogramme de vapeur dépensée fera sortir de la chaudière 537 unités de chaleur latente, plus 50 unités de chaleur sensible, en tout 587 ; et, d'après ce qui précède, le maximum de force motrice théoriquement possible avec une dépense de 537 unités de chaleur ne sera ni plus ni moins grand que ce que l'on obtiendra dans une machine sans détente avec une dépense de $537 + 50 = 587$ unités de chaleur.

Par suite, dans une machine à détente complète, avec une dépense de 587 unités de chaleur, le maximum de force motrice théoriquement possible ne saurait excéder la quantité de force motrice correspondante de la machine sans détente dans une proportion plus grande que celle de

$$537 : 587 :: 100 : 109,$$

c'est-à-dire, en d'autres termes, que le bénéfice maximum de la détente, dans une machine théoriquement parfaite, ne saurait être que de 9 pour 100 au plus, ce qui n'est certes pas croyable et ce que n'admettra aucun ingénieur.

Je dis donc que si le fait observé par M. Regnault a pu se vérifier à très-peu près pour de l'air atmosphérique, il ne saurait être permis d'y voir une règle générale pour des gaz permanents, et encore moins pour des vapeurs ; que surtout l'on devra se garder d'en faire le point de départ d'une théorie générale des effets dynamiques de la chaleur.

Et qu'on ne croie pas que, pour arriver à de telles conclusions, il me faille avoir établi d'abord la première des équations (A), qui est

$$dQ = \Gamma(t) f(t, u)\, du - p\, dv;$$

car, si je remonte tout à fait à l'origine de la *fig.* 1, je vois d'une manière bien évidente que, en désignant par S l'aire quadrilatérale $BB'B'_1B_1$, j'aurai, d'une part,

$$S = \text{aire } A'B'B'_1A'_1 + \text{aire } A'_1B'_1B_1A_1 - \text{aire } A_1B_1BA - \text{aire } ABB'A',$$

et, d'autre part,

$$S = \text{aire } uB'B'_1u_1 - \text{aire } uBB_1u_1.$$

Je trouverais encore d'autres expressions de l'aire S, s'il me plaisait soit d'abaisser des perpendiculaires des quatre points B, B', B_1, B'_1 sur l'axe Op, soit de prendre la différence des aires curvilignes HIBB'I'H', HIB$_1$B'$_1$H', et toutes ces manières d'évaluer l'aire S seraient géométriquement équivalentes.

Leur entier développement me conduirait à la théorie connue des formules (19) et (19 *bis*), qui, par elles-mêmes, n'ont aucune signification calorifique.

Il faudra que je raisonne à la manière de M. Carnot pour trouver une expression purement calorifique de l'aire S sous la forme

$$S = q'\Gamma(t') - q\Gamma(t),$$

et, de plus, il faudra que je puisse identifier cette autre expression de l'aire S avec l'une des expressions précédentes.

Or, je réussirai à cela très-directement sur la *fig.* 1, sans faire aucune hypothèse, en

observant tout simplement que, entre deux courbes données $B'Bu$, $B'_1B_1u_1$ ou $\psi(v, p) = u$, $\psi(v, p) = u_1$, toute diminution de t ou tout accroissement de t' dans la formule calorifique entraînera sur la *fig.* 1 un accroissement correspondant dans l'aire de la bande curviligne uBB_1u_1 ou $uB'B'_1u_1$.

Il m'est parfaitement évident, en un mot, que, entre la formule calorifique et la seconde des formules géométriques, j'aurai

$$0 = [q'\Gamma(t') - \text{aire } uB'B'_1u_1] - [q\Gamma(t) - \text{aire } uBB_1u_1],$$

ou, ce qui revient au même,

$$q'\Gamma(t') - \text{aire } uB'B'_1u_1 = q\Gamma(t) - \text{aire } uBB_1u_1 = D,$$

la valeur D de ces différences égales ne pouvant dépendre que de u, u_1.

Il m'est tout aussi évident que, par rapport à la courbe $u_1\beta$ déjà considérée sur la *fig.* 1, j'aurai

$$D = q_0\Gamma(t_0) - \text{aire } u\beta u_1.$$

Quand enfin il me plaira de faire une application de cette relation à deux courbes infiniment rapprochées $B'Bu$, $B'_1B_1u_1$, je concevrai parfaitement que, en place de la quantité $q_0\Gamma(t_0)$, j'aurai à considérer le terme infiniment petit du premier ordre

$$\Gamma(t_0)f(t_0, u)\,du,$$

et, en place de l'aire $u\beta u_1$, une quantité infiniment petite du deuxième ordre.

Donc, pour des bandes curvilignes uBB_1u_1, $uB'B'_1u_1$ comprises entre deux courbes infiniment rapprochées $\psi(v, p) = u$, $\psi(v, p) = u + du$, j'aurai

$$dD = \Gamma(t_0)f(t_0, u)\,du;$$

puis, quand il me plaira de juxtaposer une multitude de pareilles bandes, je n'aurai qu'à faire la somme de tous les termes différentiels correspondants pour trouver la différence finie D des deux précédentes équations. J'aurai donc

$$D = \int_u^{u_1} \Gamma(t_0)f(t_0, u)\,du,$$

ce qui me donnera généralement

$$q\Gamma(t) - \text{aire } uBB_1u_1 = \int_u^{u_1} \Gamma(t_0)f(t_0, u)\,du,$$

ou bien

$$q\Gamma(t) = \text{aire } uBB_1u_1 + \int_u^{u_1} \Gamma(t_0)f(t_0, u)\,du,$$

et pareillement

$$q'\Gamma(t') = \text{aire } uB'B'_1u_1 + \int_u^{u_1} \Gamma(t_0)f(t_0, u)\,du,$$

l'intégrale définie des seconds membres pouvant avoir telle valeur que l'expérience fera trouver de u en u_1 le long de l'axe Oc sur les *fig.* 1 et 2.

N'est-ce pas là une théorie complète et entièrement satisfaisante, quelle que puisse être la nature de la fonction universelle $\Gamma(t)$? — J'y suis parvenu en identifiant d'une manière certainement exacte l'expression purement calorifique de l'aire S avec la seconde de mes expressions géométriques; mais il ne me sera pas plus difficile de démontrer toutes les mêmes choses en voulant identifier l'expression calorifique de l'aire S avec la première de mes expressions géométriques, qui était

$$S = \text{aire } A'B'B'_1A'_1 + \text{aire } A'_1B'_1B_1A_1 - \text{aire } A_1B_1BA - \text{aire } ABB'A'.$$

Je commencerai par attribuer à u, u_1 deux valeurs entièrement déterminées, ce qui me fera avoir deux courbes données $B'Bu$, $B'_1B_1u_1$ sur la *fig.* 1.

Je ferai remarquer ensuite que, dans ce cas-là, quand t' sera constant et que t variera, le premier terme seulement du second membre sera constant et que les trois autres varieront à la fois avec t. Quand, au contraire, t sera constant et que t' seul variera, il n'y aura que le troisième terme qui sera constant et les trois autres varieront à la fois avec t'.

Ainsi, le deuxième et le quatrième terme varieront à la fois avec t et t', et comme, dans l'expression calorifique de l'aire S, il n'y a aucun terme de cette espèce, il faudra que j'essaye de faire subir une transformation à ma formule géométrique, ce qui sera très-facile, car on aura sur la *fig.* 1,

$$\text{aire } ABB'A' = \text{aire } A'B'u - \text{aire } ABu,$$
$$\text{aire } A'_1B'_1B_1A_1 = \text{aire } A'_1B'_1u_1 - \text{aire } A_1B_1u_1,$$

puis, en substituant et en ordonnant, je trouverai

$$S = (\text{aire } A'B'B'_1A'_1 + \text{aire } A'_1B'_1u_1 - \text{aire } A'B'u)$$
$$- (\text{aire } A_1B_1BA + \text{aire } A_1B_1u_1 - \text{aire } ABu);$$

c'est-à-dire que, au second membre, j'aurai deux groupes de termes dont le premier ne dependra que de la seule variable t', et dont le second ne dépendra que de la seule variable t.

Il y aura, en un mot, parfaite conformité entre l'expression purement geométrique de l'aire S et l'expression purement calorifique

$$S = q'\Gamma(t') - q\Gamma(t),$$

et, de plus encore, à la simple inspection de la *fig.* 1, on verra que le premier groupe du second membre de l'expression géométrique sera précisément égal à l'aire $uB'B'_1u_1$, tandis que l'autre groupe sera égal à l'aire uBB_1u_1. Ainsi donc l'expression geometrique de l'aire S se confondra avec l'équation connue

$$S = \text{aire } uB'B'_1u_1 - \text{aire } uBB_1u_1;$$

et, par suite, on en conclura tout ce qui precède sans être obligé de supposer la relation auxiliaire

$$\text{aire } A_1B_1B'_1A'_1 = \text{aire } ABB'A',$$

de laquelle ressortiront des consequences si extraordinaires pour les gaz permanents et surtout pour les vapeurs, ainsi que je l'ai fait voir.

Je veux aller plus loin encore et admettre pour un instant que, à tort ou à raison, l'on doive avoir l'égalité

$$\text{aire} = A_1B_1B'_1A'_1 = \text{aire } ABB'A' ;$$

alors ma première expression géométrique de l'aire S se réduira à

$$S = \text{aire } A'B'B'_1A'_1 - \text{aire } ABB_1A_1,$$

et comme on ne cessera pas d'avoir

$$S = \text{aire } uB'B'_1u_1 - \text{aire } uB_1Bu_1,$$

l'on se trouvera pour le moins embarrassé de savoir avec laquelle des deux formules géométriques on devra identifier l'expression calorifique

$$S = q'\Gamma(t') - q\Gamma(t).$$

Quand on optera pour la seconde des deux formules geometriques, on trouvera, comme tout à l'heure,

$$q'\Gamma(t') - \text{aire } uB'B'_1u_1 = q\Gamma(t) - \text{aire } uBB_1u = D,$$

et, en même temps, par rapport à la courbe $u_1\beta$,

$$D = q_0\Gamma(t_0) - \text{aire } u\beta u_1.$$

Quand on optera pour la première des formules geométriques, on sera autorisé seulement à écrire

$$q'\Gamma(t') - \text{aire } A'B'B'_1A'_1 = q\Gamma(t) - \text{aire } ABB_1A_1 = \Delta,$$

sans pouvoir faire à priori $\Delta = 0$, car, le long de la courbe $u_1\beta$, on trouvera

$$\Delta = q_0\Gamma(t_0) - \text{aire } \alpha\beta u.$$

Ainsi donc, de l'une des manières, on aura en principe

$$q\Gamma(t) = \text{aire } uBB_1u + D = \text{aire } uBB_1u + q_0\Gamma(t_0) - \text{aire } u\beta u ;$$

de l'autre manière, on aura

$$q\Gamma(t) = \text{aire } ABB_1A + \Delta = \text{aire } ABB_1A + q_0\Gamma(t_0) - \text{aire } \alpha\beta u.$$

et ces deux formules seront parfaitement equivalentes, car on aura generalement sur la *fig.* 1, d'une manière géometriquement évidente,

$$\text{aire } uBB_1u_1 = \text{aire } ABB_1A_1 + \text{aire } A_1B_1u_1 - \text{aire } ABu,$$

et, à raison de l'egalité supposée entre les aires $A_1B_1B'_1A'_1$, $ABB'A'$, on aura encore

$$0 = \text{aire } A_1B_1u_1 - \text{aire } AB\beta\alpha ;$$

puis, en soustrayant, on trouvera

$$\text{aire } uBB_1u_1 = \text{aire } ABB_1A - \text{aire } \alpha\beta u,$$

et, par suite, il sera facile de reconnaître la parfaite identité des deux formules en question l'une avec l'autre.

Cela convenu, je suppose que l'on fasse $u_1 = u + du$, afin de n'avoir à considérer que deux courbes infiniment rapprochées $B'Bu$, $B'_1B_1u_1$ sur la *fig.* 1; alors la quantité $q_0\Gamma(t_0)$ se réduira au terme différentiel de premier ordre

$$\Gamma(t_0)f(t_0, u)\,du,$$

et chacune des aires $u\beta u_1$, $\alpha\beta u_1$ deviendra une quantité infiniment petite du second ordre.

Il me sera d'ailleurs loisible de juxtaposer une infinité de bandes infiniment étroites de chacune des espèces ABB_1A_1, uBB_1u_1, dont les sommes feront les aires totales ABB_1A_1, uBB_1u_1 de la *fig.* 1. J'aurai alors, de l'une des manières,

$$q\Gamma(t) = \text{aire } uBB_1u_1 + \int_u^{u_1} \Gamma(t)f(t, u)\,du,$$

et, de l'autre manière,

$$q\Gamma(t) = \text{aire } ABB_1A_1 + \int_u^{u} \Gamma(t)f(t, u)\,du.$$

Mais la première relation sera absolument vraie et ne dépendra de nulle hypothèse. La seconde ne subsistera qu'en vertu de l'égalité supposée

$$\text{aire } A_1B_1B'_1A'_1 = \text{aire } ABB'A'.$$

Donc, quand je n'invoquerai pas cette égalité, j'aurai la première relation seule, sans nulle condition ni pour l'intégrale définie qui s'y trouve, ni pour la direction de la courbe $u_1\beta$.

Quand, au contraire, j'invoquerai l'égalité en question, je trouverai à la fois l'une et l'autre relation, et, par suite, j'en conclurai l'égalité

$$\text{aire } uBB_1u_1 = \text{aire } ABB_1A_1;$$

par suite aussi, il faudra que l'on ait

$$\text{aire } A_1B_1u_1 = \text{aire } ABu,$$

et, par suite enfin, la courbe $u_1\beta$ devra coïncider avec l'axe Ov.

Cela ne fera aucune condition, il est vrai, pour le terme $\Gamma(t_0)f(t_0, u)\,du$; mais le produit $q\Gamma(t)$ ne représentera pas la commune valeur des aires égales ABB_1A_1, uBB_1u_1.

On aura

$$q\Gamma(t) = \text{aire } uBB_1u_1 + \int_u^{u_1} \Gamma(t)f(t, u)\,du.$$

et cette expression toujours vraie du produit $q\Gamma(t)$ ne pourra se réduire à

$$q\Gamma(t) = \text{aire } ABB_1A_1 = \text{aire } uBB_1u_1$$

qu'autant que l'on aura

$$0 = f(t, u).$$

ce qui fera coïncider encore le dernier élément ds de la courbe $B\beta u$ avec l'axe Ou.

De cette manière, je crois avoir expliqué et démontré toutes les mêmes choses sans faire intervenir la fonction Q; mais il m'est bien évident que la fonction Q doit jouer en effet le rôle que je lui ai assigné, et que, dans le cas actuel, avec l'égalité supposée

$$\text{aire } A_1B_1B'_1A'_1 = \text{aire } ABB'A',$$

sans la relation

$$o = f(t_0, u),$$

la courbe BD de la *fig.* 1 rencontrerait la perpendiculaire A_1B_1 au-dessous du point B_1.

Je suis convaincu enfin que, dans la vraie nature des choses, la courbe BD représentée par l'équation différentielle $dQ = o$ ou

$$\Gamma(t) f(t, u)\, du - p\, dv = o,$$

tombera toujours dans l'espace angulaire CBB_1 de la *fig.* 1, ce qui exigerait que l'on eût en principe

$$\text{aire } ABB_1A_1 < q\,\Gamma(t),$$

et, par conséquent,

$$\text{aire } ABB_1A_1 < \text{aire } uBB_1u_1 + \int_u^{u_1} \Gamma(t_0) f(t_0, u)\, du.$$

Quoi qu'il en soit, je vais faire voir encore comment l'on peut développer algébriquement toute la théorie des effets dynamiques de la chaleur, en partant de l'hypothèse que la fonction Q ne doit varier qu'avec la température t sur les *fig.* 1 et 2.

Je remonte à l'équation (L), et je pose

$$\Gamma(t)\, dq = \Gamma(t) f(t, u)\, du = \frac{dQ(t)}{dt} dt + p\, dv = Q'(t)\, dt + p\, dv.$$

Je prends v, p comme variables indépendantes, et j'en tire

$$q_v \Gamma(t) = \Gamma(t) f(t, u) \frac{du}{dv} = Q'(t) \frac{dt}{dv} + p = Q'(t)\, \delta_v + p,$$

$$q_p \Gamma(t) = \Gamma(t) f(t, u) \frac{du}{dp} = Q'(t) \frac{dt}{dp} = Q'(t)\, \delta_p.$$

Je trouve ensuite, pour les expressions des chaleurs spécifiques principales c_0, c_1,

$$c_0 \Gamma(t) = \frac{q_v \Gamma(t)}{\delta_v} = Q'(t) + \frac{p}{\delta_v},$$

$$c_1 \Gamma(t) = \frac{q_p \Gamma(t)}{\delta_p} = Q'(t),$$

$$c_0 - c_1 = \frac{p}{\delta_v},$$

et, pour la chaleur spécifique c dans une direction quelconque,

$$c \Gamma(t) = \frac{dq}{dt} \Gamma(t) = \Gamma(t) f(t, u) \frac{du}{dt} = Q'(t) + p \frac{dv}{dt}.$$

puis, pour les expressions de la chaleur latente,

$$\frac{dq_2}{dv_2}\Gamma(t) = (c_0 - c_1)\mathfrak{T}_0\Gamma(t) = p\mathfrak{T},$$

$$\frac{dq_2}{dp_2}\Gamma(t) = (c_0 - c_1)\mathfrak{T}_1\Gamma(t) = p\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1}.$$

et la dernière des équations (N), c'est-à-dire la condition nécessaire pour que l'expression de du puisse être une différentielle exacte, sera

$$\frac{\Gamma(t)f(t, u)}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t)f(t, u)]} = p\mathfrak{T}_1 = p\frac{dt}{dp}.$$

Le fluide élastique pourra être d'ailleurs un gaz permanent ou un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide.

Dans le premier cas on aura, en vertu de la loi de Mariotte,

$$pv = a(t);$$

d'où

$$p = \frac{da(t)}{dt}\frac{dt}{dv},$$

$$v = \frac{da(t)}{dt}\frac{dt}{dp},$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{T}_0 = \frac{dt}{dv} = \frac{p}{a'(t)},$$

$$\mathfrak{T}_1 = \frac{dt}{dp} = \frac{v}{a'(t)};$$

par suite,

$$q\Gamma(t) = \left(\frac{Q'(t)}{a'(t)} + 1\right)p,$$

$$q\Gamma(t) = \frac{Q'(t)}{a'(t)}v,$$

$$c\Gamma(t) = Q'(t) + a'(t),$$

$$c\Gamma(t) = Q'(t),$$

$$c - c_1\Gamma(t) = a'(t),$$

$$\frac{dq_2}{dv_2}\Gamma(t) = p,$$

$$\frac{dq_2}{dp_2}\Gamma(t) = v,$$

et la condition nécessaire deviendra

$$\frac{\Gamma(t)f(t,u)}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t)f(t,u)]} = p\frac{dt}{dp} = \frac{a(t)}{a'(t)},$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$a(t)\frac{d}{dt}[\Gamma(t)f(t,u)] - \Gamma(t)f(t,u)\frac{d}{dt}a(t) = 0,$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{\Gamma(t)f(t,u)}{a(t)}\right\} = 0,$$

et de là on tirera, par voie d'intégration,

$$\frac{\Gamma(t)f(t,u)}{a(t)} = \text{constante} = \text{fonction } u.$$

Donc, en désignant par $\varepsilon(u)$ une fonction arbitraire de la variable u, il faudra que l'on ait

$$\Gamma(t)f(t,u) = a(t)\varepsilon(u),$$

et la fonction $f(t,u)$ sera nécessairement de l'espèce

$$f(t,u) = \gamma(t)\varepsilon(u),$$

à la condition d'avoir

$$\Gamma(t)\gamma(t) = a(t).$$

Ce résultat ne changera rien aux expressions des quantités q_0, q_1, c_0, c_1, dq; mais la relation initiale

$$\Gamma(t)f(t,u)du = dQ + pdt$$

deviendra

$$a(t)\varepsilon(u)du = Q'(t)dt + a(t)\frac{dc}{c},$$

et, en la divisant par $a(t)$, on aura la différentielle exacte

$$\varepsilon(u)du = \frac{Q'(t)}{a(t)}dt + \frac{dc}{c},$$

de laquelle on tirera, par voie d'intégration,

$$\int\varepsilon(u)du = \int\frac{Q'(t)}{a(t)}dt + \log c.$$

Ce sera l'équation générale des courbes $\phi(c,p) = 0$ en c, t, et pour avoir l'équation des mêmes courbes en c, p, il ne s'agirait que d'éliminer t entre l'équation trouvée et la relation $cp = a(t)$.

On aura, en même temps, pour la somme de chaleur nécessaire d'un point t, u à un autre point infiniment voisin $t + dt$, $u + du$,

$$dq = f(t,u)du = \gamma(t)\varepsilon(u)du,$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t)\,\varphi(t, u)\,du = a(t)\,\varphi(t, u)\,du.$$

Mais une relation de cette espèce ne sera ni plus ni moins générale qu'une expression plus simple de la forme

$$dq = f(t, u)\,du = \gamma(t)\,du,$$

ou

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t)\,f(t, u)\,du = \Gamma(t)\,\gamma(t)\,du = a(t)\,\gamma(t)\,du,$$

et, par suite, la relation initiale

$$\Gamma(t)\,f(t, u)\,du = dQ + p\,dv$$

deviendra

$$a(t)\,\gamma(t)\,du = Q'(t)\,dt + p\,dv = Q'(t)\,dt + a(t)\,\frac{dv}{v};$$

puis, en la divisant par $a(t)$,

$$du = \frac{Q'(t)}{a(t)}\,dt + \frac{dv}{v}.$$

En intégrant cette formule, on trouvera l'équation générale des courbes $\psi(v, p) = u$ sous la forme

$$u = \int \frac{Q'(t)}{a(t)}\,dt + \log v.$$

Pour la discuter, on n'aura qu'à désigner par v, v_1 les valeurs de v qui dépendront de deux valeurs différentes u, u_1 sur une même courbe $\varphi(v, p) = t$ ou $vp = a(t)$, et l'on aura d'abord l'équation précédente, puis

$$u_1 = \int \frac{Q'(t)}{a(t)}\,dt + \log v_1.$$

On en conclura, par soustraction,

$$u_1 - u = \log v_1 - \log v.$$

Ainsi, la différence des logarithmes de v, v_1 sera constante de haut en bas sur la *fig.* 1 pour tous les arcs BB_1, $B'B'_1$,... interceptés entre deux courbes données $B'Bu$, $B'_1B_1u_1$ ou $\psi(v, p) = u$, $\psi(v, p) = u_1$, et, par suite, la connaissance d'une seule de ces courbes entraînera celle de toutes les autres.

Pour une de ces courbes en particulier, c'est-à-dire pour une valeur constante quelconque de u, on aura

$$\log v = u - \int \frac{Q'(t)}{a(t)}\,dt,$$

et, au moyen de la notation auxiliaire,

$$E(t) = \int \frac{Q'(t)}{a(t)}\,dt,$$

ou

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{Q'(t)}{a(t)}.$$

on aura, sous forme plus simple,

$$\log v = u - E(t);$$

puis, à une autre température t' le long de la même courbe,

$$\log v' = u - E(t').$$

et, par soustraction, l'on trouvera

$$\log v - \log v' = E(t') - E(t) = \int_t^{t'} \frac{Q'(t)}{a(t)} dt.$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$v = e^{u - E(t)} = \frac{e^u}{e^{E(t)}},$$

$$v' = e^{u - E(t')} = \frac{e^u}{e^{E(t')}},$$

$$\frac{v}{v'} = \frac{e^{E(t')}}{e^{E(t)}} = e^{E(t') - E(t)} = e^{\int_t^{t'} \frac{Q'(t)}{a(t)} dt}.$$

Donc, toutes les courbes $\psi(v, p) = u$ seront parfaitement déterminées sur la *fig.* 1 dans l'intervalle des deux courbes $\varphi(v, p) = t_0$, $\varphi(v, p) = t_1$ entre les températures t_0, t_1, desquelles on connaîtra la fonction $Q(t)$, et, par suite, la fonction $E(t)$. Réciproquement, si l'une des courbes $\psi(v, p) = u$ était connue de t_0 à t_1, on pourrait s'en servir pour en déduire la fonction $E(t)$, et, par suite, la fonction $Q(t)$ de t_0 à t_1.

La manière de faire le calcul dans le dernier cas, consisterait à prendre l'équation différentielle de la courbe donnée, ce qui ferait avoir

$$\frac{dv}{v} = \frac{dE(t)}{dt} dt = -\frac{Q'(t)}{a(t)} dt;$$

puis, en multipliant cette équation par $pv\,dt = a(t)\,dt$, et en transposant, on aurait

$$dQ = Q'(t)\,dt = p\,dv.$$

Ainsi l'accroissement de la fonction Q devrait être égal à l'accroissement de l'aire du triangle AvB, et, par suite, en ne préjugeant rien de la valeur Q_0 de la fonction Q à la limite inférieure t_0, on aurait, de t_0 à t,

$$Q(t) = Q(t_0) - \int_{v_0}^{v} p\,dv = Q(t_0) - \text{aire } ABB'A' \text{ de } t_0 \text{ à } t).$$

Il y a à faire remarquer d'ailleurs que, d'après l'équation $vp = a(t)$, la fonction $a(t)$ satisfera nécessairement à la condition $a(t) = 0$ quand on y fera $p = 0$ et que, par suite, il ne saurait plus y avoir ni chaleur ni force vive latente le long de l'axe Ov; ainsi la quantité Q devra être rigoureusement égale à l'aire du triangle AvB.

L'une des courbes $B'Bu$, $B'_1B_1u_1$ n'étant pas facile à déterminer directement, il suffirait que l'on parvînt à connaître l'une des chaleurs spécifiques c_0, c_1 en fonction

de t, pour que, en multipliant par dt les expressions connues

$$c_0 \Gamma(t) = Q'(t) + a'(t),$$
$$c_1 \Gamma(t) = Q'(t),$$

et en les intégrant à partir d'une limite inférieure quelconque t_0, l'on eût, à partir de cette limite,

$$Q(t) = Q(t_0) + \int_{t_0}^{t} c_1 \Gamma(t)\, dt,$$

ou

$$Q(t) = Q(t_0) + \int_{t_0}^{t} c_0 \Gamma(t)\, dt - [a(t) - a(t_0)].$$

Je suppose, enfin, que l'on ait réussi à déterminer expérimentalement une fonction $C(t)$ qui soit telle, que la différentielle de cette fonction $C'(t)\,dt$ puisse représenter la quantité de chaleur nécessaire pour faire aller les quantités v, p d'un gaz permanent le long d'une courbe donnée quelconque sur la *fig.* 1 supposée représentée par une équation de la forme

$$v = \omega = \text{fonction}(t).$$

En faisant, alors, $dq = C'(t)\,dt$ et $v = \omega$, dans la relation de principe

$$\Gamma(t)\, dq = \Gamma(t) f(t, u)\, du = \Gamma(t) \varphi(t)\, du = a'(t)\, du = dQ + p\, d\omega,$$

on trouvera, le long de la courbe donnée,

$$dQ = \Gamma(t) C'(t)\, dt - p\, d\omega,$$

et, par voie d'intégration, on en déduira

$$Q(t) = \int \Gamma(t) C'(t)\, dt - \int p\, d\omega,$$

en observant que, le long de l'axe Ov, on devra avoir

$$C'(t_0) = 0$$

à cause de la relation

$$a(t_0) = 0.$$

On aura, en même temps,

$$\frac{dE(t)}{dt}\, dt = \frac{Q'(t)}{a(t)}\, dt = \frac{\Gamma(t) C'(t)}{a(t)}\, dt - \frac{d\omega}{\omega},$$

et, en intégrant,

$$E(t) = \int \frac{Q'(t)}{a(t)}\, dt = \int \frac{\Gamma(t) C'(t)}{a(t)}\, dt - \log \omega,$$

puis, entre deux limites données t, t',

$$E(t') - E(t) = \int_t^{t'} \frac{Q'(t)}{a(t)}\, dt = \int_t^{t'} \frac{\Gamma(t) C'(t)}{a(t)}\, dt - [\log \omega' - \log \omega],$$

et, par suite, en remontant à l'équation générale des courbes $\varphi(v, p) = u$,

$$\log v - \log v' = E(t) - E(t') = \int_{t'}^{t} \frac{\Gamma(t)\, C'(t)}{a(t)}\, dt - (\log w' - \log w)$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$(\log v - \log v') - (\log w - \log w') = \int_{t'}^{t} \frac{\Gamma(t)\, C'(t)}{a(t)}\, dt,$$

ou encore

$$\log \frac{v}{w} - \log \frac{v'}{w'} = \int_{t'}^{t} \frac{\Gamma(t)\, C'(t)}{a(t)}\, dt.$$

De toute manière et sans connaître la fonction Q, on aura, relativement à l'aire quadrilatérale $BB'B'_1B_1$ de la *fig.* 1,

$$q(t) = a(t)(v - u),$$

$$q(t') = a(t')(v' - u'),$$

et la différence

$$S = q(t') - q(t) = (a(t') - a(t))(v - u)$$

devra être égale à l'aire du quadrilatère $BB'B'_1B_1$.

Et, en effet, comme la fonction Q ou l'aire du triangle AuB dépendra de la variable t seulement, on en conclura d'abord l'égalité des aires $ABB'A'$, $A_1B_1B'_1A'_1$; puis, la relation connue

$$S = \text{aire } A'B'B'_1A'_1 + \text{aire } A'_1B'_1B_1A_1 - \text{aire } A_1B_1BA - \text{aire } ABB'A'$$

se réduira à

$$S = \text{aire } A'B'B'_1A'_1 - \text{aire } ABB_1A_1.$$

D'autre part, on trouvera directement, le long d'une courbe BB_1 ou $vp = a(t)$,

$$\text{aire } ABB_1A = \int_{v}^{v_1} p\, dv = a(t) \int_{v}^{v_1} \frac{dv}{v} = a(t)(\log v - \log v_1),$$

et, quand on remplacera la différence des logarithmes de v, v_1 par la différence égale $u_1 - u$, on reconnaîtra la parfaite égalité de l'aire ABB_1A_1 avec le produit $q\Gamma(t)$, tandis que l'aire $A'B'B'_1A'_1$ sera égale au produit $q'\Gamma(t')$, ce qui fera retrouver exactement l'expression déjà connue de l'aire S.

Quand on voudra trouver l'aire S délimitée par une courbe fermée quelconque s, on n'aura qu'à remonter à la relation de principe

$$\Gamma(t)\, dq = \Gamma(t) f(t, u)\, du = \Gamma(t)\, \gamma(t)\, du,$$

ou

$$\Gamma(t)\, dq = a(t)\, du = dQ = p\, ds.$$

et intégrer cette formule tout à l'entour de la ligne s, ce qui fera trouver

$$\int_0^s \Gamma(t)\,dq = \int_0^s a(t)\,du = \int_0^s dQ + \int_0^s p\,dv,$$

et, comme dQ sera une différentielle exacte, on aura

$$0 = \int_0^s dQ,$$

par suite, pour la quantité cherchée,

$$S = \int_0^s p\,dv - \int_0^s a(t)\,du = \int_0^s \Gamma(t)\,dq.$$

Telle est la théorie complète et bien explicite à laquelle on arrivera pour tous les gaz permanents en acceptant le fait observé par M. Regnault comme une vérité générale et en y joignant la loi de Mariotte seulement.

Ce que j'ai dit auparavant avait pour objet de faire voir que, alors même qu'on ne ferait pas usage de la loi de Mariotte, on se trouverait amené à ne concevoir ni chaleur ni force vive latente le long de l'axe Ov, ce qui ne paraît guère admissible au point de vue physique des choses.

Je veux bien admettre que l'on ne doit pas trop insister sur les conséquences extrêmes d'une pareille théorie le long de l'axe Ov; mais il restera toujours à vérifier si, dans la région de la *fig.* 1, où la loi de Mariotte sera sensiblement exacte, les quantités q_0, q_1, c_0, c_1, dq_φ suivent, en effet, les lois que j'ai trouvées.

Il me reste à ajouter, enfin, que lorsqu'on invoquera à la fois la loi de Mariotte et celle de Gay-Lussac, on aura

$$\frac{vp}{1+\alpha t} = \frac{v_0 p_0}{1+\alpha t_0},$$

les lettres v_0, p_0, t_0 servant à désigner les valeurs particulières des quantités v, p, t d'une masse de gaz en un point donné de la *fig.* 1, et la lettre α représentant le coefficient de la dilatation thermométrique à pression constante, à partir de $t = 0$.

En faisant, pour abréger,

$$m = \frac{v_0 p_0}{1+\alpha t_0},$$

on aura

$$vp = m(1+\alpha t),$$

et, par conséquent,

$$a(t) = m(1+\alpha t),$$

d'où

$$a'(t) = m\alpha.$$

par suite,

$$q_0\Gamma(t) = \left(\frac{Q'(t)}{m\alpha} + 1\right)p,$$

$$q_1\Gamma(t) = \frac{Q'(t)}{m\alpha}v,$$

$$c_0\Gamma(t) = Q'(t) + m\alpha,$$

$$c_1\Gamma(t) = Q'(t),$$

$$(c_0 - c_1)\Gamma(t) = m\alpha,$$

les expressions de la chaleur latente ne cessant pas d'être

$$\frac{dq_\xi}{dv_\xi}\Gamma(t) = p,$$

$$\frac{dq_\xi}{dp_\xi}\Gamma(t) = v.$$

Quand, au lieu d'un gaz permanent, on voudra considérer un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, la relation de Mariotte devra être remplacée par une certaine équation de la forme

$$p = \Omega(t).$$

Toutes les courbes BB_1, $B'B'_1$,... deviendront des lignes droites parallèles à l'axe Ov sur la *fig.* 2, et l'on aura

$$\mathfrak{z}_0 = \frac{dt}{dv} = 0,$$

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{dt}{dp} = \frac{1}{\Omega'(t)};$$

par suite, en recourant aux formules générales de la théorie précédente, avant que j'aie fait usage de la relation $vp = a(t)$, ou bien en recourant aux équations (L), (M), (N), (O), et en regardant la quantité Q comme une fonction de t seulement, on trouvera

$$q_0\Gamma(t) = p,$$

$$q_1\Gamma(t) = \frac{Q'(t)}{\Omega'(t)}.$$

$$c_0\Gamma(t) = \infty,$$

$$c_1\Gamma(t) = Q'(t),$$

$$(c_0 - c_1)\Gamma(t) = \infty,$$

$$c\Gamma(t) = Q'(t) + p\frac{dv}{dt}.$$

La dernière des équations (N) sera

$$\frac{\Gamma(t)f(t,u)}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t)f(t,u)]} = p\mathfrak{z}_1 = p\frac{dt}{dp} = \frac{p}{\Omega'(t)}.$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$p\frac{d}{dt}[\Gamma(t)f(t,u)] - \Gamma(t)f(t,u)\frac{dp}{dt} = 0,$$

ou encore

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma(t)f(t,u)}{p}\right) = 0,$$

et, par voie d'intégration, on en tirera

$$\Gamma(t)f(t,u) = p\,\varepsilon(u) = \Omega(t)\,\varepsilon(u)$$

Ainsi la fonction $f(t, u)$ sera nécessairement de l'espèce

$$f(t,u)\,du = \gamma(t)\,\varepsilon(u),$$

à la condition d'avoir

$$\Gamma(t)\gamma(t) = p = \Omega(t).$$

Ce résultat ne changera rien aux expressions des quantités q_0, q_1, c_0, c_1, dq_0; mais il servira à transformer la relation initiale

$$\Gamma(t)f(t,u)\,du = dQ + p\,dv$$

en

$$\Omega(t)\,\varepsilon(u)\,du = Q'(t)\,dt + p\,dv,$$

puis, en divisant par $p = \Omega(t)$, on aura la différentielle exacte

$$\varepsilon(u)\,du = \frac{Q'(t)}{\Omega(t)}\,dt + dv,$$

de laquelle on tirera, par voie d'intégration,

$$\int \varepsilon(u)\,du = \int \frac{Q'(t)}{\Omega(t)}\,dt + v.$$

Ce sera l'équation générale des courbes $\psi(v, p) = u$ en v, t, et, pour avoir l'équation des mêmes courbes en v, il ne s'agirait que d'éliminer t entre l'équation trouvée et la relation $p = \Omega(t)$.

On aura en même temps, pour la quantité de chaleur nécessaire d'un point t, u à un autre point infiniment voisin $t + dt$, $u + du$,

$$dq = f(t,u)\,du = \gamma(t)\,\varepsilon(u)\,du,$$

ou

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t)f(t,u)\,du = \Gamma(t)\gamma(t)\,\varepsilon(u)\,du = \Omega(t)\,\varepsilon(u)\,du.$$

Mais des relations de cette espèce ne seront ni plus ni moins générales que celles que l'on trouvera en faisant

$$\varepsilon(u) = 1,$$

et en écrivant simplement

$$dq = f(t,u)\,du = \gamma(t)\,du$$

ou

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t)f(t,u)\,du = \Gamma(t)\gamma(t)\,du = \Omega(t)\,du,$$

par suite,

$$\Omega(t)\,du = Q'(t)\,dt + p\,dv$$

ou

$$du = \frac{Q'(t)}{\Omega(t)}\,dt + dv;$$

d'où l'on conclura, par voie d'intégration, pour l'équation générale des courbes $\psi(v, p) = u$ ou $B'Bu$, $B'_1B_1u_1$,... sur la *fig.* 2,

$$u = \int \frac{Q'(t)}{\Omega(t)}\,dt + v.$$

En désignant par v, v_1 les valeurs de v qui dépendront de deux valeurs différentes u, u_1 sur une même droite PI ou $p = \Omega(t)$ parallèle à l'axe Ov, on aura d'abord l'équation trouvée, puis

$$u_1 = \int \frac{Q'(t)}{\Omega(t)}\,dt + v_1,$$

et, en soustrayant,

$$u_1 - u = v_1 - v.$$

Ainsi, la différence $v_1 - v$ sera constante de haut en bas sur la *fig.* 2 entre deux courbes données $B'Bu$, $B'_1B_1u_1$, et, par suite, toutes les courbes de détente $\psi(v, p) = u$ seront une même courbe transportée parallèlement à elle-même le long de l'axe Ov.

Pour l'une de ces courbes en particulier, c'est-à-dire pour une valeur constante quelconque de u, on aura

$$v = u - \int \frac{Q'(t)}{\Omega(t)}\,dt,$$

et, au moyen de la notation auxiliaire

$$E(t) = \int \frac{Q'(t)}{\Omega(t)}\,dt,$$

ou

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{Q'(t)}{\Omega(t)},$$

on aura, sous forme plus simple,

$$v = u - E(t),$$

puis, à une autre température t', le long de la même courbe, on aura

$$v' = u - E(t'),$$

et, par soustraction, on trouvera

$$v - v' = E(t') - E(t) = \int_t^{t'} \frac{Q'(t)}{\Omega(t)}\,dt.$$

Ce sera la commune valeur des longueurs bb', bB, b_1B,... sur la *fig.* 2, et, par con-

séquent, toutes les courbes $\psi(v, p) = u$ seront parfaitement déterminées dans l'intervalle de deux parallèles à l'axe Ov entre les températures t_0, t_1, desquelles on connaîtra la fonction $Q(t)$, et, par suite, la fonction $E(t)$; ou, réciproquement, si l'un des arcs $t'k$, $B'B$, B'_1B_1,... était connu de t_0 à t_1, on pourrait s'en servir pour en déduire la fonction $E(t)$, et, par suite, la fonction $Q(t)$ de t_0 à t_1.

On aurait pour l'équation différentielle de la courbe donnée

$$dv = -\frac{dE(t)}{dt}dt = -\frac{Q'(t)}{\Omega(t)}dt,$$

et, en multipliant cette équation par $p = \Omega(t)$, on trouverait

$$p\,dv = -Q'(t)\,dt,$$

c'est-à-dire

$$dQ = Q'(t)\,dt = -p\,dv.$$

Ainsi, l'accroissement de la fonction Q devrait être égal à l'accroissement de l'aire du triangle AuB, et, par suite, en ne préjugeant rien de la valeur de la fonction Q_0 de la fonction Q à la limite inférieure t_0, on aurait, de t_0 à t,

$$Q(t) = Q(t_0) - \int_{t_0}^{t} p\,dv = Q(t_0) + \text{aire } ABB'A'.$$

Il y a à faire remarquer, d'ailleurs, que, d'après l'équation

$$p = \Omega(t),$$

la fonction $\Omega(t)$ satisfera nécessairement à la condition $\Omega(t_0) = 0$ quand on y fera $p = 0$, et que, par suite, il ne saurait plus y avoir ni chaleur ni force vive latente le long de l'axe Ov.

Ainsi, la quantité Q devra être rigoureusement égale à l'aire du triangle AuB.

La forme des courbes $B'Bu$, $B'_1B_1u_1$ n'étant pas facile à déterminer directement de manière qu'on puisse en déduire ensuite l'aire du triangle AuB, ou seulement l'augmentation de cette aire, $ABB'A'$, de t à t', je suppose que l'on ait réussi à trouver expérimentalement une fonction $c(t)$ qui soit telle, que la différentielle de cette fonction $c'(t)\,dt$ puisse représenter la quantité de chaleur nécessaire pour faire aller les quantités v, p du mélange le long d'une courbe donnée quelconque sur la *fig.* 2, supposée représentée par l'équation

$$v - u = \text{fonction}(t).$$

En faisant, alors,

$$dq = c'(t)\,dt$$

dans la relation de principe

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t)\,f(t, u)\,du = \Gamma(t)\,\Omega(t)\,du = \Omega(t)\,du = dQ + p\,dv,$$

on trouvera le long de la courbe donnée

$$dQ = \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - p\,dv,$$

et, par voie d'intégration, on en déduira

$$Q(t) = \int \Gamma(t)\, c'(t)\, dt - \int p\, d\omega,$$

en observant que, à la rencontre de l'axe Ov, on devra avoir

$$c'(t_0) = 0,$$

à cause de la relation

$$\Omega(t_0) = 0.$$

On aura, en même temps,

$$\frac{dE(t)}{dt}\, dt = \frac{Q'(t)}{\Omega(t)}\, dt = \frac{\Gamma(t)\, c'(t)}{\Omega(t)}\, dt - d\omega,$$

et, en intégrant,

$$E(t) = \int \frac{\Gamma(t)\, c'(t)\, dt}{\Omega(t)} - (\omega' - \omega);$$

puis, entre deux limites données t, t',

$$E(t') - E(t) = \int_t^{t'} \frac{\Gamma(t)\, c'(t)\, dt}{\Omega(t)} - (\omega' - \omega),$$

et, par suite, en remontant à l'équation générale des courbes $\psi(v, p) = u$,

$$v - v' = E(t') - E(t) = \int_t^{t'} \frac{\Gamma(t)\, c'(t)\, dt}{\Omega(t)} - (\omega' - \omega),$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$(v - v') - (\omega - \omega') = \int_t^{t'} \frac{\Gamma(t)\, c'(t)\, dt}{\Omega(t)},$$

ou encore

$$(v - \omega) - (v' - \omega') = \int_t^{t'} \frac{\Gamma(t)\, c'(t)\, dt}{\Omega(t)}.$$

La courbe dont l'équation est

$$v - \omega = \text{fonction}(t)$$

pourra notamment être la ligne $i_0 i i'$ de la *fig.* 2, et, alors, l'intégrale définie

$$\int_t^{t'} \frac{\Gamma(t)\, c'(t)\, dt}{\Omega(t)}$$

représentera la longueur ik sur la *fig.* 2.

Pour celle des courbes $\psi(v, p) = u$ qui partira du point I', on devra faire

$$c' = W',$$

et l'on trouvera

$$\overline{K} = v - \omega = (W' - \omega) + \int_t^{t'} \frac{\Gamma(t)\, c'(t)\, dt}{\Omega(t)}.$$

mais la courbe I'K n'existera réellement dans l'intervalle de t à t' qu'autant que la valeur trouvée pour $v - \varpi$ n'excédera pas la limite $W - \varpi$.

De toute manière, et sans connaître la fonction $Q(t)$, on aura pour la quantité de chaleur latente q de B en B_1,

$$q\Gamma(t) = \Gamma(t)\gamma(t)(u_1 - u) = \Omega(t)(u_1 - u) = p(v_1 - v),$$

et, par conséquent, en désignant par L la quantité totale de chaleur latente de t en I,

$$L\Gamma(t) = p(W - \varpi).$$

L'expérience devra faire connaître si cette relation est exacte ou non.

Il y a faire remarquer, à ce sujet, que, quelle que puisse être la loi de la chaleur latente L en fonction de t, si l'on désigne par x la fraction de la masse totale actuellement transformée en vapeur et par l la quantité de chaleur latente qui sera nécessaire pour produire la quantité de vapeur x, on aura nécessairement, d'une part,

$$v = (1 - x)\varpi + xW = \varpi + (W - \varpi)x,$$

ou

$$x = \frac{v - \varpi}{W - \varpi},$$

et, d'autre part,

$$l = Lx = \frac{L(v - \varpi)}{W - \varpi},$$

ou

$$\frac{l}{L} = x = \frac{v - \varpi}{W - \varpi},$$

puis, en remplaçant x par x_1,

$$\frac{l_1}{L} = x_1 = \frac{v_1 - \varpi}{W - \varpi},$$

et, en soustrayant,

$$\frac{l_1 - l}{L} = x_1 - x = \frac{v_1 - v}{W - \varpi}.$$

La differentielle $l_1 - l$ sera la valeur précédente de q. Ainsi la proportionnalité de q à la difference $v_1 - v$ sera une chose absolument certaine; mais ce qui aura besoin d'être vérifié, ce sera la relation

$$L\Gamma(t) = p(W - \varpi).$$

De même, après avoir trouvé, de B en B_1,

$$q\Gamma(t) = p(u_1 - u),$$

on trouvera, de B' en B'_1,

$$q'\Gamma(t') = p'(u' - u'),$$

et l'on en conclura

$$\frac{q\Gamma(t)}{q'\Gamma(t')} = \frac{p}{p'}.$$

Donc, avec l'hypothèse

$$\Gamma(t) = \text{constante } G,$$

on aurait

$$\frac{q}{q'} = \frac{p}{p'};$$

et comme, dans l'allure de la machine de Watt, le rapport $\frac{p}{p'}$ ne sera que de $\frac{1}{10}$ environ, on doit conclure que, dans ce cas-là, avec une machine à vapeur théoriquement parfaite qui servirait à faire obtenir une quantité de force motrice égale à l'une des aires quadrilatérales $BB'B'_1B_1$ de la *fig.* 2, le condenseur ne recevrait que la dixième partie de la quantité de chaleur latente qui aurait été dépensée par la chaudière; les $\frac{9}{10}$ de la même quantité de chaleur latente seraient convertis en force motrice, ce qui est contraire à tous les faits d'expérience.

La surface de chacune des aires quadrilatérales $BB'B'_1B_1$ que l'on pourra former sur la *fig.* 2 sera d'ailleurs exprimée par la formule générale

$$S = q'\Gamma(t') - q\Gamma(t) = (p' - p)(u_1 - u),$$

dans laquelle on devra mettra pour $u_1 - u$ la commune longueur des bases égales BB_1, $B'B'_1$.

Le plus grand de ces quadrilatères sera celui que l'on trouvera en faisant

$$u_1 - u = W' - w'.$$

Ainsi, on aura

$$\text{aire } hi'\Gamma'K = \text{aire } hi'\Gamma'H = (p' - p)(W' - w'),$$

et le second membre pourra être transformé en

$$\frac{p' - p}{p'} L'\Gamma(t').$$

Pour avoir l'aire du triangle $ii'k$, on prendra l'intégrale définie

$$\int_t^{t'} \Gamma(t)\,\varphi'(t)\,dt,$$

le long de la courbe ii', et l'on en retranchera ce que deviendra l'expression du produit $q\Gamma(t)$ quand on y fera

$$u_1 - u = \overline{ik}.$$

On trouvera de cette manière

$$\text{aire } ii'k = \int_t^{t'} \Gamma(t)\,\varphi'(t)\,dt - p\int_t^{t'} \frac{\Gamma(t)\,\varphi'(t)}{\Omega(t)}\,dt.$$

En négligeant les aires triangulaires ihi', $ih'i'$, cette expression deviendra la mesure très-approchée de l'augmentation de force motrice que l'on obtiendra dans une machine à détente complète par rapport à une machine sans détente, la quantité de force

motrice de la machine sans détente étant

$$\text{aire } hi'\Gamma'\text{H} = \frac{p'-p}{p'}\,\text{L}'\Gamma(t').$$

La quantité de chaleur à fournir par la chaudière, dans l'un et l'autre cas, sera

$$c(t') - c(t) + \text{L}'.$$

Dans la machine à détente complète, le condenseur recevra une quantité de chaleur q qui dépendra de la relation

$$q\Gamma(t) = p(u_1 - u) = p \times \overline{i\text{K}},$$

et comme on a eu, d'une part,

$$\overline{i\text{K}} = \text{W}' - \omega' + \int_t^{t'} \frac{\Gamma(t)\,c'(t)}{\Omega(t)}\,dt,$$

d'autre part,

$$\text{L}'\Gamma(t') = p'(\text{W}' - \omega'),$$

on trouvera

$$q = \frac{p}{p'}\,\frac{\Gamma(t')}{\Gamma(t)}\,\text{L}' + \frac{p}{\Gamma(t)}\int_t^{t'} \frac{\Gamma(t)\,c'(t)}{\Omega(t)}\,dt.$$

Avec l'hypothèse $\Gamma(t) =$ constante, cela se réduira à

$$\frac{p}{p'}\,\text{L}' + p\int_t^{t'} \frac{c'(t)\,dt}{\Omega(t)}.$$

Dans la machine sans détente, le condenseur recevra en plus une quantité de chaleur q parfaitement équivalente à la quantité de force vive non réalisée, et, par conséquent, on devra poser l'égalité

$$q\Gamma(t) = \text{aire } ii'k = \int_t^{t'} \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - p\int_t^{t'} \frac{\Gamma(t)\,c'(t)}{\Omega(t)}\,dt,$$

de laquelle on tirera

$$q = \frac{1}{\Gamma(t)}\int_t^{t'} \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - \frac{p}{\Gamma(t)}\int_t^{t'} \frac{\Gamma(t)\,c'(t)}{\Omega(t)}\,dt,$$

par suite, la quantité totale de chaleur reçue par le condenseur dans la machine sans détente sera

$$\frac{p}{p'}\,\frac{\Gamma(t')}{\Gamma(t)}\,\text{L}' + \frac{1}{\Gamma(t)}\int_t^{t'} \Gamma(t)\,c'(t)\,dt.$$

Avec l'hypothèse $\Gamma(t) =$ constante, cela se réduira à

$$\frac{p}{p'}\,\text{L}' + c(t') - c(t),$$

et, comme la chaudière aura fourni en tout

$$c(t') - c(t) + \text{L}',$$

on voit que la quantité de chaleur sensible $c(t') - c(t)$ se retrouvera intégralement, tandis que, de la chaleur latente totale L′, il ne restera que la fraction $\frac{p}{p'}$, laquelle fraction sera de $\frac{1}{10}$ environ dans l'allure de la machine de Watt; ce qui est positivement en opposition avec tous les faits connus.

Telles sont les théories bien complètes auxquelles on arrive, tant pour les gaz permanents que pour les vapeurs, quand on admet en principe que la fonction Q de mes raisonnements ne doit varier qu'avec t, ou quand on admet, soit la relation unique

$$\text{aire } ABB'A' = \text{aire } A_1B_1B'_1A'_1,$$

soit les deux relations distinctes

$$q\,\Gamma(t) = \text{aire } ABB_1A_1,$$
$$q'\,\Gamma(t') = \text{aire } A'B'B'_1A'_1;$$

car l'une de ces trois choses entraînera toujours les deux autres avec toutes les conséquences que je suis parvenu à démontrer.

Ce que j'en ai dit jusqu'ici n'a pour objet que de faire voir la complète impossibilité d'admettre une pareille hypothèse, sinon pour les gaz permanents, du moins pour les vapeurs, et si l'on s'étonnait de la grande longueur ou de la minutie de quelques-uns des développements dans lesquels je suis entré pour établir une pareille négation, je dirais que j'ai cru devoir saisir avec empressement et comme une véritable bonne fortune, la double occasion de répandre encore bien des éclaircissements utiles sur les *fig.* 1 et 2, et de faire connaître surtout l'enchaînement méthodique de mes formules dans un cas très-simple, avant que de m'en servir dans l'entière généralité dont ces formules sont susceptibles et que je parviendrai à leur donner bientôt sous formes très-explicites. A ce point de vue, il m'eût été bien difficile de choisir un meilleur exemple que celui qui s'est trouvé si naturellement dans mon chemin.

CHAPITRE VII.

Théorie plus générale en admettant que, pour les gaz permanents, la fonction $f(t, u)$ ne cessera pas d'être de l'espèce $f(t, u) = \gamma(t)\,\varepsilon(u)$ comme pour les vapeurs, et en invoquant, en outre, la relation $vp = a(t)$ de la loi de Mariotte, ou même la relation plus générale $p\varpi(v) = a(t)$. — Application de cette théorie au phénomène de l'écoulement d'un gaz permanent.

Quand on veut fonder la théorie calorifique et dynamique d'un fluide élastique, sans faire aucune hypothèse, on ne doit partir que des formules (L), (M), (N), (O), en regardant comme connues les courbes $\varphi(v, p) = t$, et en se proposant de déterminer la nature de chacune des fonctions Q, $\Gamma(t)$, $f(t, u)$ d'après certains résultats expérimentaux; et, d'abord, pour aller du simple au composé par une marche natu-

rellement progressive, je reviendrai au cas déjà examiné où la fonction Q serait une fonction de la variable t seulement.

Dans cette supposition, on trouvera

$$\frac{dQ}{dv} = \frac{dQ}{dt}\frac{dt}{dv},$$

$$\frac{dQ}{dp} = \frac{dQ}{dt}\frac{dt}{dp},$$

$$\frac{dQ}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dt}{dv} = 0,$$

et la dernière des équations (N) se réduira à

$$\frac{\Gamma(t) f(t, u)}{\frac{d}{dt}\Gamma(t) f(t, u)} = p\frac{dt}{dp};$$

puis, dans le cas des gaz permanents, on n'aura qu'à invoquer la loi de Mariotte pour avoir

$$vp = a(t),$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} p &= a'(t)\frac{dt}{dv}, \\ v &= a'(t)\frac{dt}{dp}. \end{aligned}\right. \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{dt}{dv} &= \frac{p}{a'(t)}, \\ \frac{dt}{dp} &= \frac{v}{a'(t)}. \end{aligned}\right.$$

et, par suite,

$$p\frac{dt}{dp} = \frac{vp}{a'(t)} = \frac{a(t)}{a'(t)}.$$

Ainsi, dans ce cas-là, le second membre de la condition nécessaire se réduira à une fonction de t.

Pareille chose arrivera quand, au lieu de la relation $vp = a(t)$ voulue par la loi de Mariotte, on admettra la relation plus générale

$$p\,\omega(v) = a(t);$$

car, en différentiant une telle relation sans faire varier v, on aura

$$\omega(v) = a'(t)\frac{dt}{dp},$$

d'où

$$\frac{dt}{dp} = \frac{\omega(v)}{a'(t)},$$

puis

$$p\frac{dt}{dp} = \frac{p\,\omega(v)}{a'(t)} = \frac{a(t)}{a'(t)}.$$

Ainsi le résultat ne changera pas, quelle que puisse être la nature de la fonction $\omega(v)$.

Quand on supposera

$$\omega(v) = v,$$

on retrouvera la loi de Mariotte et toute la théorie précédemment exposée des gaz permanents.

Quand on fera

$$\omega(v) = \text{constante} = 1,$$

et que, en même temps, on remplacera la fonction $a(t)$ par la fonction $\Omega(t)$, on retrouvera toute la théorie précédemment exposée des vapeurs.

Mais le tout est fondé sur la supposition non admissible que la fonction Q doit dépendre de la température t seulement. Quand on rejette cette supposition, la dernière des équations (N) se présente sous la forme

$$\frac{\Gamma(t)f(t,u)}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t)f(t,u)]} = \left(\frac{dQ}{dv} + p\right)\frac{dt}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dt}{dv} = p\frac{dt}{dp} + \left(\frac{dQ}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dt}{dv}\right).$$

Le premier terme du second membre est le même que précédemment et se réduira à une fonction de t seulement toutes les fois que l'équation des courbes $\varphi(v, p) = t$ sera de la forme

$$p\omega(v) = a(t);$$

mais l'autre terme, qui dépendra principalement de la nature des courbes $\psi(v, p) = u$, ne sera pas nécessairement égal à zéro et pourra, à la rigueur, être envisagé comme une fonction quelconque des variables v, p, excepté dans le cas d'un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, où ce devra être une fonction de t seulement, ainsi que je vais le démontrer.

D'abord, pour un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, on aura

$$p = \Omega(t),$$

par suite,

$$\frac{dt}{dv} = 0.$$

et la condition nécessaire se réduira à

$$\frac{\Gamma(t)f(t,u)}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t)f(t,u)]} = \left(\frac{dQ}{dv} + p\right)\frac{dt}{dp}.$$

On aura, en même temps, pour l'expression de la chaleur latente par unité de volume,

$$\frac{dq_2}{dv_2}\Gamma(t) = q\Gamma(t) = \frac{dQ}{dv} + p$$

D'autre part, si l'on retourne à la *fig.* 2 et qu'on désigne par :

x la fraction de la masse entière actuellement transformée en vapeur ;

v le volume correspondant du mélange ;

ω, W les limites du volume v pour $x = 0$ et $x = 1$;

l la quantité de chaleur latente qui sera nécessaire pour produire la quantité de vapeur x ;

L toute la chaleur latente de la vapeur pour $x = 1$;

On aura nécessairement

$$v = (1 - x)\omega + x\mathrm{W} = \omega + (\mathrm{W} - \omega)x,$$

ou

$$x = \frac{v - \omega}{\mathrm{W} - \omega},$$

et

$$l = \mathrm{L}x = \frac{\mathrm{L}(v - \omega)}{\mathrm{W} - \omega}.$$

ou

$$\frac{l}{\mathrm{L}} = x = \frac{v - \omega}{\mathrm{W} - \omega},$$

puis, en remplaçant x par x_1,

$$\frac{l_1}{\mathrm{L}} = x_1 = \frac{v_1 - \omega}{\mathrm{W} - \omega}.$$

et, en soustrayant la précédente formule de celle-là,

$$\frac{l_1 - l}{\mathrm{L}} = x_1 - x = \frac{v_1 - v}{\mathrm{W} - \omega}.$$

d'où, enfin,

$$\frac{l_1 - l}{v_1 - v} = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{W} - \omega} = \text{fonction}(t).$$

Or, le premier membre de cette dernière équation sera la valeur du rapport de dq_z à dv_φ ; ce sera la quantité de chaleur latente par unité de volume, et, par suite, il faudra que l'on ait

$$\frac{d\mathrm{Q}}{dv} + p = \frac{\mathrm{L}\Gamma(t)}{\mathrm{W} - \omega} = \text{fonction}(t).$$

On conclura de là, non pas

$$\mathrm{Q} = \text{fonction}(t),$$

mais

$$\frac{d\mathrm{Q}}{dv} = \frac{\mathrm{L}\Gamma(t)}{\mathrm{W} - \omega} - p = \text{fonction}(t) = b(t).$$

et, par suite,

$$Q = b(t, v) + \beta(t),$$

ce qui me permettrait d'achever immédiatement la théorie exacte d'un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide; mais je préfère ajourner la théorie des vapeurs et ne m'occuper d'abord que de celle des gaz permanents.

Je me borne donc à observer que, pour tout mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, on aura nécessairement

$$\frac{\Gamma(t) f(t, u)}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t) f(t, u)]} = \left(p + \frac{dQ}{dv}\right)\frac{dt}{dp} = \frac{L\Gamma(t)}{(W - \omega)\,\Omega'(t)} = \text{fonction}(t) = \frac{1}{g(t)}.$$

Je pose

$$\Gamma(t) f(t, u) = e^{\omega(t, u)},$$

d'où

$$\frac{d}{dt}[\Gamma(t) f(t, u)] = e^{\omega(t, u)}\frac{d}{dt}\omega(t, u),$$

et je trouve que la condition fondamentale de la théorie se réduira à

$$\frac{d}{dt}\omega(t, u) = g(t).$$

Je multiplie cette équation par dt et je l'intègre, en observant que la constante arbitraire de l'intégration pourra être une fonction quelconque de la variable u, ce qui me fera avoir

$$\omega(t, u) = \int g(t)\,dt + h(u) = g_1(t) + h(u),$$

puis

$$f(t, u) = \frac{1}{\Gamma(t)} e^{\omega(t, u)} = \frac{1}{\Gamma(t)} e^{g_1(t) + h(u)} = \frac{1}{\Gamma(t)} e^{g_1(t)} e^{h(u)} = \gamma(t)\,\varepsilon(u).$$

Donc, pour tout mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, la fonction $f(t, u)$ sera nécessairement de l'espèce

$$f(t, u) = \gamma(t)\,\varepsilon(u).$$

Pareille chose arriverait pour tous les gaz permanents si, après avoir admis la loi de Mariotte, ou même la relation plus générale

$$p\omega(v) = a(t),$$

on avait

$$\frac{dQ}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dt}{dv} = \text{fonction}(t).$$

Réciproquement, s'il était démontré que pour les gaz permanents la fonction $f(t, u)$ ne doit pas cesser d'être de l'espèce $\gamma(t)\,\varepsilon(u)$ comme pour les vapeurs, on en conclu-

rait que le second membre de la derniere des équations (N) doit être une fonction de t seulement; de telle sorte que si l'on admettait, en outre, la relation

$$p\omega(v) = a(t),$$

on trouverait

$$\frac{dQ}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dt}{dv} = \frac{\Gamma(t)\gamma(t)}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t)\gamma(t)]} - \frac{a(t)}{a'(t)} = \text{fonction}(t).$$

La loi physique la plus générale que cela entraînerait, ce serait de rendre égal à une fonction de t seulement le commun numérateur de celles des formules (N) qui représentent, d'une part, la chaleur latente dq_γ le long des courbes $\varphi(v, p) = t$, et, d'autre part, la différence $c_0 - c_1$ des chaleurs spécifiques à pression constante et à volume constant.

De plus, dans la région de la *fig.* 1 où il serait permis d'invoquer la loi de Mariotte, on aurait

$$vp = a(t),$$

$$\frac{dt}{dv} = \frac{p}{a'(t)},$$

$$\frac{dt}{dp} = \frac{v}{a'(t)},$$

et, par suite,

$$\frac{dt}{dv}\frac{dt}{dp} = \frac{vp}{a'(t)} = \frac{a(t)}{a'(t)};$$

c'est-à-dire que le dénominateur de l'expression servant à représenter la valeur du produit $(c_0 - c_1)\,\Gamma(t)$ deviendrait aussi une fonction de t seulement.

Ainsi la différence $c_0 - c_1$ serait constante le long de chacune des courbes $\varphi(v, p) = t$ et pourrait varier comme on voudrait de l'une de ces courbes à l'autre.

Or, de cette remarque, conjointement avec la circonstance déjà expliquée que, dans le second membre de la condition nécessaire, il y aura au moins le terme $p\frac{dt}{dp}$ qui, dans la région la plus utile de la *fig.* 1, variera avec t seulement, je conclus que, alors même que l'expérience ne vérifierait pas l'hypothèse

$$\frac{dQ}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dt}{dv} = \text{fonction}(t)$$

dans toute l'étendue de la *fig.* 1, il devra être permis, du moins, de faire usage d'une telle hypothèse dans toute bande indéfiniment longue qui n'interceptera que des arcs d'une faible longueur de chacune des courbes $\varphi(v, p) = t$.

Je veux dire, en un mot, que si l'hypothèse en question n'est pas rationnellement exacte dans toute l'étendue de la *fig.* 1, elle doit me faire trouver, du moins, des re-

lations quasi-osculatrices à celles de la théorie complète dans une bande plus ou moins large et indéfiniment longue, qui pourra être choisie de manière à renfermer celles des quantités v, p, t pour lesquelles la connaissance des phénomènes calorifiques d'un fluide élastique offrira le plus d'intérêt.

Je me propose donc de fonder maintenant, sinon la théorie complète et définitive des gaz permanents, du moins la théorie approximative que je viens de faire entrevoir, sauf ultérieurement à lui faire faire un nouveau pas et à traiter enfin le sujet dans sa plus grande généralité possible.

La seule chose à faire pour atteindre le but actuel, ce sera de savoir trouver l'intégrale générale d'une équation aux différences partielles de la forme

$$\frac{dQ}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dt}{dv} = \text{fonction}(t),$$

et il sera d'autant plus convenable d'envisager ainsi les gaz permanents, que de la même intégrale, supposée connue, dépendra nécessairement la théorie exacte des vapeurs.

Je continue donc à supposer que l'on doive avoir

$$p\omega(v) = a'(t),$$

et j'en conclus

$$p\omega'(v) = a'(t)\frac{dt}{dv},$$

$$\omega(v) = a'(t)\frac{dt}{dp};$$

puis, en tirant de là les valeurs des dérivées de t en v, p, et en les substituant dans la proposée, il me faudra trouver l'intégrale générale d'une équation de la forme

$$\frac{dQ}{dv}\omega(v) - \frac{dQ}{dp}p\omega'(v) = \text{fonction}(t).$$

Or, on satisfera à une telle équation en écrivant

$$Q = b(t)\int\frac{dv}{\omega(v)} - \beta(t),$$

les lettres b, β servant à désigner des fonctions arbitraires de la variable t.

Ce sera, d'ailleurs, l'intégrale générale de l'équation proposée, car il me sera toujours loisible de considérer la quantité cherchée Q comme une fonction de v, t, ce qui me fera avoir, en principe,

$$\frac{dQ}{dv} = \frac{dQ(v,t)}{dt}\frac{dt}{dv} + \frac{dQ(v,t)}{dv},$$

$$\frac{dQ}{dp} = \frac{dQ(v,t)}{dt}\frac{dt}{dp} + 0,$$

et, par suite

$$\frac{dQ}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dt}{dv} = \frac{dQ(v,t)}{dv}\frac{dt}{dp}.$$

puis, de la relation supposée

$$p\omega(v) = a(t),$$

je tirerai

$$\frac{dt}{dp} = \frac{\omega(v)}{a'(t)},$$

et il me faudra intégrer la formule

$$\frac{dQ(v,t)}{dv}\frac{\omega(v)}{a'(t)} = \text{fonction}(t),$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$\frac{dQ(v,t)}{dv} = \frac{\text{fonction}(t)}{\omega(v)} = \frac{b(t)}{\omega(v)},$$

et cette dernière équation aura manifestement pour intégrale générale l'expression déjà écrite

$$Q = b(t)\int\frac{dv}{\omega(v)} + \beta(t).$$

Cela posé, quand on fera

$$\omega(v) = \text{constante} = 1,$$

on aura, pour la théorie exacte des vapeurs dont je m'occuperai spécialement par la suite,

$$Q = b(t)v + \beta(t);$$

et quand on fera

$$\omega(v) = v,$$

on trouvera pour la théorie au moins très-approchée des gaz permanents supposés assujettis à la loi de Mariotte,

$$Q = b(t)\log v + \beta(t).$$

On aura, en même temps,

$$vp = a(t),$$

$$\frac{dt}{dv} = \frac{p}{a'(t)},$$

$$\frac{dt}{dp} = \frac{v}{a'(t)}.$$

puis

$$\frac{dQ}{dv} = [b'(t)\log v + \beta'(t)]\frac{p}{a'(t)} + \frac{b(t)}{v},$$

$$\frac{dQ}{dp} = [b'(t)\log v + \beta'(t)]\frac{v}{a'(t)}.$$

et

$$\frac{dQ}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dt}{dv} = \frac{b(t)}{v}\frac{dt}{dp} = \frac{b(t)}{a'(t)},$$

$$p\frac{dt}{dp} = \frac{vp}{a'(t)} = \frac{a(t)}{a'(t)}.$$

par suite, le second membre de la condition nécessaire se réduira à

$$\frac{a(t)+b(t)}{a'(t)},$$

et comme ce sera une fonction de t seulement, il faudra que la fonction $f(t, u)$ soit de l'espèce

$$f(t, u) = \gamma(t)\varepsilon(u).$$

D'autre part, une relation de la forme

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t)f(t, u)\,du = \Gamma(t)\gamma(t)\varepsilon(u)\,du$$

ne sera ni plus ni moins générale que l'expression plus simple

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t)f(t, u)\,du = \Gamma(t)\gamma(t)\,du = k(t)\,du,$$

et, si je me sers définitivement de cette notation, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait

$$\frac{k(t)}{k'(t)} = \frac{a(t)+b(t)}{a'(t)},$$

d'où

$$b(t) = \frac{k(t)a'(t) - a(t)k'(t)}{k'(t)} = \frac{k(t)^2}{k'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{a(t)}{k(t)}\right),$$

et, par suite, après réduction,

$$b'(t) = k(t)\frac{k'(t)a''(t) - a'(t)k''(t)}{k'(t)^2} = k(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\right).$$

En substituant ces valeurs dans les expressions connues de la fonction Q et de ses dérivées en v, p, on aura d'abord

$$\begin{aligned} Q = b(t)\log v + \beta(t) &= \frac{k(t)a'(t) - a(t)k'(t)}{k'(t)}\log v + \beta(t) \\ &= \frac{k(t)^2}{k'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{a(t)}{k(t)}\right)\log v + \beta(t); \end{aligned}$$

puis, en ayant égard à la relation

$$p + \frac{b(t)}{v} = \frac{a(t)+b(t)}{v} = \frac{k(t)a'(t)}{k'(t)v},$$

on trouvera

$$q_0\Gamma(t) = k(t)\frac{du}{dv} = \frac{dQ}{dv} + p = \left\{k(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\right)\log v + \beta'(t)\right\}\frac{p}{a'(t)} + \frac{k(t)a'(t)}{k'(t)v},$$

$$q_1\Gamma(t) = k(t)\frac{du}{dp} = \frac{dQ}{dp} = \left\{k(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\right)\log v + \beta'(t)\right\}\frac{v}{a'(t)}.$$

En faisant la somme de ces deux équations multipliées respectivement par

$$\frac{dv}{k(t)}, \quad \frac{dp}{k(t)},$$

et, en tenant compte de la relation

$$v\,dp + p\,dv = d(v, p) = a'(t)\,dt,$$

on trouvera

$$du = \left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\right)\log v + \frac{\beta'(t)}{k(t)}\right\}dt + \frac{a'(t)}{k'(t)}\frac{dv}{v}.$$

On arrivera au même résultat en tirant directement la valeur de du de l'équation fondamentale

$$dQ = \Gamma(t)\,f(t, u)\,du - p\,dv = k(t)\,du - p\,dv,$$

ce qui fera avoir

$$du = \frac{dQ + p\,dv}{k(t)},$$

et, en y faisant

$$p = \frac{a(t)}{v},$$

$$Q = b(t)\log v + \beta(t),$$

par suite,

$$dQ = b(t)\frac{dv}{v} + \{b'(t)\log v + \beta'(t)\}\,dt,$$

on aura

$$du = \frac{dQ + p\,dv}{k(t)} = \frac{a(t) + b(t)}{k(t)}\frac{dv}{v} + \frac{b'(t)}{k(t)}\log v\,dt + \frac{\beta'(t)}{k(t)}\,dt;$$

mais il faudra que le second membre soit une différentielle exacte en v, t, et comme le dernier terme sera une différentielle exacte en t, il sera nécessaire et suffisant que les deux premiers termes fassent une différentielle exacte en v, t, ce qui exigera que l'on ait

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a(t) + b(t)}{k(t)}\frac{dv}{v}\right) = \frac{d}{dv}\left(\frac{b'(t)}{k(t)}\log v\right),$$

et, par conséquent,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a(t) + b(t)}{k(t)}\right) = \frac{b'(t)}{k(t)}.$$

puis, en développant,

$$k(t)\{a'(t) + b'(t)\} - \{a(t) + b(t)\}k'(t) = k(t)\,b'(t),$$

et, en réduisant,

$$k(t)\,a'(t) - \{a(t) + b(t)\}k'(t) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{k(t)}{k'(t)} = \frac{a(t) + b(t)}{a'(t)}.$$

ou bien

$$b(t) = \frac{k(t)a'(t) - a(t)k'(t)}{k'(t)} = \frac{k(t)^2}{k'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{a(t)}{k(t)}\right),$$

comme tout à l'heure.

L'expression de du sera aussi la même, et, par voie d'intégration, on en conclura

$$u = \frac{a'(t)}{k'(t)}\log v + \int \frac{\beta'(t)}{k(t)}\,dt.$$

Ce sera l'équation générale des courbes $B'Bu$, $B'_1B_1u_1, \ldots$, sur la *fig.* 1, en fonction de v, t comme variables indépendantes. En y joignant la relation $vp = a(t)$, il ne resterait qu'à effectuer l'élimination de t pour avoir l'équation générale des mêmes courbes en v, p.

En désignant par v, v_1, les valeurs de v qui dépendront de deux valeurs différentes u, u_1 le long d'une même courbe $\varphi(v, p) = t$, on aura à la fois l'équation précédente et celle-ci :

$$u_1 = \frac{a'(t)}{k'(t)}\log v_1 + \int \frac{\beta'(t)}{k(t)}\,dt,$$

puis, par soustraction, on trouvera

$$u_1 - u = \frac{a'(t)}{k'(t)}(\log v_1 - \log v) = \frac{a'(t)}{k'(t)}\log\frac{v_1}{v},$$

ou, inversement,

$$\log v_1 - \log v = \frac{k'(t)}{a'(t)}(u_1 - u).$$

Ainsi la différence des logarithmes de v, v_1 variera proportionnellement au rapport de $k'(t)$ à $a'(t)$ de haut en bas sur la *fig.* 1, pour tous les arcs BB_1, $B'B'_1, \ldots$, limités par deux courbes données $B'Bu$, $B'_1B_1u_1$ ou $\varphi(v, p) = u$, $\varphi(v, p) = u_1$, et, par suite, la connaissance d'une seule de ces courbes entraînera celle de toutes les autres.

A une autre température t', on aura

$$u_1 - u = \frac{a'(t')}{k'(t')}\log\frac{v_1}{v},$$

et, par suite,

$$\frac{a'(t')}{k'(t')}\log\frac{v_1}{v} = \frac{a'(t)}{k'(t)}\log\frac{v_1}{v},$$

ce qui permettra de tracer immédiatement toutes les courbes $\varphi(v, p) = u$ dès l'instant que l'une d'entre elles sera donnée.

Pour une de ces courbes en particulier, c'est-à-dire pour une valeur constante quelconque de u, on aura

$$u = \frac{a'(t)}{k'(t)}\log v + \int \frac{\beta'(t)}{k(t)}\,dt,$$

et, au moyen de la notation auxiliaire

$$\mathrm{E}(t) = \int \frac{\beta'(t)}{k(t)}\,dt,$$

ou

$$\frac{d\mathrm{E}(t)}{dt} = \frac{\beta'(t)}{k(t)},$$

on aura, sous forme plus simple,

$$u = \frac{a'(t)}{k'(t)} \log v + \mathrm{E}(t);$$

puis, à une autre température t', le long de la même courbe,

$$u = \frac{a'(t')}{k'(t')} \log v' + \mathrm{E}(t'),$$

et, par soustraction, l'on en déduira

$$\frac{a'(t')}{k'(t')} \log v' - \frac{a'(t)}{k'(t)} \log v = -[\mathrm{E}(t') - \mathrm{E}(t)] = -\int_t^{t'} \frac{\beta'(t)}{k(t)}.$$

Ces formules pourront être remplacées par

$$v = e^{\frac{k'(t)}{a'(t)}[u - \mathrm{E}(t)]} = \frac{e^{\frac{k'(t)}{a'(t)}u}}{e^{\frac{k'(t)}{a'(t)}\mathrm{E}(t)}},$$

$$v' = e^{\frac{k'(t')}{a'(t')}[u - \mathrm{E}(t')]} = \frac{e^{\frac{k'(t')}{a'(t')}u}}{e^{\frac{k'(t')}{a'(t')}\mathrm{E}(t')}},$$

ou par

$$v^{\frac{a'(t)}{k'(t)}} = e^{u - \mathrm{E}(t)} = \frac{e^u}{e^{\mathrm{E}(t)}},$$

$$v'^{\frac{a'(t')}{k'(t')}} = e^{u - \mathrm{E}(t')} = \frac{e^u}{e^{\mathrm{E}(t')}},$$

et le résultat de l'élimination de u équivaudra à

$$\frac{v'^{\frac{a'(t')}{k'(t')}}}{v^{\frac{a'(t)}{k'(t)}}} = \frac{1}{e^{\mathrm{E}(t') - \mathrm{E}(t)}} = \frac{1}{e^{\int_t^{t'} \frac{\beta'(t)}{k(t)}\,dt}}.$$

Ainsi toutes les courbes $\psi(v, p) = u$ seront parfaitement déterminées sur la *fig.* 1.

dans l'intervalle des courbes $vp = t_0$, $vp = t_1$ entre les températures t_0, t, desquelles on connaîtra les fonctions $a(t)$, $k(t)$, $\beta(t)$, et, par suite, $E(t)$.

Réciproquement, si l'une des courbes $\psi(v, p) = u$ était connue de t_0 à t_1, on pourrait s'en servir pour déterminer la fonction $E(t)$, et, par suite, la fonction $\beta(t)$, pourvu que les fonctions $a(t)$, $k(t)$ fussent déjà connues.

D'abord, en joignant à l'équation de la courbe donnée la relation

$$vp = a(t)$$

supposée connue, on trouverait la température t en chaque point de la courbe donnée, et, par suite, on arriverait à regarder les coordonnées v, p de la courbe donnée comme des fonctions parfaitement déterminées de t.

On trouverait ensuite, à l'aide des formules précédentes le long de la courbe donnée, d'abord sous forme différentielle

$$\frac{dE(t)}{dt}\,dt = -d\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\log v\right);$$

puis, en intégrant,

$$E(t') - E(t) = -\left(\frac{a'(t')}{k'(t')}\log v' - \frac{a'(t)}{k'(t)}\log v\right),$$

et cela suffirait pour tracer toutes les autres courbes $\psi(v, p) = u$ dans l'intervalle compris entre les deux courbes indéfinies $vp = a(t_0)$, $vp = a(t_1)$ entre les températures t_0, t_1 desquelles on connaîtrait l'une d'entre elles.

Quant à la fonction Q, on aurait

$$\beta'(t)\,dt = k(t)\frac{dE(t)}{dt}\,dt = -k(t)\,d\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\log v\right),$$

et, en intégrant,

$$\beta(t') - \beta(t) = -\int_t^{t'} k(t)\,d\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\log v\right),$$

ou, en procédant par parties au second membre,

$$\beta(t') - \beta(t) = -k(t)\left(\frac{a'(t')}{k'(t')}\log v' - \frac{a'(t)}{k'(t)}\log v\right) + \int_t^{t'} a'(t)\log v\,dt;$$

puis, du moment où la fonction $\beta(t)$ serait connue, on n'aurait qu'à la substituer dans la relation

$$Q = b(t)\log v + \beta(t),$$

pour obtenir l'expression générale de la fonction $Q(t)$ dans le même intervalle que celui où l'on connaîtrait les arcs de toutes les courbes $\psi(v, p) = u$.

Je ne m'arrête pas à cette substitution, parce qu'il ne sera pas facile de déterminer directement l'une des courbes $BB'u$, $B'_1B_1u_1, \ldots$.

Je suppose donc que l'on ait réussi à déterminer expérimentalement une fonction

$c'(t)$ qui soit telle que la différentielle de cette fonction $c'(t)\,dt$ puisse représenter avec un degré d'approximation suffisant, la quantité de chaleur nécessaire pour faire aller les quantités v, t d'un gaz permanent d'un point v, t à un autre point $v+dv$, $t+dt$ le long de la courbe donnée supposée représentée par une équation de la forme

$$v = \omega = \text{fonction}(t).$$

En faisant alors

$$dq = c'(t)\,dt \quad \text{et} \quad v = \omega$$

dans la relation de principe

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t) f(t, u)\,du = \Gamma(t)\,\varphi(t)\,du = k(t)\,du,$$

on trouvera le long de la courbe donnée, sous forme différentielle,

$$du = \frac{\Gamma(t)\,c'(t)\,dt}{k(t)},$$

et, en intégrant,

$$u = \int \frac{\Gamma(t)\,c'(t)}{k(t)}\,dt;$$

mais, d'après l'équation générale des courbes $\psi(v, p) = u$, on devra avoir, le long de la courbe donnée,

$$u = \frac{a'(t)}{k'(t)} \log \omega + \int \frac{\beta'(t)}{k(t)}\,dt = \frac{a'(t)}{k'(t)} \log \omega + \mathrm{E}(t);$$

puis, en identifiant les deux expressions, on trouvera l'intégrale générale

$$\mathrm{E}(t) = \int \frac{\beta'(t)}{k(t)}\,dt = \int \frac{\Gamma(t)\,c'(t)}{k(t)}\,dt - \frac{a'(t)}{k'(t)} \log \omega,$$

et de t à t',

$$\mathrm{E}(t') - \mathrm{E}(t) = \int_t^{t'} \frac{\Gamma(t)\,c'(t)}{k(t)}\,dt - \left\{\frac{a'(t')}{k'(t')} \log \omega' - \frac{a'(t)}{k'(t)} \log \omega\right\};$$

par suite, l'équation générale des courbes $\psi(v, p) = u$ sera

$$u = \frac{a'(t)}{k'(t)} \log v + \mathrm{E}(t) = \frac{a'(t)}{k'(t)} \log v + \int \frac{\Gamma(t)\,c'(t)}{k(t)}\,dt - \frac{a'(t)}{k'(t)} \log \omega$$
$$= \frac{a'(t)}{k'(t)} \log \frac{v}{\omega} + \int \frac{\Gamma(t)\,c'(t)}{k(t)}\,dt,$$

et, de t à t', on aura

$$\frac{a'(t')}{k'(t')} \log v' - \frac{a'(t)}{k'(t)} \log v = -\{\mathrm{E}(t') - \mathrm{E}(t)\} = -\int_t^{t'} \frac{\Gamma(t)\,c'(t)}{k(t)}\,dt$$
$$+ \left\{\frac{a'(t')}{k'(t')} \log \omega' - \frac{a'(t)}{k'(t)} \log \omega\right\},$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$\frac{a'(t')}{k'(t')} \log \frac{v'}{\omega'} - \frac{a'(t)}{k'(t)} \log \frac{v}{\omega} = -\int_t^{t'} \frac{\Gamma(t)\,c'(t)}{k(t)}\,dt.$$

Si l'on avait exceptionnellement $c'(t) = 0$, la courbe donnée serait elle-même l'une des courbes $\psi(v, p) = u$, et toutes les autres se déduiraient de celle-là au moyen de la relation plus simple

$$\frac{a'(t')}{k'(t')} \log \frac{v'}{\varpi'} = \frac{a'(t)}{k'(t)} \log \frac{v}{\varpi},$$

qui s'accorde parfaitement avec ce qui a déjà été dit.

Pour trouver la fonction Q, on conclura de ce qui précède

$$\frac{d\mathrm{E}(t)}{dt} = \frac{\beta'(t)}{k(t)} = \frac{\Gamma(t)\,c'(t)}{k(t)} - \frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)} \log \varpi\right),$$

puis, en multipliant par $k(t)$,

$$\beta'(t)\,dt = \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - k(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)} \log \varpi\right) dt,$$

et, en intégrant,

$$\beta(t) = \int \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - \int k(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)} \log \varpi\right) dt.$$

Le dernier terme du second membre pouvant être intégré par parties, on trouvera d'abord

$$\beta(t) = \int \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - k(t)\frac{a'(t)}{k'(t)} \log \varpi + \int a'(t) \log \varpi\,dt,$$

puis, en intégrant de nouveau par parties le dernier terme du second membre, on aura

$$\int a'(t) \log \varpi\,dt = a(t) \log \varpi - \int a(t)\frac{d\varpi}{\varpi} = a(t) \log \varpi - \int p\,d\varpi,$$

et, en substituant,

$$\beta(t) = \int \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - \left(k(t)\frac{a'(t)}{k'(t)} - a(t)\right) \log \varpi - \int p\,d\varpi,$$

ou, ce qui reviendra au même, d'après l'expression connue de la fonction $b(t)$,

$$\beta(t) = \int \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - b(t) \log \varpi - \int p\,d\varpi.$$

On arrivera plus simplement au même résultat en observant que, d'après la formule de principe

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t) f(t, u)\,du = \Gamma(t)\,q(t)\,du = k(t)\,du = d\mathrm{Q} + p\,d\varpi,$$

on devra avoir à la fois, le long de la courbe donnée,

$$dq = c'(t)\,dt, \quad v = \varpi,$$

et, par suite,

$$d\mathrm{Q} = \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - p\,d\varpi,$$

$$\mathrm{Q} = \int \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - \int p\,d\varpi.$$

Mais l'expression générale de la fonction Q est

$$Q = b(t)\log v + \beta(t),$$

et, par suite, il faudra que, le long de la courbe donnée, on ait

$$Q = b(t)\log w + \beta(t);$$

puis, en identifiant les deux expressions, on aura immédiatement

$$\beta(t) = \int \Gamma(t)c'(t)\,dt - \int p\,dw - b(t)\log w,$$

comme tout à l'heure.

L'expression générale de la fonction Q deviendra de cette manière

$$Q = b(t)\log v + \beta(t) = b(t)\log\frac{v}{w} + \int \Gamma(t)c'(t)\,dt - \int p\,dw.$$

D'un point quelconque v, t à un autre point v', t' de la *fig.* 1, on aura

$$Q' - Q = [b(t')\log v' - b(t)\log v] + [\beta(t') - \beta(t)]$$

$$= \left[b(t')\log\frac{v'}{w'} - b(t)\log\frac{v}{w}\right] + \int_t^{t'} \Gamma(t)c'(t)\,dt - \int_t^{t'} p\,dw.$$

Si la courbe donnée se trouvait être l'une des courbes $\psi(v, p) = u$, on aurait, d'une part, $c'(t) = 0$, et, d'autre part, le dernier terme du second membre représenterait l'aire ABB'A' de la courbe donnée sur la *fig.* 1. En désignant cette aire par ΔB, on aurait

$$Q' - Q = b(t')\log\frac{v'}{w'} - b(t)\log\frac{v}{w} + \Delta B;$$

puis, quand on voudrait aller de B en B' le long de la courbe donnée, on aurait à faire à la fois $v = w$, $v' = w'$, ce qui entraînerait simplement $Q' - Q = \Delta B$.

Si, au contraire, on voulait aller de B en B_1 le long d'une courbe $vp = a(t) = \text{const.}$, on aurait à faire $t' = t$, et, par suite, $w' = w$, ce qui entraînerait, en mettant v_1, Q_1 en place de v', Q',

$$Q_1 - Q = b(t)\log\frac{v_1}{v} = \frac{k(t)a'(t) - a(t)k'(t)}{k'(t)}\log\frac{v_1}{v} = \frac{k(t)^2}{k'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{a(t)}{k(t)}\right)\log\frac{v_1}{v}.$$

Donc, pour avoir $Q_1 = Q$ le long des courbes $vp = a(t)$, il faudrait que l'on eût

$$b(t) = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad k(t) = a(t).$$

L'équation générale des courbes $Q = \text{constante}$ sera

$$b(t)\log v + \beta(t) = \text{constante},$$

et, d'un point v, t à un autre point v', t' d'une pareille courbe, on aura

$$b(t')\log v' + \beta(t') = b(t)\log v + \beta(t);$$

en y joignant la relation

$$vp = a(t),$$

on aura tout ce qu'il faudra pour déterminer exactement chacune de ces courbes quand les fonctions $a(t)$, $b(t)$ et $\beta(t)$, et, par suite, $a(t)$, $k(t)$, $\beta(t)$ seront connues.

Les propriétés calorifiques du fluide élastique seront exprimées, d'abord par les deux relations déjà connues

$$q\,\Gamma(t) = k(t)\frac{du}{dv} = \frac{dQ}{dv} + p = \left\{k(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\right)\log v + \beta'(t)\right\}\frac{p}{a'(t)} + \frac{k(t)a'(t)}{k'(t)a(t)}p,$$

$$q\,\Gamma(t) = k(t)\frac{du}{dp} = \frac{dQ}{dp} = \left\{k(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\right)\log v + \beta'(t)\right\}\frac{v}{a(t)},$$

puis on aura à faire

$$\zeta = \frac{dt}{dv} = \frac{p}{a'(t)},$$

$$\zeta_1 = \frac{dt}{dp} = \frac{v}{a'(t)},$$

dans les formules (O), et l'on trouvera encore

$$c\,\Gamma(t) = \frac{q\,\Gamma(t)}{\zeta} = \frac{\dfrac{dQ}{dv} + p}{\dfrac{dt}{dv}} = \left\{k(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\right)\log v + \beta'(t)\right\} + \frac{k(t)a'(t)}{k'(t)a(t)}a(t),$$

$$c\,\Gamma(t) = \frac{q\,\Gamma(t)}{\zeta} = \frac{\dfrac{dQ}{dv}}{\dfrac{dt}{dp}} = \left\{k(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\right)\log v + \beta'(t)\right\}.$$

$$c_0 - c_1\,\Gamma(t) = \frac{k(t)a'(t)}{k'(t)a(t)}a'(t).$$

$$\frac{dq_2}{dv_2}\Gamma(t) = (c_0 - c_1)\zeta_1\Gamma(t) = \frac{k(t)a'(t)}{k'(t)a(t)}p = \frac{k(t)a'(t)}{k'(t)}v,$$

$$\frac{dq_2}{dp_2}\Gamma(t) = (c_0 - c_1)\zeta_1\Gamma(t) = \frac{k(t)a'(t)}{k'(t)a(t)}v = \frac{k(t)a'(t)}{k'(t)p};$$

ainsi, la différence des chaleurs spécifiques c_0, c_1, à pression constante et à volume constant, sera une fonction de t seulement.

Toutes ces formules seraient beaucoup plus simples s'il était permis de faire

$$k(t) = a(t);$$

mais comme il s'ensuivrait

$$b(t) = 0,$$

on ne saurait guère admettre une telle hypothèse à priori, et, d'un autre côté, on

arriverait à un degré de simplicité à peu près aussi grand si l'on avait

$$k(t) = [a(t)]^n,$$

la lettre n servant à désigner un nombre constant.

Dans ce cas-là, en désignant simplement par a la fonction $a(t)$, on trouverait

$$k(t) = a^n,$$

$$k'(t) = na^{n-1}a',$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a(t)}{k(t)}\right) = \frac{d}{dt}(a^{1-n}) = (1-n)a^{-n}a',$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{a^{1-n}}{n}\right) = \frac{1-n}{n}a^{-n}a',$$

$$b(t) = \frac{k(t)a'(t) - a(t)k'(t)}{k'(t)} = \frac{k(t)^2}{k'(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{a(t)}{k(t)}\right) = \left(\frac{1-n}{n}\right)a,$$

$$b'(t) = k(t)\frac{k'(t)a''(t) - a'(t)k''(t)}{k'(t)^2} = k(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\right) = \frac{1-n}{n}a',$$

par suite,

$$vp = a,$$

$$Q = \frac{1-n}{n}a\log v + \beta(t),$$

$$q(\Gamma(t)) = \frac{dQ}{dv} + p = \left(\frac{1-n}{n}a'\log v + \beta'(t)\right)\frac{p}{a'} + \frac{p}{n},$$

$$q_1(\Gamma(t)) = \frac{dQ}{dp} = \left(\frac{1-n}{n}a'\log v + \beta'(t)\right)\frac{1}{a'},$$

$$\xi = \frac{dt}{dv} = \frac{p}{a'},$$

$$\xi_1 = \frac{dt}{dp} = \frac{1}{a'}.$$

$$c(\Gamma(t)) = \frac{q(\Gamma(t))}{\xi} = \frac{\frac{dQ}{dv} + p}{\frac{dt}{dv}} = \left(\frac{1-n}{n}a'\log v + \beta'(t)\right) + \frac{a'}{n},$$

$$c_1(\Gamma(t)) = \frac{q_1(\Gamma(t))}{\xi_1} = \frac{\frac{dQ}{dv}}{\frac{dt}{dp}} = \left(\frac{1-n}{n}a'\log v + \beta'(t)\right),$$

$$c_1(\Gamma(t)) - c(\Gamma(t)) = \frac{a'}{n}.$$

$$\frac{dq_2}{dv_2}\Gamma(t) = (c_0 - c_1)\mathfrak{S}_0\Gamma(t) = \frac{P}{n},$$

$$\frac{dq_2}{dv}\Gamma(t) = (c_0 - c_1)\mathfrak{S}_1\Gamma(t) = \frac{v}{n},$$

et, pourvu que l'on eût $n < 1$, la fonction $b(t)$ serait positive.

L'équation générale des courbes $\psi(v, p) = u$ serait, en même temps,

$$u = \frac{a'(t)}{k'(t)}\log v + \int\frac{\beta'(t)}{k(t)}dt = \frac{a^{1-n}}{n}\log v + \int\frac{\beta'(t)}{a^n}dt.$$

Enfin, dans le cas où l'on invoquerait à la fois la loi de Mariotte et celle de Gay-Lussac, on aurait

$$a(t) = \frac{v_0 p_0}{1 + \alpha t_0}(1 + \alpha t) = m(1 + \alpha t),$$

$$a'(t) = m\alpha.$$

Je ne présente d'ailleurs l'hypothèse $k(t) = a^n$ que comme un exemple de calcul, et je ne veux y attacher aucune importance à priori. Je poursuis donc et j'observe que, lorsqu'on voudra trouver la quantité de chaleur nécessaire pour faire aller le fluide élastique d'un point v, t à un autre point infiniment voisin $v + dv$, $t + dt$, on n'aura qu'à remonter à la formule initiale

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t)f(t, u)\,du = \Gamma(t)\varphi(t)\,du = k(t)\,du = dQ + p\,dv,$$

de laquelle on tirera

$$dq = \frac{k(t)}{\Gamma(t)}du.$$

En reprenant, ensuite, l'équation générale des courbes $\psi(v, p) = u$, on aura

$$du = d\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\log v\right) + \frac{\beta'(t)}{k(t)}dt$$

$$= \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\right)\log v + \frac{\beta'(t)}{k(t)}\right)dt + \frac{a'(t)}{k'(t)}\frac{dv}{v},$$

et, en substituant, on trouvera

$$dq = \frac{k(t)}{\Gamma(t)}d\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\log v\right) + \frac{\beta'(t)}{\Gamma(t)}dt$$

$$= \left(\frac{k(t)}{\Gamma(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\right)\log v + \frac{\beta'(t)}{\Gamma(t)}\right)dt + \frac{k(t)}{k'(t)}\frac{a'(t)}{\Gamma(t)}\frac{dv}{v}.$$

On devra parvenir exactement au même résultat, en tirant de la relation initiale la valeur

$$dq = \frac{dQ + p\,dv}{\Gamma(t)}.$$

et, en effet, quand on fera

$$p = \frac{a(t)}{v},$$

$$Q = b(t)\log v + \beta(t),$$

$$dQ = b(t)\frac{dv}{v} + [b'(t)\log v + \beta'(t)]\,dt,$$

on trouvera d'abord

$$dq = \frac{a(t) + b(t)}{\Gamma(t)}\frac{dv}{v} + \left\{\frac{b'(t)\log v + \beta'(t)}{\Gamma(t)}\right\}dt;$$

puis, en y substituant les valeurs connues de $b(t)$ et $b'(t)$, on aura, comme tout à l'heure,

$$dq = \frac{k(t)\,a'(t)}{k'(t)\,\Gamma(t)}\frac{dv}{v} + \left\{\frac{k(t)}{\Gamma(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{a'(t)}{k'(t)}\right)\right\}\log v + \frac{\beta'(t)}{\Gamma(t)}\Big\}dt,$$

et, quand une courbe quelconque sera donnée, on devra chercher d'abord l'expression de v en t le long de la courbe donnée avant de procéder à l'intégration de l'expression trouvée pour dq le long d'une pareille courbe.

Toutes les fois qu'une courbe donnée se confondra avec l'une des courbes BB_1, $B'B'_1, \ldots$, où $op = a(t)$ sur la *fig.* 1, on aura

$$t = \text{constante}, \quad dt = 0,$$

et, par suite, on trouvera sous forme finie

$$q = \frac{k(t)}{\Gamma(t)}(u_1 - u) = \frac{k(t)\,a'(t)}{k'(t)\,\Gamma(t)}(\log v_1 - \log v) = \frac{k(t)\,a'(t)}{k'(t)\,\Gamma(t)}\log\frac{v_1}{v},$$

puis, en remplaçant t par t' entre les mêmes courbes $B'Bu$, $B'_1B_1u_1$, sur la *fig.* 1,

$$q' = \frac{k(t')}{\Gamma(t')}(u_1 - u) = \frac{k(t')\,a'(t')}{k'(t')\,\Gamma(t')}(\log v'_1 - \log v') = \frac{k(t')\,a'(t')}{k'(t')\,\Gamma(t')}\log\frac{v'_1}{v'},$$

d'où l'on conclura

$$S = q'\Gamma(t') - q\Gamma(t) = [k(t') - k(t)](u_1 - u)$$

pour la mesure de l'aire quadrilatérale $BB'B_1B'_1$.

Si, au lieu de l'aire quadrilatérale $BB'B_1B'_1$ sur la *fig.* 1, on voulait trouver l'aire S délimitée par une ligne fermée quelconque s, on prendrait tout à l'entour de la ligne s l'intégrale définie

$$S = \int_0^s \Gamma(t)\,dq = \int_0^s k(t)\,du;$$

car, d'après la relation de principe

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t)f(t, u)\,du = \Gamma(t)\gamma(t)\,du = k(t)\,du = dQ + p\,ds.$$

l'une ou l'autre de ces intégrales se confondra avec

$$\int_0^s dQ + \int_0^s p\,dv = 0 + \int_0^s p\,dv,$$

et il est bien évident que l'intégrale du terme $p\,dv$ tout à l'entour de la ligne s représentera la quantité cherchée.

Cela posé, j'observe que le long de l'axe Ov, on aura

$$p = 0;$$

donc, en admettant que la relation

$$vp = a(t)$$

soit applicable jusqu'à la limite $p = 0$, on trouvera le long de l'axe Ov une température constante t_0 déterminée par la condition

$$a(t_0) = 0.$$

Ainsi, l'axe Ov fera partie du système général des courbes $\varphi(vp) = t$, et l'on y trouvera

$$q_0 = \frac{h(t_0)}{\Gamma(t_0)}(u_1 - u) = \frac{h(t_0)\,a'(t_0)}{h'(t_0)\,\Gamma(t_0)} \log\frac{v}{v_1},$$

$$Q_1 - Q = b(t_0) \log\frac{v_1}{v} = \frac{h(t_0)\,a'(t_0)}{h'(t_0)} \log\frac{v}{v_1},$$

c'est-à-dire

$$Q_1 - Q = q_0\,\Gamma(t_0).$$

Donc la quantité

$$\frac{h(t_0)\,a'(t_0)}{h'(t_0)}$$

ne devra pas être égale à zéro, sans quoi il n'y aurait plus de phénomènes calorifiques le long de l'axe Ov. Cette condition étant supposée remplie, on trouvera le long de l'axe Ov,

$$c_0 = \infty, \quad \frac{dq_0}{dv_0} = \infty,$$

comme pour les vapeurs; mais l'expression de Q différera de celle des vapeurs.

Tout porte à croire que l'axe Ov, au lieu d'être la commune asymptote des courbes $\varphi(vp) = t$, devra être rencontré par chacune de ces courbes, ce qui empêcherait la relation

$$vp = a(t)$$

d'être applicable jusqu'à la limite $p = 0$.

Quoi qu'il en soit, je veux faire encore une application de cette théorie au phénomène de l'écoulement des gaz.

Je conçois donc un réservoir plein d'air à une pression constante p_1, muni d'un orifice d'écoulement dans un autre réservoir où il y a une pression constante plus petite p_0.

Je considère la paroi de l'orifice comme n'étant pas susceptible de laisser passer de la chaleur ni de produire, par frottement, une diminution dans la vitesse du jet d'air sortant. Je suppose encore une rapidité de mouvement assez grande pour que les parcelles d'air des différents filets du jet sortant ne puissent pas échanger entre elles des quantités appréciables de chaleur avant qu'elles ne soient parvenues dans la section où toutes les vitesses seront à fort peu près égales et parallèles du centre à la circonférence de la veine.

La théorie du phénomène de l'écoulement de l'air se réduira alors à ce qui suit.

Je suppose que, pour une masse d'air égale à 1, on possède sous formes explicites les trois relations

$$vp = a(t),$$

$$Q = b(t)\log v + \beta(t),$$

$$u = \frac{a'(t)}{k'(t)}\log v + \int \frac{\beta'(t)}{k(t)}\,dt = \frac{a'(t)}{k'(t)}\log v + E(t),$$

et je désigne par t_1 la température qui régnera dans le réservoir à air comprimé sous la pression p_1.

J'aurai alors, pour le volume initial de chaque unité de masse,

$$v_1 = \frac{a(t_1)}{p};$$

et comme, par hypothèse, il n'y aura aucune addition ni soustraction de chaleur pendant la durée du trajet jusqu'à l'orifice de sortie, la dilatation devra se faire le long d'une courbe $\psi(vp) = u$. Donc on aura, en chaque point de la trajectoire d'une parcelle d'air δm,

$$\frac{a'(t)}{k'(t)}\log v + E(t) = \frac{a'(t_1)}{k'(t_1)}\log v_1 + E(t_1),$$

et, dans l'orifice de sortie, on aura

$$\frac{a'(t_0)}{k'(t_0)}\log v_0 + E(t_0) = \frac{a'(t_1)}{k'(t_1)}\log v_1 + E(t_1).$$

Ce sera une première équation de condition à laquelle devront satisfaire les inconnues v_0, t_0.

La pression p_0 à l'orifice de sortie étant supposée donnée, on aura encore la relation

$$v_0 p_0 = a(t_0),$$

et de ces deux équations on devra tirer les valeurs de v_0, t_0.

Cela étant supposé fait, on trouvera respectivement

$$Q_1 = b(t_1)\log v_1 + \beta(t_1),$$

$$Q_0 = b(t_0)\log v_0 + \beta(t_0),$$

et l'on en conclura

$$Q_1 - Q_0 = [b(t_1)\log v_1 + \beta(t_1)] - [b(t_0)\log v_0 + \beta(t_0)].$$

Ce sera la quantité de travail dont chaque unité de masse du jet d'air sortant se trouvera appauvrie; ce sera, en un mot, la quantité

$$\Sigma \int \mathrm{R}\, dr$$

de l'équation générale des forces vives par unité de masse.

Or, si l'on désigne par

ω_1, ω_0 les vitesses en deux points différents d'un filet ou canal infiniment délié de forme constante;

Ω_1, Ω_0 les sections du canal;

p_1, p_0 les pressions;

ϖ_1, ϖ_0 les poids par unité de volume;

m la masse d'air qui passe à la fois par chacune des sections Ω_1, Ω_0 en 1 seconde dans l'hypothèse d'une exacte permanence;

On doit avoir, d'après le principe général des forces vives,

$$\tfrac{1}{2} m\omega_0^2 - \tfrac{1}{2} m\omega_1^2 = \Omega_1 p_1 \omega_1 - \Omega_0 p_0 \omega_0 + m\Sigma \int \mathrm{R}\, dr,$$

et, d'après la nature même des choses,

$$m = \frac{\varpi_1}{g}\Omega_1\omega_1 = \frac{\varpi_0}{g}\Omega_0\omega_0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\Omega_1\omega_1 = \frac{gm}{\varpi_1},$$

$$\Omega_0\omega_0 = \frac{gm}{\varpi_0},$$

et, par suite, en substituant dans l'équation des forces vives, il restera, après la suppression du facteur commun m,

$$\tfrac{1}{2}\omega_0^2 - \tfrac{1}{2}\omega_1^2 = g\left(\frac{p_1}{\varpi_1} - \frac{p_0}{\varpi_0}\right) + \Sigma \int \mathrm{R}\, dr.$$

Ce sera dans cette équation générale que l'on devra faire

$$\Sigma \int \mathrm{R}\, dr = \mathrm{Q}_1 - \mathrm{Q}_0 = [b(t_1)\log v_1 + \beta(t_1)] - [b(t_0)\log v_0 + \beta(t_0)],$$

d'autre part, un volume d'air v_1 à la pression p_1 aura une masse représentée par

$$\frac{\varpi_1 v_1}{g},$$

et, comme v_1 désigne, par hypothèse, le volume de l'unité de masse, il faudra que l'on ait

$$\frac{\varpi_1}{g} v_1 = 1,$$

d'où

$$\frac{\Omega}{\omega} = v_1,$$

et, pareillement,

$$\frac{\Omega_0}{\omega_0} = v_0.$$

Donc, enfin, l'équation des forces vives se transformera en

$$\tfrac{1}{2}\omega_0^2 - \tfrac{1}{2}\omega_1^2 = v_1 p_1 - v_0 p_0 + Q_1 - Q_0,$$

et, par transposition, on trouvera

$$\tfrac{1}{2}\omega_0^2 + v_0 p_0 + Q_0 = \tfrac{1}{2}\omega_1^2 + v_1 p_1 + Q_1.$$

En un mot, quand un fluide élastique se mouvra d'une manière exactement permanente dans un canal infiniment étroit sans qu'il y ait aucun échange de chaleur, ni des parcelles de gaz entre elles, ni des parois du canal à ces parcelles, on aura, par unité de masse, en tous les points du trajet,

$$\tfrac{1}{2}\omega^2 + vp + Q = \text{constante},$$

et cette formule générale aura une signification excessivement claire sur les *fig.* 1 et 2.

La somme $vp + Q$ y représentera l'aire OGBu sur la *fig.* 1 et l'aire OPBu sur la *fig.* 2, plus la quantité de force vive latente du fluide élastique de O en u le long de l'axe Ov. Quand chaque parcelle du fluide élastique conservera exactement sa chaleur propre, la dilatation se fera le long de la courbe B′B$\bar{u}$, de B′ en B par exemple, en supposant que les hauteurs A′B′, AB soient égales aux pressions p_1, p_0. La quantité $vp + Q$ éprouvera alors une diminution qui sera représentée par l'aire GG′B′B.

Cela étant, la formule trouvée signifiera que toute diminution de la quantité $vp + Q$ se changera en une quantité égale de force vive, et réciproquement.

Et, en effet, sur la *fig.* 2, l'aire PP′B′B représentera la quantité de force motrice que l'on obtiendrait dans le cylindre travailleur d'une machine à vapeur entre deux pressions données OP, OP′ avec la quantité de fluide élastique à laquelle se rapportera la courbe B′Bu.

L'aire GG′B′B aurait exactement la même signification sur la *fig.* 1 dans une machine à air, et, par conséquent, la formule trouvée signifiera tout uniment que, dans le phénomène de l'écoulement, il doit y avoir une production de force vive égale à la quantité de travail que la masse du fluide écoulé eût pu faire obtenir dans une machine à vapeur ou à air, entre les mêmes pressions p_1, p_0, que celles aux orifices d'entrée et de sortie du tronçon de canal dans lequel il y aura un état de mouvement exactement permanent.

De cette remarque, et à la simple inspection des *fig.* 1 et 2, je pourrais conclure que, lorsqu'il y aura des échanges de chaleur pendant la durée de l'écoulement, pourvu que ces échanges soient eux-mêmes exactement permanents, la somme $\frac{1}{2}\omega^2 + vp + Q$, au lieu de rester constante, d'un instant à l'autre éprouvera une augmentation égale

au terme connu $\Gamma(t) f(t, u)\, du$, en supposant que l'on ait

$$dq = f(t, u)\, du,$$

pour la quantité de chaleur ajoutée.

Il me serait donc permis d'écrire

$$w\,dw + v\,dp + p\,dv + dQ = \Gamma(t) f(t, u)\, du,$$

et comme on doit avoir

$$dQ = \Gamma(t) f(t, u)\, du - p\,dv,$$

il me resterait

$$w\,dw + v\,dp = 0;$$

par suite, en intégrant,

$$\tfrac{1}{2} w^2 + \int v\,dp = \text{constante},$$

et, entre deux limites données p_0, p_1,

$$\tfrac{1}{2} w_1^2 - \tfrac{1}{2} w_0^2 + \int_0^1 v\,dp = 0;$$

cela me servirait à étendre à une courbe quelconque, sur les *fig.* 1 et 2, ce que je n'ai trouvé d'abord que pour les courbes B'Bu; mais je n'y insisterai pas.

Je retourne donc à la formule trouvée

$$\tfrac{1}{2} w_0^2 + v_0 p_0 + Q_0 = \tfrac{1}{2} w_1^2 + v_1 p_1 + Q_1,$$

et j'observe que l'on aura encore

$$m = \frac{\Omega_1 w_1}{v_1} = \frac{\Omega_0 w_0}{v_0}$$

pour l'expression de la masse m qui s'écoulera en une seconde de temps, et, par suite, la condition

$$\frac{\Omega_1 w_1}{v_1} = \frac{\Omega_0 w_0}{v_0}$$

entre les vitesses w_0, w_1.

Quand la section de l'orifice de sortie sera extrêmement petite par rapport à la section de l'orifice d'entrée, la vitesse w_1 deviendra négligeable, et l'on aura à très-peu près

$$\tfrac{1}{2} w_0^2 = (v_1 p_1 + Q_1) - (v_0 p_0 + Q_0),$$

puis, en remplaçant les produits $v_1 p_1$, $v_0 p_0$, et les quantités Q_1, Q_0, par leurs valeurs connues,

$$w_0 = [a(t_1) + b(t_1) \log v_1 + \zeta(t_1)] - [a(t_0) + b(t_0) \log v_0 + \zeta(t_0)];$$

ce sera la formule rectifiée de l'écoulement des gaz permanents en place de la formule connue qui renferme le logarithme hyperbolique des pressions p_0, p_1, comme si, pendant la durée de l'écoulement, la dilatation pouvait se faire le long de la courbe $v_0 = a(t)$ sur la *fig.* 1. Ce logarithme hyperbolique du rapport des pressions p_0, p_1,

avait l'inconvénient de faire trouver une vitesse d'écoulement infiniment grande quand on supposait $p_0 = 0$. Il entraînait, en même temps, une valeur nulle pour la masse d'air sortante par seconde de temps, ce qui était absolument inadmissible.

La nouvelle équation que je viens de substituer à l'ancienne n'aura pas les mêmes inconvénients. Quand on y fera $p_0 = 0$, on trouvera, pour t_0, une valeur déterminée d'après la condition

$$a(t_0) = 0,$$

puis on aura

$$\frac{a'(t_0)}{k'(t_0)} \log v_0 = \frac{a'(t_1)}{k'(t_1)} \log v_1 + E(t_1) - E(t_0).$$

d'où

$$\log v_0 = \frac{k'(t_0)}{a'(t_0)} \frac{a'(t_1)}{k'(t_1)} \log v_1 + \frac{k'(t_0)}{a'(t_0)} \int_{t_0}^{t_1} \frac{\beta'(t)}{k(t)} dt$$

On aura, en même temps,

$$b(t_0) = \frac{k(t_0) a'(t_0) - a(t_0) k'(t_0)}{k'(t_0)},$$

$$b(t_0) = \frac{k(t_0) a'(t_0)}{k'(t_0)},$$

$$Q_0 = b(t_0) \log v_0 + \beta(t_0) = \frac{k(t_0) a'(t_0)}{k'(t_0)} \log v_0 + k(t_0) \int_{t_0}^{t_1} \frac{\beta'(t)}{k(t)} dt + \beta(t_0).$$

et, enfin,

$$\frac{1}{2} w^2 = a(t_1) + \left(b(t_0) - \frac{k(t_0) a'(t_0)}{k'(t_0)} \right) \log v_1 + k(t_0) \int_{t_0}^{t_1} \frac{\beta'(t)}{k(t)} dt + \beta(t_1) - \beta(t_0).$$

On est d'ailleurs porté à croire que la valeur de Q_0 à la limite $p = 0$ sera très-petite comparativement à la valeur initiale Q_1 de la fonction Q, et que, par cette raison, en négligeant Q_0, on devra avoir à très-peu près, pour la vitesse d'écoulement d'un gaz dans le vide,

$$\frac{1}{2} w^2 = b(t_1) \log v_1 + \beta(t_1).$$

La température t_0, qui figure dans cette théorie du phénomène de l'écoulement d'un fluide élastique, ne saurait être constatée par la simple immersion d'un thermomètre à boule ronde dans le jet d'air sortant; car, à l'entour d'une pareille boule, il y aurait des pressions inégales, et, par suite, des températures inégales.

Il y aurait notamment, au milieu de la partie frappée de la boule, une petite étendue où les parcelles d'air adjacentes seraient sans vitesse et où, d'après les indications les plus générales du principe des forces vives, la pression p_0 ne devrait pas différer de la pression p_1; ce qui entraînerait $t_0 = t_1$ et aurait pour effet de faire marquer au thermomètre une certaine température moyenne plus élevée que t_0.

Pour qu'il n'y eût pas d'objection à faire, il faudrait que l'instrument thermomé-

trique ne pût être impressionné que par une surface exactement cylindrique du jet d'air sortant, ce qu'il serait assez difficile de réaliser complétement.

J'arrive maintenant à l'expression déjà citée de M. Regnault, où, après avoir employé d'abord la force expansive d'une masse d'air à produire des vitesses, on laisse ensuite ces vitesses s'éteindre dans des mouvements de tournoiements, sans qu'il y ait aucune production de travail au dehors et sans que de la chaleur soit prise ou cédée au fluide élastique.

Il faudra alors que, après l'extinction de tous les tournoiements, la quantité Q soit la même qu'auparavant, quoique le volume ait passé de v_0 à v_1. Cela s'exprimera algébriquement par l'égalité $Q_0 = Q_1$, c'est-à-dire

$$b(t_0)\log v_0 + \beta(t_0) = b(t_1)\log v_1 + \beta(t_1),$$

et de cette égalité dépendra la température t_0 que M. Regnault a trouvée sensiblement égale à t_1, ce qui exigerait que l'on eût

$$b(t) = 0.$$

CHAPITRE VIII.

Des différentes manières de satisfaire aux équations $dQ = \Gamma(t) f(t, u)\, du - p\, dv$, $dA = \frac{d}{dt}[\Gamma(t) F(t, u)]\, dt + p\, dv$, *sans invoquer ni la loi de Mariotte, ni la relation* $f(t, u) = \gamma(t)\,\varepsilon(u)$, *etc.*

Toute la théorie que je viens de développer repose, d'une part, sur la relation

$$vp = a(t),$$

servant à exprimer la loi de Mariotte, et, d'autre part, sur l'hypothèse que j'ai faite que la fonction $f(t, u)$ ne devra pas cesser d'être de l'espèce $\gamma(t)\,\varepsilon(u)$ quand on voudra passer de la théorie des vapeurs à celle des gaz permanents.

Une pareille théorie me semble devoir suffire d'ici à longtemps aux recherches des physiciens, alors même qu'elle ne serait pas complète. On a vu, d'ailleurs, que, si la relation

$$vp = a(t)$$

venait à être remplacée par une expression plus générale de la forme

$$p = \frac{a(t)}{\omega(v)},$$

on aurait toutes les mêmes formules, à cela près que, en lieu et place du logarithme hyperbolique de v, on devrait mettre la quantité

$$\int \frac{dt}{\omega(v)};$$

de telle sorte que, si l'on faisait

$$\omega(v) = \text{constante} = 1,$$

on n'aurait qu'à mettre v en place du logarithme v pour avoir la théorie parfaitement exacte des vapeurs.

Cependant, comme la relation de Mariotte n'est vraisemblablement pas admissible jusqu'à la limite $p = 0$, et qu'il peut en être de même de la relation plus générale

$$p\,\omega(v) = a(t),$$

je veux traiter encore le sujet d'une manière plus générale, en ne préjugeant absolument rien de la nature des courbes $\varphi(v, p) = t$ et en admettant seulement que la fonction $f(t, u)$ ne devra pas cesser d'être de l'espèce $\gamma(t)\,\varepsilon(u)$ comme pour les vapeurs, sauf, en dernier lieu, à prendre pour $f(t, u)$ telle expression en t, u qu'on voudra.

J'ai fait voir, d'ailleurs, qu'une relation de la forme

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t) f(t, u)\,du = \Gamma(t)\,\gamma(t)\,\varepsilon(u)\,du$$

ne sera ni plus ni moins générale que l'expression plus simple

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t) f(t, u)\,du = \Gamma(t)\,\gamma(t)\,du = k(t)\,du,$$

ce qui me permettra de faire immédiatement

$$\Gamma(t) f(t, u) = k(t).$$

La dernière des équations (N), ou la condition fondamentale de la théorie, continuera alors à être de la forme

$$\frac{k(t)}{k'(t)} = p\frac{dt}{dp} + \left(\frac{dQ}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{dQ}{dp}\frac{dt}{dv}\right);$$

mais le premier terme du second membre pourra ne plus être une fonction de t, et, par suite, la quantité entre parenthèses pourra aussi ne plus être une fonction de t, ce qui ne permettra plus de voir directement de quelle espèce devra être la fonction Q.

La difficulté pourra fort heureusement être tournée en ayant recours à l'équation (13), qui est généralement

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}\{\Gamma(t) f(t, u)\}\frac{du}{dv}.$$

par rapport à v, t comme variables indépendantes, et qui, par cela seul qu'on aura

$$\Gamma(t) f(t, u) = k(t),$$

se réduira à

$$\frac{dp}{dt} = k'(t)\frac{du}{dv}.$$

D'autre part, en continuant à désigner par A l'aire OHIBA des courbes $\varphi(v, p) = t$ sur la *fig.* 1, et en regardant la quantité A comme une certaine fonction en v, t, on aura

manifestement

$$p = \frac{dA(v, t)}{dv};$$

par suite, l'équation précédente se réduira à

$$\frac{d^2 A(v, t)}{dv\,dt} = k'(t)\frac{du}{dv},$$

et, en l'intégrant par rapport à v sans faire varier t, on en conclura sous forme finie

$$k'(t)\,u = \frac{dA(v, t)}{dt} + \text{fonction}(t).$$

Ce sera l'équation générale des courbes $\psi(v, p) = u$ en fonction de v, t comme variables indépendantes, tandis que la relation

$$p = \frac{dA(v, t)}{dv}$$

pourra être employée comme étant l'équation générale des courbes $\varphi(v, p) = t$; car, du moment où une relation

$$\varphi(v, p) = t$$

sera donnée, l'aire A des courbes φ, en un point v, t sur la *fig.* 1, aura une valeur parfaitement déterminée, et il n'y aura que des difficultés d'intégration qui pourront empêcher d'en trouver l'expression sous forme explicite en v, t; puis, quand ces difficultés se trouveront surmontées, il est clair que la relation

$$p = \frac{dA(v, t)}{dv}$$

devra être identiquement la même que si de l'équation donnée $\varphi(v, p) = t$ on tirait la valeur de p en fonction de v, t.

Une telle manière de représenter les équations des courbes $\varphi(v, p) = t$ et $\psi(v, p) = u$ reviendra à faire usage de la seconde des formules (A) ou de cette équation complémentaire

$$dA = \frac{d}{dt}(\Gamma(t)\,F(t, u))\,dt + p\,dv = \frac{dR}{dt}\,dt + p\,dv,$$

que j'ai entièrement négligée jusqu'ici, et d'après laquelle, en considérant A comme une fonction de v, t, il faudra que l'on ait

$$\frac{dA(v, t)}{dv} = p,$$

$$\frac{dA(v, t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\Gamma(t)\,F(t, u)) = \frac{dR}{dt};$$

mais on a, par hypothèse, au point de vue actuel du sujet,

$$\Gamma(t)\,F(t, u) = \frac{dR}{du} = k(t).$$

Donc, en multipliant par du et en intégrant par rapport à u sans faire varier t, on trouvera

$$R = k(t)\,u - \alpha(t),$$

la lettre α servant à désigner une fonction arbitraire de t; puis, en différentiant par rapport à t sans faire varier u, on aura

$$\frac{dR}{dt} = k'(t)\,u - \alpha'(t);$$

par suite, en transposant et en remplaçant $\frac{dR}{dt}$ par sa valeur, on aura

$$k'(t)\,u = \frac{dA(v, t)}{dt} + \alpha'(t) = \frac{d}{dt}[A(v, t) + \alpha(t)].$$

Ce sera aussi l'équation des courbes $\psi(v, p) = u$, et, en effet, comme la lettre α servira à désigner une fonction arbitraire de t, cette autre équation des courbes $\psi(v, p) = u$ se confondra exactement avec celle que j'ai trouvée tout à l'heure.

Or, l'équation précédemment employée

$$dQ = \Gamma(t) f(t, u)\,du - p\,dv = \frac{dR}{du}\,du - p\,dv,$$

et l'équation actuelle

$$dA = \frac{d}{dt}[\Gamma(t) F(t, u)]\,dt + p\,dv = \frac{dR}{dt}\,dt + p\,dv,$$

sont dans une relation telle, que l'on doit avoir sous forme finie

$$A + Q = R,$$

et, comme les fonctions A, R sont connues, on en conclura

$$Q = R - A = k(t)\,u - [A + \alpha(t)].$$

Ce sera l'expression de la fonction Q en t, u, v, et, quand on y substituera l'expression de u en v, t, on trouvera

$$\begin{aligned} Q &= \frac{k(t)}{k'(t)}\left(\frac{dA(v, t)}{dt} + \alpha'(t)\right) - [A + \alpha(t)] \\ &= k'(t)\,\frac{d}{dt}\left(\frac{A(v, t) + \alpha(t)}{k(t)}\right). \end{aligned}$$

De cette manière, les conditions (N) seront satisfaites, et chacune des équations (A) sera une différentielle exacte; donc le problème se trouvera exactement résolu.

Et, en effet, quand de ces expressions générales des quantités Q, u on voudra passer au cas particulier où l'on aura

$$p = \frac{a(t)}{\omega(v)},$$

on trouvera d'abord

$$A = \int p\,dv = a(t)\int \frac{dv}{\omega(v)}$$

pour l'expression générale de la fonction (A); puis, en différentiant par rapport à v, on aura

$$p = \frac{dA(v,t)}{dv} = \frac{a(t)}{\omega(v)},$$

c'est-à-dire que, par ce procédé de calcul, on retrouvera identiquement l'équation donnée des courbes $\varphi(v,p) = t$.

On aura ensuite

$$\frac{dA(v,t)}{dt} = a'(t)\int \frac{dv}{\omega(v)},$$

$$u = \frac{a'(t)}{k'(t)}\int \frac{dv}{\omega(v)} + \frac{\alpha'(t)}{k'(t)},$$

$$Q = \frac{k(t)a'(t) - a(t)k'(t)}{k'(t)}\int \frac{dv}{\omega(v)} + \frac{k(t)\alpha'(t) - \alpha(t)k'(t)}{k'(t)},$$

et quand on fera, en outre,

$$\frac{k(t)\alpha'(t) - \alpha(t)k'(t)}{k'(t)} = \beta(t),$$

on trouvera, en différentiant,

$$k(t)\frac{k'(t)\alpha'(t) - \alpha'(t)k''(t)}{k'(t)^2} = \beta'(t),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha'(t)}{k'(t)}\right) = \frac{\beta'(t)}{k(t)},$$

et, par conséquent,

$$u = \frac{a'(t)}{k'(t)}\int \frac{dv}{\omega(v)} + \int \frac{\beta'(t)}{k(t)}\,dt,$$

$$Q = \frac{k(t)a'(t) - a(t)k'(t)}{k'(t)}\int \frac{dv}{\omega(v)} + \beta(t),$$

de telle sorte que, en faisant encore

$$\omega(v) = v,$$

on trouvera identiquement les expressions connues des quantités u, Q, pour un gaz permanent supposé assujetti à la loi de Mariotte.

Pareillement, quand on fera

$$\omega(v) = \text{constante} = 1,$$

on retrouvera l'expression déjà connue de Q pour un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide.

La quantité de chaleur nécessaire pour aller d'un point v, t à un autre point infiniment proche $v + dv$, $t + dt$, dépendra de la formule de principe

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t)\,f'(t,v)\,du - \Gamma(t)\,\varphi(t)\,du = k(t)\,du = dQ + p\,dv,$$

où l'on aura

$$du = \frac{du}{dv}\,dv + \frac{du}{dt}\,dt,$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{1}{k'(t)}\,\frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt},$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{k'(t)}\,\frac{d^2A(v,t)}{dt^2} - \frac{k''(t)}{k'(t)}\,\frac{dA(v,t)}{dt} + \frac{k'(t)\,\alpha'(t) - \alpha(t)\,k''(t)}{k'(t)}.$$

ce qui fera trouver

$$\Gamma(t)\,dq = k(t)\,du = \frac{k(t)}{k'(t)}\,\frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}\,dv$$

$$+ \frac{k(t)}{k'(t)}\left\{\frac{d^2A(v,t)}{dt^2} - \frac{k''(t)}{k'(t)}\,\frac{dA(v,t)}{dt} - \frac{k'(t)\,\alpha''(t) - \alpha'(t)\,k''(t)}{k'(t)}\right\}dt.$$

ou bien l'on aura

$$\Gamma(t)\,dq = \left(\frac{dQ}{dv} + p\right)dv + \frac{dQ}{dt}\,dt,$$

$$\frac{dQ}{dv} = \frac{k(t)}{k'(t)}\,\frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt} - \frac{dA(v,t)}{dv},$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{k(t)}{k'(t)}\,\frac{d^2A(v,t)}{dt^2} + \left(\frac{k'(t)^2 - k(t)\,k''(t)}{k'(t)^2} - 1\right)\frac{dA(v,t)}{dt}$$

$$- \frac{k(t)\,\{k'(t)\,\alpha''(t) - \alpha'(t)\,k''(t)\}}{k'(t)},$$

$$p = \frac{dA(v,t)}{dv}.$$

et, par suite, en prenant la somme $dQ + p\,dv$, on retrouvera exactement la précédente expression du produit $\Gamma(t)\,dq$.

Sous forme abrégée, on aura

$$\Gamma(t)\,dq = dQ + p\,dv = d\left\{k'(t)\,\frac{d}{dt}\left(\frac{A(v,t) + \alpha(t)}{k(t)}\right)\right\} + \frac{dA(v,t)}{dv}\,dv,$$

et, plus simplement encore,

$$\Gamma(t)\,dq = k(t)\,du = k(t)\,d\left\{\frac{1}{k'(t)}\,\frac{d}{dt}\{A(v,t) - \alpha(t)\}\right\}.$$

Quand on fera $dt = 0$, dans l'expression générale du produit $\Gamma(t)\,dq$, on trouvera

pour l'expression de la chaleur latente de B en B_1 sur la *fig.* 1,

$$\frac{dq_2}{dv_2}\,\Gamma(t) = k(t)\frac{du}{dv} = \frac{k(t)}{k'(t)}\,\frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt},$$

et quand on fera

$$dv = 0,$$

on trouvera pour la chaleur spécifique à volume constant

$$c\,\Gamma(t) = k(t)\frac{du}{dt} = \frac{k(t)}{k'(t)}\left(\frac{d^2A(v,t)}{dt^2} - \frac{k''(t)}{k'(t)}\,\frac{dA(v,t)}{dt} + \frac{k'(t)\alpha''(t) - \alpha'(t)k''(t)}{k'(t)}\right).$$

Pour trouver la chaleur spécifique à pression constante, il faudra que les variables t, u soient assujetties à la relation

$$p = \text{constante},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dp}{dv}\,dv + \frac{dp}{dt}\,dt = 0,$$

d'où l'on tirera

$$dv = -\frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dp}{dv}}\,dt,$$

et, en substituant dans l'expression générale

$$\Gamma(t)\,dq = k(t)\,du = k(t)\left(\frac{du}{dv}\,dv + k(t)\frac{du}{dt}\right)dt,$$

on aura d'abord

$$c\,\Gamma(t) = -\frac{k(t)\frac{du}{dv}\frac{dp}{dt}}{\frac{dp}{dv}} + k(t)\frac{du}{dt};$$

puis, de la relation

$$p = \frac{dA(v,t)}{dv}$$

on conclura

$$\frac{dp}{dv} = \frac{d^2A(v,t)}{dv^2},$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}.$$

et en substituant ces valeurs, en même temps que celles déjà connues des dérivées de u

en v, p, on aura sous forme explicite

$$c_1\Gamma(t_1) = -\frac{k(t)}{k'(t)}\frac{\left[\dfrac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}\right]}{\dfrac{d^2A(v,t)}{dv^2}} + c_1\Gamma(t_1),$$

puis

$$(c_0 - c_1)\Gamma(t) = -\frac{k(t)}{k'(t)}\frac{\left[\dfrac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}\right]}{\dfrac{d^2A(v,t)}{dv^2}}.$$

Pour contrôler ces résultats, on n'aura qu'à remonter aux formules (O) en v, p et y faire d'abord

$$\Gamma(t)f(t,u) = k(t),$$

ce qui réduira les valeurs finales des trois dernières d'entre elles à

$$(c_0 - c_1)\Gamma(t) = \frac{k(t)}{k'(t)\dfrac{dt}{dv}\dfrac{dt}{dp}},$$

$$\frac{dq_2}{dv_2}\Gamma(t) = \frac{k(t)}{k'(t)\dfrac{dt}{dp}}.$$

$$\frac{dq_2}{dp_2}\Gamma(t) = \frac{k(t)}{k'(t)\dfrac{dt}{dv}}.$$

En différentiant ensuite la relation

$$p = \frac{dA(v,t)}{dv},$$

on aura

$$dp = \frac{d^2A(v,t)}{dv^2}dv + \frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}dt,$$

et l'on en conclura

$$\frac{dt}{dv} = -\frac{\dfrac{d^2A(v,t)}{dv^2}}{\dfrac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}},$$

$$\frac{dt}{dp} = \frac{1}{\dfrac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}},$$

puis, en substituant, on retrouvera exactement les expressions déjà connues des

quantités

$$c_2 - c_1 \quad \Gamma(t), \qquad \frac{dq_2}{dv_2}\Gamma(t);$$

on aura, en outre,

$$\frac{dq_2}{dp_2}\Gamma(t) = -\frac{k(t)}{k'(t)}\frac{\dfrac{d^2 A(v,t)}{dv\,dt}}{\dfrac{d^2 A(v,t)}{dv^2}}.$$

A l'aide de ces formules, la théorie des fluides élastiques aura le plus haut degré de généralité qu'il soit possible de lui donner tant que la fonction $f(t, u)$ ne devra pas cesser d'être de l'espèce $\eta(t)\,\varepsilon(u)$, et que, par suite, il sera permis de faire

$$\varepsilon(u) = 1, \quad \Gamma(t) f(t, u) = \Gamma(t)\,\eta(t) = k(t),$$

ce qui aura lieu nécessairement pour un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, ainsi que je l'ai fait voir déjà et que je le ferai voir encore par la suite.

Je me propose maintenant de franchir les dernières difficultés du sujet, en admettant que, pour un gaz permanent, la quantité

$$R = \Gamma(t)\,F(t, u)$$

puisse être une fonction quelconque des variables t, u.

Je continuerai à regarder la quantité A comme une fonction de v, t d'après une certaine relation donnée $\varphi(v, p) = t$.

Ce sera une question de calcul intégral que de savoir trouver, sous forme explicite en v, t, l'aire A d'une courbe $\varphi(v, p) =$ constante t sur la *fig.* 1.

Cette question étant supposée résolue, la seconde des formules (A) sera de la forme

$$dA(v, t) = \frac{d}{dt}[R(t, u)]\,dt + p\,dv,$$

et, pour qu'elle soit une différentielle exacte en v, t, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait

$$(q) \qquad \frac{dA(v, t)}{dv} = p,$$

$$(q') \qquad \frac{dA(v, t)}{dt} = \frac{dR(t, u)}{dt}.$$

L'équation (q) aura lieu d'elle-même par cela seul que la quantité A sera l'aire de la courbe donnée $\varphi(v, p) = t$; elle devra être satisfaite identiquement par la valeur de p tirée de l'équation

$$\varphi(v, p) = t,$$

et, par conséquent, elle équivaudra à cette dernière équation.

La formule (q) sera donc l'équation générale des courbes $\varphi(v, p) = t$, et la formule (q'), qui établira une relation parfaitement déterminée entre v, t, u, sera l'équation générale des courbes $\psi(v, p) = u$, en fonction de v, t comme variables indépendantes.

On aura ensuite

$$(q'') \qquad Q = R(t, u) - A(v, t),$$

et toutes les conditions du problème seront exactement remplies.

La seconde des formules (A) sera, en effet, une différentielle exacte, et la première, qui est, en principe,

$$dQ = \frac{dR(t, u)}{du} du - p\,dv,$$

se changera d'abord en

$$\left(\frac{dR(t, u)}{dt} dt + \frac{dR(t, u)}{du} du\right) - \left(\frac{dA(v, t)}{dv} dv + \frac{dA(v, t)}{dt} dt\right)$$
$$= \frac{dR(t, u)}{du} du - \frac{dA(v, t)}{dv} dv,$$

puis, à l'aide de la relation (q'), elle se réduira à une pure identité.

La quantité de chaleur nécessaire, d'un point v, t à un autre point infiniment proche $v + dv$, $t + dt$, dépendra de la formule

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t) f(t, u)\,du = \frac{dR(t, u)}{du} du,$$

puis, en différentiant la formule (q'), on aura

$$\frac{d^2 A(v, t)}{dv\,dt} dv + \frac{d^2 A(v, t)}{dt^2} dt = \frac{d^2 R(t, u)}{dt^2} dt + \frac{d^2 R(t, u)}{dt\,du} du,$$

et, en transposant,

$$\frac{d^2 R(t, u)}{dt\,du} du - \frac{d^2 A(v, t)}{dv\,dt} dv + \left(\frac{d^2 A(v, t)}{dt^2} - \frac{d^2 R(t, u)}{dt^2}\right) dt,$$

par suite,

$$\Gamma(t)\,dq = \frac{\dfrac{dR(t, u)}{du}}{\dfrac{d^2 R(t, u)}{dt\,du}} \frac{d^2 A(v, t)}{dv\,dt} dv + \frac{\dfrac{dR(t, u)}{du}}{\dfrac{d^2 R(t, u)}{dt\,du}} \left(\frac{d^2 A(v, t)}{dt^2} - \frac{d^2 R(t, u)}{dt^2}\right) dt.$$

En y faisant d'abord

$$dt = 0,$$

on trouvera la chaleur latente sous la forme

$$\Gamma(t) \frac{dq_2}{dv_2} = \frac{\dfrac{dR(t, u)}{du}}{\dfrac{d^2 R(t, u)}{dt\,du}} \frac{d^2 A(v, t)}{dv\,dt}.$$

En y faisant ensuite

$$dv = 0,$$

on trouvera la chaleur spécifique à volume constant c_1 par la formule

$$c_1 \Gamma(t) = \frac{\dfrac{d\mathrm{R}(t, u)}{du}}{\dfrac{d^2\mathrm{R}(t, u)}{dt\,du}} \left(\frac{d^2\mathrm{A}(v, t)}{dt^2} - \frac{d^2\mathrm{R}(t, u)}{dt^2}\right).$$

Pour avoir la chaleur spécifique à pression constante, il faudra que les variables v, t soient assujetties à la relation

$$p = \text{constante},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dp}{dv}\,dv + \frac{dp}{dt}\,dt = 0,$$

et de l'équation (q) on tirera

$$\frac{dp}{dv} = \frac{d^2\mathrm{A}(v, t)}{dv^2},$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d^2\mathrm{A}(v, t)}{dv\,dt}.$$

par suite,

$$dv = -\frac{\dfrac{d^2\mathrm{A}(v, t)}{dv\,dt}}{\dfrac{d^2\mathrm{A}(v, t)}{dv^2}}\,dt;$$

puis en substituant, dans l'expression générale du produit $\Gamma(t)\,dq$, on trouvera

$$c_1 \Gamma(t) = -\frac{\dfrac{d\mathrm{R}(t, u)}{du}}{\dfrac{d^2\mathrm{R}(t, u)}{dt\,du}} \frac{\left(\dfrac{d^2\mathrm{A}(v, t)}{dv\,dt}\right)^2}{\dfrac{d^2\mathrm{A}(v, t)}{dv^2}} + c \Gamma(t),$$

d'où, enfin,

$$c - c_1 \Gamma(t) = -\frac{\dfrac{d\mathrm{R}(t, u)}{du}}{\dfrac{d^2\mathrm{R}(t, u)}{dt\,du}} \frac{\left(\dfrac{d^2\mathrm{A}(v, t)}{dv\,dt}\right)^2}{\dfrac{d^2\mathrm{A}(v, t)}{dv^2}}.$$

On aura encore, pour la différentielle complète de la quantité Q,

$$dQ = \frac{d\mathrm{R}(t, u)}{du}\,du - p\,dv = \frac{d\mathrm{R}(t, u)}{du}\,du - \frac{d\mathrm{A}(v, t)}{dv}\,dv.$$

et, par suite, en y substituant la valeur de du en dv, dt,

$$dQ = \left\{ \frac{\dfrac{dR(t, u)}{du}}{\dfrac{d^2R(t, u)}{dt\,du}} \frac{d^2A(v, t)}{dv\,dt} - \frac{dA(v, t)}{dv\,dt} \right\} dv$$

$$+ \frac{\dfrac{dR(t, u)}{du}}{\dfrac{d^2R(t, u)}{dt\,du}} \left\{ \frac{d^2A(v, t)}{dt^2} - \frac{dR(t, u)}{dt^2} \right\} dt.$$

Cette relation devant être identique avec

$$dQ = \frac{dQ}{dv} dv + \frac{dQ}{dt} dt,$$

on voit d'abord quelles seront les valeurs des dérivées partielles de la fonction Q en v, t. On voit, ensuite, que l'on aura simplement

$$\Gamma(t)\, dq = \frac{dR(t, u)}{du} du = dQ + p\,dv = \left(p + \frac{dQ}{dv}\right) dv + \frac{dQ}{dt} dt,$$

$$\Gamma(t) \frac{dq_v}{dv} = p + \frac{dQ}{dv},$$

$$\Gamma(t) = \frac{dQ}{dt},$$

$$\Gamma(t) = -\left\{ p + \frac{dQ}{dv} \frac{\dfrac{dp}{dt}}{\dfrac{dp}{dv}} \right\} + \frac{dQ}{dt},$$

$$\Gamma(t_0 - t_1)\Gamma(t) = -\left\{ p + \frac{dQ}{dv} \frac{\dfrac{dp}{dt}}{\dfrac{dp}{dv}} \right\},$$

en place des formules précédentes.

On pourrait faire des transformations analogues par rapport à t, u ou v, p comme variables indépendantes; mais cela me retarderait inutilement ici.

Ce que je veux examiner encore, c'est le cas où l'équation générale des courbes $\varphi(v, p) = t$ sera donnée sous la forme

$$\varphi_1(v, p, t) = 0,$$

et où, après avoir cherché l'aire A d'une pareille courbe pour $t =$ constante, on aura trouvé une expression algébrique de la forme

$$A = A_1(v, p, t),$$

sans que l'on ait pu réussir à faire l'élimination de p entre les fonctions A_1, φ_1.

On aura, dans ce cas-là,

$$\frac{dA}{dv} = \frac{dA_1(v, p, t)}{dv} + \frac{dA_1(v, p, t)}{dp}\frac{dp}{dv}$$

et

$$\frac{d\varphi_1(v, p, t)}{dv} + \frac{d\varphi_1(v, p, t)}{dp}\frac{dp}{dv} = 0,$$

puis, en éliminant $\frac{dp}{dv}$,

$$dA = \frac{dA_1(v, p, t)}{dv} - \frac{dA_1(v, p, t)}{dp}\frac{\frac{d\varphi_1(v, p, t)}{dv}}{\frac{d\varphi_1(v, p, t)}{dp}}.$$

On aura pareillement

$$\frac{dA(v, t)}{dt} = \frac{dA_1(v, p, t)}{dt} + \frac{dA_1(v, p, t)}{dp}\frac{dp}{dt}$$

et

$$\frac{d\varphi_1(v, p, t)}{dt} + \frac{d\varphi_1(v, p, t)}{dp}\frac{dp}{dt} = 0,$$

puis, en éliminant $\frac{dp}{dt}$,

$$\frac{dA(v, t)}{dt} = \frac{dA_1(v, p, t)}{dt} - \frac{dA_1(v, p, t)}{dp}\frac{\frac{d\varphi_1(v, p, t)}{dt}}{\frac{d\varphi_1(v, p, t)}{dp}}.$$

par suite, les équations (q), (q') devront être remplacées par

$$p = \frac{dA(v, t)}{dv} = \frac{\frac{dA_1(v, p, t)}{dv}\frac{d\varphi_1(v, p, t)}{dp} - \frac{dA_1(v, p, t)}{dp}\frac{d\varphi_1(v, p, t)}{dv}}{\frac{d\varphi_1(v, p, t)}{dv}},$$

$$\frac{dR(t, u)}{dt} = \frac{dA(v, t)}{dt} = \frac{\frac{dA_1(v, p, t)}{dt}\frac{d\varphi_1(v, p, t)}{dp} - \frac{dA_1(v, p, t)}{dp}\frac{d\varphi_1(v, p, t)}{dt}}{\frac{d\varphi_1(v, p, t)}{dv}},$$

et l'équation (q') par

$$Q = R(t, u) = A(v, p, t).$$

Quand, enfin, l'on voudra déterminer les dérivées secondes

$$\frac{d^2A(v, t)}{dt^2}, \quad \frac{d^2A(v, t)}{dv\,dt}, \quad \frac{d^2A(v, t)}{dv^2},$$

on opérera sur les dérivées premières de A en v, t et sur la fonction φ_1, de la même manière que j'ai opéré d'abord sur la fonction A et sur la fonction φ_1.

A côté de cette méthode, qui consiste à regarder la quantité A comme une fonction donnée en v, t, il m'est tout aussi facile d'en placer une autre qui consistera à regarder la quantité Q comme une fonction donnée en v, u.

Je me servirai alors de la première des formules (A), qui sera

$$dQ(v, u) = \frac{dR(t, u)}{du} du - p\,dv,$$

et j'en ferai une différentielle exacte en posant

$$(a) \qquad \frac{dQ(v, u)}{dv} = -p,$$

$$(a') \qquad \frac{dQ(v, u)}{du} = \frac{dR(t, u)}{du}.$$

De cette manière la formule (a) deviendra l'équation générale des courbes $\psi(v, p) = u$, et la formule (a') deviendra l'équation générale des courbes $\varphi(v, p) = t$.

Je ferai ensuite

$$(a'') \qquad A = R(t, u) - Q(v, u),$$

et toutes les conditions du problème seront exactement remplies par rapport à des fonctions $R(t, u)$, $Q(v, u)$, supposées données arbitrairement.

Je puis supposer encore que l'on me donnera à la fois les deux fonctions $A(v, t)$, $Q(v, u)$. Les formules (A) seront alors

$$dQ(v, u) = \frac{dR(t, u)}{du} du - p\,dv,$$

$$dA(v, t) = \frac{dR(t, u)}{dt} dt - p\,dv.$$

et quand je poserai à la fois

$$(r) \qquad \begin{cases} \dfrac{dA(v, t)}{dv} = p, \\[2ex] \dfrac{dQ(v, u)}{dv} = -p, \end{cases}$$

$$(r') \qquad \begin{cases} \dfrac{dA(v, t)}{dt} = \dfrac{dR(t, u)}{dt}, \\[2ex] \dfrac{dQ(v, u)}{du} = \dfrac{dR(t, u)}{du}, \end{cases}$$

$$(r'') \qquad R(t, u) = A(v, t) + Q(v, u),$$

chacune d'elles sera manifestement une différentielle exacte, mais il faudra que je démontre que les équations (r), (r'), (r'') ne sont pas contradictoires.

Et d'abord, en éliminant p entre les équations (r), j'aurai la formule résultante

$$(r\ bis)\qquad \frac{dA(v,t)}{dv} + \frac{dQ(v,u)}{dv} = 0,$$

qui me donnera, d'une part, la relation des variables v, u le long des courbes $\varphi(v,p) = t$ quand j'y regarderai t comme constant, et, d'autre part, la relation des variables v, t le long des courbes $\psi(v,p) = u$ quand j'y regarderai u comme constant.

La formule $(r\ bis)$ sera donc à la fois l'équation des courbes φ en v, u et l'équation des courbes ψ en v, t.

Le long des courbes φ on aura, sans faire varier t,

$$\frac{d^2A(v,t)}{dv^2}dv + \frac{d^2Q(v,u)}{dv^2}dv + \frac{d^2Q(v,u)}{dv\,du}du = 0, \quad (t = \text{constante}).$$

et le long des courbes ψ on aura, sans faire varier u,

$$\frac{d^2A(v,t)}{dv^2}dv + \frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}dt + \frac{d^2Q(v,u)}{dv^2}dv = 0, \quad (u = \text{constante}).$$

Quand on ne fera pas varier v, on aura, le long d'une perpendiculaire AB sur la *fig.* 1,

$$\frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}dt + \frac{d^2Q(v,u)}{dv\,du}du = 0, \quad (v = \text{constante}).$$

et la différentielle complète de la formule $(r\ bis)$ sera

$$\frac{d^2A(v,t)}{dv^2}dv + \frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}dt + \frac{d^2Q(v,u)}{dv^2}dv + \frac{d^2Q(v,u)}{dv\,du}du = 0$$

Cela posé, je vais faire voir que les formules (r'') et $(r\ bis)$ entraîneront comme conséquences les formules (r'), et que, par suite, les formules (r'') ne seront plus des équations de condition.

Pour y parvenir, je prends la différentielle complète de la formule (r''), et je trouve

$$\frac{dR(t,u)}{dt}dt + \frac{dR(t,u)}{du}du = \frac{dA(v,t)}{dv}dv + \frac{dA(v,t)}{dt}dt + \frac{dQ(v,u)}{dv}dv + \frac{dQ(v,u)}{du}du.$$

Je vois ensuite que, en vertu de la formule $(r\ bis)$, la différentielle dv disparaîtra du second membre, et comme les variables t, u sont complètement indépendantes l'une de l'autre, je serai conduit manifestement aux formules (r').

Ainsi, les seules équations de condition du problème seront les formules (r) et (r''), dont les premières entraîneront toujours comme conséquences la formule $(r\ bis)$.

Cependant, pour que la démonstration soit absolument complète, il ne sera peut-être pas inutile que je fasse voir encore que les différentielles des équations $(r\ bis)$ et (r') ne seront pas contradictoires.

Je différentie donc les équations (r'), et je trouve

$$\frac{d^2R(t,u)}{dt^2}dt + \frac{d^2R(t,u)}{dt\,du}du = \frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}dv + \frac{d^2A(v,t)}{dt^2}dt,$$

$$\frac{d^2R(t,u)}{dt\,du}dt + \frac{d^2R(t,u)}{du^2}du = \frac{d^2Q(v,u)}{dv\,du}dv + \frac{d^2Q(v,u)}{du^2}du;$$

je remonte ensuite à la différentielle complète de l'équation $(r\,bis)$, et, en convenant de la notation auxiliaire

$$\frac{d^2A(v,t)}{dv^2} + \frac{d^2Q(v,u)}{dv^2} = -E,$$

j'en tire

$$dv = \frac{1}{E}\frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}dt + \frac{1}{E}\frac{d^2Q(v,u)}{dv\,du}du.$$

Je substitue cette valeur de dv dans les équations précédentes, et je trouve

$$\frac{d^2R(t,u)}{dt^2}dt + \frac{d^2R(t,u)}{dt\,du}du$$
$$= \left\{\frac{1}{E}\left(\frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}\right)^2 + \frac{d^2A(v,t)}{dt^2}\right\}dt + \frac{1}{E}\frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}\frac{d^2Q(v,u)}{dv\,du}du,$$

$$\frac{d^2R(t,u)}{dt\,du}dt + \frac{d^2R(t,u)}{du^2}du$$
$$= \frac{1}{E}\frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}\frac{d^2Q(v,u)}{dv\,du}dt + \left\{\frac{1}{E}\left(\frac{d^2Q(v,u)}{dv\,du}\right)^2 + \frac{d^2Q(v,u)}{du^2}\right\}du$$

Ces deux relations devant avoir lieu quels que soient les accroissements des variables indépendantes t, u, j'en tire les trois relations distinctes

$$\frac{d^2R(t,u)}{dt^2} = \frac{1}{E}\left(\frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}\right)^2 + \frac{d^2A(v,t)}{dt^2},$$

$$\frac{d^2R(t,u)}{dt\,du} = \frac{1}{E}\frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}\frac{d^2Q(v,u)}{dv\,du},$$

$$\frac{d^2R(t,u)}{du^2} = \frac{1}{E}\left(\frac{d^2Q(v,u)}{dv\,du}\right)^2 + \frac{d^2Q(v,u)}{du^2},$$

en vertu desquelles les différentielles des équations (r') se confondront identiquement avec la différentielle de l'équation $(r\,bis)$. C. Q. F. D.

Il reste encore à calculer les quantités ϑ_0, ϑ_1, q_0, q_1, c_0, c_1, et la chaleur latente.

Pour cela, je différentie d'abord la première des équations (r), et j'ai

$$\frac{d^2A(v,t)}{dv^2}dv + \frac{d^2A(v,t)}{dv\,dt}dt = dp.$$

J'en tire

$$dt = -\frac{\dfrac{d^2 A(v, t)}{dv^2}\, dv - dp}{\dfrac{d^2 A(v, t)}{dv\, dt}};$$

et, par suite,

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{dt}{dv} = -\frac{\dfrac{d^2 A(v, t)}{dv^2}}{\dfrac{d^2 A(v, t)}{dv\, dt}}.$$

$$\mathfrak{z}_1 = \frac{dt}{dp} = +\frac{1}{\dfrac{d^2 A(v, t)}{dv\, dt}};$$

je différentie ensuite la deuxième des formules (r), et j'ai

$$\frac{d^2 Q(v, u)}{dv^2}\, dv + \frac{d^2 Q(v, u)}{dv\, du}\, du = -dp.$$

J'en tire

$$du = \frac{\dfrac{d^2 Q(v, u)}{dv^2}\, dv + dp}{\dfrac{d^2 Q(v, u)}{dv\, du}}.$$

et, par suite,

$$\frac{du}{dv} = -\frac{\dfrac{d^2 Q(v, u)}{dv^2}}{\dfrac{d^2 Q(v, u)}{dv\, du}},$$

$$\frac{du}{dp} = -\frac{1}{\dfrac{d^2 Q(v, u)}{dv\, du}}.$$

La quantité de chaleur nécessaire d'un point à un autre sera, en principe

$$dq = \frac{1}{\Gamma(t)} \frac{d R(t, u)}{du}\, du,$$

et, en vertu de la seconde des formules (r'), on aura

$$\Gamma(t)\, dq = \frac{d Q(v, u)}{du}\, du.$$

par suite,

$$\Gamma(t)\, dq = \frac{d Q(v, u)}{du} \frac{du}{dv}\, dv + \frac{d Q(v, u)}{du} \frac{du}{dp}\, dp = q_1 \Gamma(t)\, dv + q_2 \Gamma(t)\, dp$$

Donc

$$q_0(\Gamma, t) = \frac{dQ(v, u)}{du}\frac{du}{dv} = -\frac{\dfrac{dQ(v, u)}{du}\dfrac{d^2Q(v, u)}{dv^2}}{\dfrac{d^2Q(v, u)}{dv\,du}}.$$

$$q(\Gamma, t) = \frac{dQ(v, u)}{du}\frac{du}{dp} = -\frac{\dfrac{dQ(v, u)}{du}}{\dfrac{d^2Q(v, u)}{dv\,du}}.$$

puis,

$$c_0(\Gamma, t) = \frac{q_0(\Gamma, t)}{\mathfrak{T}_0} = +\frac{\dfrac{dQ(v, u)}{du}\dfrac{d^2Q(v, u)}{dv^2}\dfrac{d^2A(v, t)}{dv\,dt}}{\dfrac{d^2Q(v, u)}{dv\,du}\dfrac{d^2A(v, t)}{dv^2}},$$

$$c(\Gamma, t) = \frac{q(\Gamma, t)}{\mathfrak{T}} = -\frac{\dfrac{dQ(v, u)}{du}\dfrac{d^2A(v, t)}{dv\,dt}}{\dfrac{d^2Q(v, u)}{dv\,du}},$$

et, en soustrayant,

$$c_0 - c(\Gamma, t) = \frac{dQ(v, u)}{du}\left(\frac{d^2A(v, t)}{dv^2} + \frac{d^2Q(v, u)}{dv^2}\right)\frac{d^2A(v, t)}{dv\,dt}\Big/\frac{d^2Q(v, u)}{dv\,du}\frac{d^2A(v, t)}{dv^2}.$$

Les expressions de la chaleur latente deviendront

$$\frac{dq_0}{dv_0}(\Gamma, t) = (c_0 - c)\mathfrak{T}_0(\Gamma, t) = +\frac{\dfrac{dQ(v, u)}{du}\left(\dfrac{d^2A(v, t)}{dv^2} + \dfrac{d^2Q(v, u)}{dv^2}\right)}{\dfrac{d^2Q(v, u)}{dv\,du}}.$$

$$\frac{dq}{dp}(\Gamma, t) = (c_0 - c)\mathfrak{T}(\Gamma, t) = -\frac{\dfrac{dQ(v, u)}{du}\left(\dfrac{d^2A(v, t)}{dv^2} + \dfrac{d^2Q(v, u)}{dv^2}\right)}{\dfrac{d^2Q(v, u)}{dv\,du}\dfrac{d^2A(v, t)}{dv^2}}$$

et, en dernier lieu, il sera facile de vérifier que la condition fondamentale

$$\frac{du}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{du}{dp}\frac{dt}{dv} = \frac{1}{\dfrac{d}{dt}(\Gamma, t)f(t, u)} = \frac{1}{\dfrac{d^2R(t, u)}{dt\,du}}$$

sera exactement satisfaite.

Si l'on me demandait la différence des chaleurs spécifiques et les expressions de la chaleur latente en fonction des quantités A, R au lieu de A, Q, je me servirais des relations connues des dérivées secondes des fonctions A, Q, R, et j'en tirerais

$$\frac{d^2 A(v, t)}{dv^2} + \frac{d^2 Q(v, u)}{dv^2} = -E = -\frac{\dfrac{d^2 A(v, t)}{dv\,dt}\,\dfrac{d^2 Q(v, u)}{dv\,du}}{\dfrac{d^2 R(t, u)}{dt\,du}}.$$

J'aurais en même temps, d'après la seconde des formules (r'),

$$\frac{dQ(v, u)}{du} = \frac{dR(t, u)}{du},$$

et, par suite,

$$(c_0 - c_1)\,\Gamma(t) = -\frac{\dfrac{dR(t, u)}{du}\left(\dfrac{d^2 A(v, t)}{dv\,dt}\right)}{\dfrac{d^2 R(t, u)}{dt\,du}\,\dfrac{d^2 A(v, t)}{dv^2}}.$$

$$\frac{dq_2}{dv_2}\,\Gamma(t) = (c_0 - c_1)\,\mathfrak{S}_0\,\Gamma(t) = -\frac{\dfrac{dR(t, u)}{du}\,\dfrac{d^2 A(v, t)}{dv\,dt}}{\dfrac{d^2 R(t, u)}{dt\,du}}.$$

$$\frac{dq_2}{dp_2}\,\Gamma(t) = (c_0 - c_1)\,\mathfrak{S}_1\,\Gamma(t) = -\frac{\dfrac{dR(t, u)}{du}\,\dfrac{d^2 A(v, t)}{dv\,dt}}{\dfrac{d^2 R(t, u)}{dt\,du}\,\dfrac{d^2 A(v, t)}{dv^2}}.$$

ce qui est parfaitement d'accord avec les formules déjà connues de l'autre méthode d'intégration, où les fonctions A, R étaient regardées comme données.

De pareilles transformations seraient possibles en Q, R au lieu de A, R, mais je ne m'y arrêterai point.

En résumé, pour satisfaire aux équations (A), qui sont

$$dQ = \frac{dR}{du}\,du - p\,dv,$$

$$dA = \frac{dR}{dt}\,dt + p\,dv,$$

je puis m'y prendre de trois manières différentes : d'abord en regardant les fonctions A, R comme données et en posant

$$\left\{\begin{array}{ll} (q) & \dfrac{dA(v, t)}{dv} = p, \\[2ex] (q') & \dfrac{dA(v, t)}{dt} = \dfrac{dR(t, u)}{dt}, \\[2ex] (q'') & Q = R(t, u) - A(v, t). \end{array}\right.$$

ensuite, en regardant les fonctions Q, R comme données et en posant

$$[a]\quad \begin{cases} (a) & \dfrac{dQ(v,u)}{dv} = -p, \\ (a') & \dfrac{dQ(v,u)}{du} = \dfrac{dR(t,u)}{du}, \\ (a'') & A = R(t,u) - Q(v,u); \end{cases}$$

enfin, en regardant les fonctions A, Q comme données et en posant

$$[r]\quad \begin{cases} (r) & \dfrac{dA(v,t)}{dv} - \dfrac{dQ(v,u)}{dv} = p, \\ (r\ bis) & \dfrac{dA(v,t)}{dv} + \dfrac{dQ(v,u)}{dv} = 0, \\ (r'') & R = A(v,t) + Q(v,u). \end{cases}$$

Ce n'est pas tout; si je remonte aux relations très-simples des formules (19) et (19 *bis*), je vois à l'instant que, dans le cas où, en place des fonctions A, Q, je voudrais faire usage des fonctions complémentaires

$$A_1 = A - vp = A - v\frac{dA(v,t)}{dv},$$

$$Q_1 = Q + vp = Q - v\frac{dQ(v,u)}{dv},$$

j'aurais à remplacer les formules (A) par les formules analogues

$$dQ_1 = \frac{dR}{du}du + v\,dp,$$

$$dA_1 = \frac{dR}{dt}dt - v\,dp,$$

et que, par suite, je serai conduit à me servir, d'une part, des relations

$$[q]\quad \begin{cases} (q_1) & \dfrac{dA_1(p,t)}{dp} = -v, \\ (q'_1) & \dfrac{dA_1(p,t)}{dt} = \dfrac{dR(t,u)}{dt}, \\ (q''_1) & Q_1 = R(t,u) - A_1(p,t), \end{cases}$$

en place de (q), (q'), (q''); d'autre part, des relations

$$[a]\quad \begin{cases} (a_1) & \dfrac{dQ_1(p,u)}{dp} = +v, \\ (a'_1) & \dfrac{dQ_1(p,u)}{du} = \dfrac{dR(t,u)}{du}, \\ (a''_1) & A_1 = R(t,u) - Q_1(p,u), \end{cases}$$

en place de (a), (a'), (a''), et, enfin, des relations

$$(r_1)\quad \begin{cases} (r_1) & \dfrac{dA(p,t)}{dp} = -\dfrac{dQ(p,u)}{dp} = -v, \\ (r_1\,bis) & \dfrac{dA_1(p,t)}{dp} + \dfrac{dQ_1(p,u)}{dp} = 0, \\ (r_1'') & R(t,u) = A_1(p,t) + Q_1(p,u), \end{cases}$$

en place de (r), $(r\,bis)$, (r'').

Il me sera loisible encore de remplacer les équations (A) par

$$dQ = \frac{dR}{du}\,du - p\,dv,$$

$$dA = \frac{dR}{dt}\,dt - v\,dp,$$

ou bien par

$$dQ = \frac{dR}{du}\,du + v\,dp,$$

$$dA = \frac{dR}{dt}\,dt + p\,dv.$$

Dans le premier cas, j'y satisferai en me donnant, soit

$$A(p,t) \quad \text{et} \quad R(t,u),$$

soit

$$Q(v,u) \quad \text{et} \quad R(t,u),$$

soit

$$A(p,t) \quad \text{et} \quad Q(v,u).$$

j'aurai ainsi trois nouveaux groupes d'équations (q_2), (a_2), (r_2) dont le dernier sera

$$(r_2)\quad \begin{cases} \dfrac{dA(p,t)}{dp} = -v, \\ \dfrac{dQ(v,u)}{du} = -p, \\ R = vp + A(p,t) + Q(v,u). \end{cases}$$

Dans le second cas, je pourrai me donner arbitrairement, soit

$$A(v,t) \quad \text{et} \quad R(t,u),$$

soit

$$Q(p,u) \quad \text{et} \quad R(t,u),$$

soit

$$A(v,t) \quad \text{et} \quad Q(p,u);$$

j'aurai ainsi trois autres groupes $\{q\}$, $\{a\}$, $\{r\}$ dont le dernier sera

$$(r_3)\quad \begin{cases} \dfrac{dA(v,t)}{dv} = p, \\ \dfrac{dQ(p,u)}{dp} = v, \\ R = -vp + A(v,t) + Q(p,u). \end{cases}$$

Or tous ces problèmes dépendaient dès l'origine des équations (11), (11 *bis*), (12), (12 *bis*), (13), (13 *bis*), etc., selon que les variables indépendantes devaient être t, u, ou v, p, ou v, t, etc.

Donc, puisque je suis parvenu à exprimer sous formes finies toutes les relations des quantités v, p, t, u des équations de condition (11), (11 *bis*), (12), (12 *bis*), (13), (13 *bis*), etc., par l'un quelconque des groupes d'équations $\{q\}$, $\{a\}$, $\{r\}$, ou $\{q_1\}$, $\{a_1\}$, $\{r_1\}$, ou $\{q_2\}$, $\{a_2\}$, $\{r_2\}$, ou $\{q_3\}$, $\{a_3\}$, $\{r_3\}$, c'est que chacun de ces groupes, à volonté, équivaudra aux résultats complets de l'intégration de chacune des équations de condition en question, et de cette simple observation je tire la conséquence majeure que voici.

Pour intégrer l'une quelconque des équations ci-après :

$$\frac{dp}{dt}\frac{dv}{du} - \frac{dp}{du}\frac{dv}{dt} = r(t,u),$$

$$\frac{du}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{du}{dp}\frac{dt}{dv} = \frac{1}{r(t,u)},$$

$$\frac{\dfrac{dp}{dt}}{\dfrac{du}{dv}} = r(t,u),$$

. . . . . .

. . . . . .

commencez par calculer l'intégrale seconde

$$R(t,u) = \iint r(t,u)\,dt\,du,$$

puis écrivez l'un des groupes d'équations $\{q\}$, $\{a\}$, $\{r\}$, ou $\{q_1\}$, $\{a_1\}$, $\{r_1\}$, ou $\{q_2\}$, $\{a_2\}$, $\{r_2\}$, ou $\{q_3\}$, $\{a_3\}$, $\{r_3\}$, et le problème sera résolu.

J'observe maintenant que, s'il me plaisait de me donner arbitrairement la valeur de la quantité $r(t,u)$ en fonction de v, p comme variables indépendantes, et que je voulusse poser

$$\frac{1}{r(t,u)} = \varphi(v,p),$$

je me trouverais conduit à satisfaire à l'équation

$$\frac{du}{dv}\frac{dt}{dp} - \frac{du}{dp}\frac{dt}{dv} = s(v, p),$$

puis, de la simple comparaison de cette équation avec la précédente,

$$\frac{dp}{dt}\frac{dv}{du} - \frac{dp}{du}\frac{dv}{dt} = r(t, u),$$

je conclus que la solution demandée se réduirait à prendre l'un des groupes (q), (a), (r), ou (q_1), (a_1), (r_1), ou (q_2), (a_2), (r_2), ou (q_3), (a_3), (r_3), et à faire alterner respectivement p avec u, v avec t, r avec s.

Ainsi, par exemple, en supposant que je veuille me servir du groupe (r), je commencerai par déterminer l'intégrale seconde

$$S(v, p) = \int\int s(v, p)\, dv\, dp,$$

puis je poserai

$$(s)\quad \begin{cases} (s) & \dfrac{dA(t, v)}{dt} = -\dfrac{dQ(t, p)}{dt} = u, \\ (s\ bis) & \dfrac{dA(t, v)}{dt} + \dfrac{dQ(t, p)}{dt} = 0, \\ (s'') & S = A(t, v) + Q(t, p), \end{cases}$$

et le problème se trouvera résolu, en observant toutefois que les fonctions A, Q de ces nouvelles formules seront des quantités de l'espèce $\int u\, dt$.

Avec le groupe (r_1) je résoudrai le même problème, en posant

$$(s_1)\quad \begin{cases} (s_1) & \dfrac{dA_1(u, v)}{du} = -\dfrac{dQ_1(u, p)}{du} = -t, \\ (s_1\ bis) & \dfrac{dA_1(u, v)}{du} + \dfrac{dQ_1(u, p)}{du} = 0, \\ (s''_1) & S = A_1(u, v) + Q_1(u, p), \end{cases}$$

et les fonctions A_1, Q_1 seront des quantités de l'espèce $\int t\, du$.

On aura, en même temps,

$$A_1 = A - tu = A - t\frac{dA(t, v)}{dt},$$

$$Q_1 = Q + tu = Q - t\frac{dQ(t, p)}{dt},$$

ou bien

$$A = A_1 + tu = A_1 - u\frac{dA_1(u, v)}{du},$$

$$Q = Q_1 - tu = Q_1 - u\frac{dQ(u, p)}{du},$$

et rien n'empêcherait de faire un usage analogue des groupes $\{q\}$, $\{a\}$, ou $\{q_1\}$, $\{a_1\}$, ou $\{q_2\}$, $\{a_2\}$, ou $\{q_3\}$, $\{a_3\}$.

Les équations (A) équivaudront, d'ailleurs, à la relation unique

$$p\,dv = \frac{dA}{du}\,du - \frac{dQ}{dt}\,dt,$$

ou bien à la relation équivalente

$$v\,dp = -\frac{dA_1}{du}\,du + \frac{dQ_1}{dt}\,dt,$$

ainsi que cela a été démontré depuis longtemps par les formules (17), (21) et (21 *bis*), et, par conséquent, les mêmes procédés de calcul feront connaître encore la solution complète d'une telle équation aux différentielles partielles, pourvu que, parmi les expressions données, deux des trois quantités soient respectivement des espèces

$$A(v, t), \quad Q(v, u), \quad R(t, u),$$

ou bien

$$A_1(p, t), \quad Q_1(p, u), \quad R(t, u),$$

ou, encore, des espèces

$$A(t, v), \quad Q(t, p), \quad S(v, p),$$

ou bien

$$A_1(u, v), \quad Q_1(u, p), \quad S(v, p).$$

S'il arrivait, par exemple, que les fonctions A, Q ou A_1, Q_1 fussent données en t, u chacune, alors même que v, p n'y entreraient pas et que l'on dût avoir

$$A = \alpha(t, u), \quad Q = \beta(t, u),$$

la difficulté serait d'intégrer l'équation

$$p\,dv = \frac{d\alpha(t, u)}{du}\,du - \frac{d\beta(t, u)}{dt}\,dt,$$

et cette difficulté consisterait, au fond, à savoir trouver le facteur $\frac{1}{p}$ par lequel on devrait multiplier l'équation proposée pour en faire une différentielle exacte.

La solution du problème pourrait bien être représentée alors par l'un quelconque des groupes $\{q\}$, $\{a\}$, $\{r\}$, ou $\{q_1\}$, $\{a_1\}$, $\{r_1\}$, ou $\{q_2\}$, $\{a_2\}$, $\{r_2\}$, ou $\{q_3\}$, $\{a_3\}$, $\{r_3\}$, comme aussi par l'un des groupes $\ldots, \{s\}$, ou $\ldots, \{s_1\}$, ou $\ldots, \{s_2\}$, ou $\ldots, \{s_3\}$; mais il y aurait une condition restrictive à y joindre, et cette condition ne serait pas assez simple pour que l'on parvînt à satisfaire, en outre, sous forme explicite aux relations

$$A(v, t) = \alpha(t, u),$$
$$Q(v, u) = \beta(t, u).$$

On ne doit pas voir en cela une lacune dans ma théorie des effets dynamiques de la

chaleur; car, dans cette théorie, les recherches des physiciens tendront toujours à trouver directement la loi des courbes $\varphi(v, p) = t$ en fonction des seules variables v, p, t et non en fonction de t, u; par suite, mes formules (q), (a), (r), ou (q_1), (a_1), (r_1) seront suffisantes pour représenter explicitement les propriétés dynamiques et calorifiques d'un fluide élastique, de telle sorte que toute loi expérimentale pourra à l'instant même être soumise au calcul et développée algébriquement dans toutes ses conséquences logiques.

On a vu, en effet, comment j'ai établi successivement jusqu'ici toute la théorie des fluides élastiques :

1°. En admettant que l'on devait avoir

$$Q = \text{fonction}(t)$$

pour les gaz comme pour les vapeurs.

2°. En joignant à l'hypothèse

$$Q = \text{fonction}(t)$$

la loi de Mariotte et même la relation plus générale

$$p\omega(v) = a(t),$$

de laquelle dépendent, comme cas particuliers, d'une part, la relation

$$vp = a(t)$$

de la loi de Mariotte pour les gaz permanents, et, d'autre part, la relation

$$p = \Omega(t)$$

des vapeurs.

3°. En rejetant l'hypothèse

$$Q = \text{fonction}(t),$$

mais en conservant la relation

$$p\omega(v) = a(t),$$

et en démontrant que pour les vapeurs la fonction $f(t, u)$ sera nécessairement de l'espèce $\gamma(t)\varepsilon(u)$, puis, en supposant que la fonction $f(t, u)$ ne devra pas cesser d'être de l'espèce $\gamma(t)\varepsilon(u)$ quand on voudra passer de la théorie des vapeurs à celle des gaz permanents. En développant, enfin, la théorie à ce point de vue jusque dans ses dernières conséquences logiques avec la relation de Mariotte

$$vp = a(t).$$

4°. En rejetant à la fois la loi de Mariotte et la relation plus générale

$$p\omega(v) = a(t),$$

mais en continuant de supposer que pour les gaz permanents la fonction $f(t, u)$ ne devait pas cesser d'être de l'espèce $\gamma(t)\varepsilon(u)$ comme pour les vapeurs, et que, par suite, on ne devait pas cesser d'avoir

$$\Gamma(t) f(t, u) = \frac{d\mathrm{R}(t, u)}{du} = \lambda(t).$$

5°. En franchissant, enfin, les dernières difficultés du sujet, qui consistent non-seulement à ne rien préjuger de la nature des courbes $\varphi(v, p) = t$, mais encore à prendre la fonction calorifique $R(t, u)$ d'une espèce quelconque en fonction des variables t, u, ce qui m'a conduit d'abord aux équations (q), (q'), (q'') et m'a permis de résoudre le problème, alors même qu'on me donnerait l'équation des courbes φ et l'expression de l'aire A de ces courbes sous les formes générales

$$\varphi_1(v, p, t) = 0, \quad A = A_1(v, p, t);$$

ce qui m'a conduit ensuite à une deuxième solution représentée par les équations (a), (a'), (a''), puis à une troisième solution représentée par les équations (r), $(r\ bis)$, (r''), et, enfin, à trois solutions analogues en v au lieu de p, représentées par les groupes d'équations (q_1), (a_1), (r_1); ce qui, en dernier lieu, m'a permis de formuler les intégrales générales de différentes équations aux différences partielles dont les deux principales sont

$$\frac{dp}{dt}\frac{dv}{du} - \frac{dp}{du}\frac{dv}{dt} = F(t, u),$$

$$p\,dv = \frac{dA}{du}\,du - \frac{dQ}{dt}\,dt,$$

pourvu que les expressions données de deux des trois fonctions A, Q, R soient respectivement des espèces

$$A(v, t), \quad Q(t, u), \quad R(t, u).$$

CHAPITRE IX.

Théorie complète des vapeurs.

Ce qui m'engage à donner séparément et d'une manière bien complète la théorie des vapeurs, c'est-à-dire la théorie d'un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, c'est que, dans ce cas-là, il n'y a aucune incertitude ni sur la nature des courbes $\varphi(v, p) = t$ ni sur l'espèce algébrique de la fonction $f(t, u)$, ainsi que je l'ai fait voir déjà et que je le ferai voir de nouveau tout à l'heure.

Je reporte donc mon attention sur la *fig.* 2, et j'observe que pendant la durée de l'ébullition d'un liquide par suite d'une addition de chaleur, comme aussi pendant la durée de la condensation d'une vapeur par suite d'une soustraction de chaleur, il y aura une relation parfaitement déterminée

$$p = \Omega(t)$$

entre la pression p et la température t du mélange.

D'après une telle équation, les courbes d'espèce $\varphi(v, p) = t$ deviendront des lignes droites parallèles à l'axe Ov, et je pourrais en conclure, de prime abord, que l'aire A de chacune de ces courbes supposées prolongées jusqu'à l'axe Op (ce qu'il est toujours

permis de concevoir au point de vue purement algébrique des relations du sujet, sera égale au produit vp.

J'aurais donc à faire $A = vp$ dans les équations fondamentales

$$dQ = \Gamma(t) f(t, u)\, du - p\, dv = \frac{dR}{du}\, du - p\, dv,$$

$$dA = \frac{d}{dt}\{\Gamma(t) F(t, u)\}\, dt + p\, dv = \frac{dR}{dt}\, dt + p\, dv,$$

et, par suite, la seconde d'entre elles se réduirait à

$$v\frac{dp}{dt} = \frac{dR}{dt} = \frac{d}{dt}\{\Gamma(t)\Gamma(t, u)\};$$

puis, en y joignant la relation finie

$$Q = R(t, u) - A = \Gamma(t) F(t, u) - vp.$$

j'aurais toutes les conditions au point de vue purement algébrique de la question, quelle que pût être la nature de la fonction $\Gamma(t) F(t, u)$.

Mais, au point de vue physique des choses, je trouverai plus que cela, et, pour ne pas subordonner les conséquences qui en dépendront à mes procédés généraux d'intégration, je préfère ne me servir d'abord que de la relation

$$dQ = \Gamma(t) f(t, u)\, du - p\, dv.$$

Le plus simple alors sera de prendre v, t comme variables indépendantes et de considérer la quantité Q comme une fonction inconnue de v, t, ce qui m'obligera de poser

$$dQ(v, t) = \left(\Gamma(t) f(t, u)\frac{du}{dv} - p\right) dv + \Gamma(t) f(t, u)\frac{du}{dt}\, dt.$$

2 et, par suite,

$$\Gamma(t) f(t, u)\frac{du}{dv} = p + \frac{dQ(v, t)}{dv},$$

$$\Gamma(t) f(t, u)\frac{du}{dt} = \frac{dQ(v, t)}{dt}.$$

puis, en éliminant Q, je retrouverai la condition représentée dès l'origine par l'équation (13), et, par une transformation de celle-là, ou bien par l'élimination des dérivées de u en v, t entre les équations précédentes, je trouverai la condition (13 *bis*) qui est

3 $$\frac{\Gamma(t) f(t, u)}{\frac{d}{dt}\{\Gamma(t) f(t, u)\}} = \frac{p + \frac{dQ(v, t)}{dv}}{\frac{dp}{dt}}.$$

La quantité de chaleur nécessaire pour faire aller le mélange d'un point v, t à un

autre point $v + dv$, $t + dt$ sera en principe

$$dq = f(t, u)\,du = f(t, u)\frac{du}{dv}dv + f(t, u)\frac{du}{dt}dt,$$

(4) et j'aurai

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t)\,f(t, u)\,du = \left(p + \frac{dQ(v, t)}{dv}\right)dv + \frac{dQ(v, t)}{dt}\,dt.$$

En y faisant d'abord $dt = 0$, je trouverai la quantité de chaleur latente pour une augmentation de volume égale à 1, par la formule

$$\Gamma(t)\frac{dq_2}{dv_2} = p + \frac{dQ(v, t)}{dv} = \Omega(t) + \frac{dQ(v, t)}{dv}, \tag{5}$$

puis, en faisant $dv = 0$, j'aurai la quantité de chaleur spécifique à volume constant c_1, par la formule

$$c_1\Gamma(t) = \frac{dQ(v, t)}{dt}. \tag{6}$$

Cela posé, si je désigne par :

w le volume d'une masse liquide à sa température d'ébullition t sous la pression correspondante $p = \Omega(t)$;

W le volume de la même masse complétement transformée en vapeur;

x la fraction de la masse entière actuellement transformée en vapeur;

v le volume du mélange;

J'aurai manifestement

$$v = (1 - x)w + xW = w + (W - w)x. \tag{7}$$

La fraction x pouvant varier de 0 à 1, le volume v du mélange variera de l'une à l'autre des limites

$$v_0 = w, \quad v_1 = W. \tag{7 bis}$$

Les formules (7 *bis*) seront les équations en v, t des courbes indéfinies $i_0 i i'$, $I_0 I I'$, *fig.* 2, entre lesquelles tombera nécessairement le volume v du mélange.

En deçà de la courbe $i_0 i i'$ sera l'état complétement liquide avec des courbes φ, ψ d'une tout autre espèce, et, au delà de la courbe $I_0 I I'$, sera l'état complétement gazeux, aussi avec des courbes φ, ψ d'une autre espèce.

La fraction x pouvant être supposée constante de haut en bas sur la *fig.* 2, l'équation (7) représentera un nombre illimité de courbes de même nature que celles des équations (7 *bis*).

On sait que le volume w d'un liquide augmente peu avec la température d'ébullition t, et, par suite, avec la pression p de la formule

$$p = \Omega(t),$$

tandis que le volume W de la vapeur varie à peu près en raison inverse de p.

Il s'ensuit que, à une hauteur suffisamment grande sur la *fig.* 2, on aura peut-être $W = \omega$, et que toutes les courbes des équations (7), (7 *bis*) se couperont en un même point à une telle hauteur; mais, à des hauteurs moindres, l'intervalle $W - \omega$ sera essentiellement positif et d'une largeur excessivement grande aux approches de l'axe Ov.

Le volume v du mélange pouvant être fixé arbitrairement à une température donnée t, entre les limites (7 *bis*), on tirera de la formule (7)

$$x = \frac{v - \omega}{W - \omega}, \tag{8}$$

pour la fraction de la masse entière qui se trouvera dans le volume donné v à l'état de vapeur, et la différence

$$1 - x = \frac{W - v}{W - \omega} \tag{8 bis}$$

représentera la fraction de masse correspondante qui se trouvera à l'état liquide dans le volume v.

Si je désigne à présent par L la quantité de chaleur latente d'un volume de vapeur W, et par l la somme de chaleur nécessaire pour transformer en vapeur une fraction x de la masse entière déjà amenée à sa température d'ébullition t, j'aurai

$$l = Lx,$$

et, en y substituant la formule (8),

$$l = Lx = \frac{L(v - \omega)}{W - \omega}. \tag{9}$$

Pour faire une autre quantité de vapeur x_1, sous un autre volume v_1, à la même température t, j'aurai

$$l_1 = Lx = \frac{L(v_1 - \omega)}{W - \omega}. \tag{9 bis}$$

et, par suite, en soustrayant ces deux formules l'une de l'autre,

$$\left\{\begin{array}{l} l_1 - l = L(x_1 - x) = \dfrac{L(v_1 - v)}{W - \omega}, \\ \text{puis} \\ \dfrac{l_1 - l}{v_1 - v} = \dfrac{L}{W - \omega}. \end{array}\right. \tag{9 ter}$$

Ainsi le rapport de la chaleur latente $l_1 - l$ à l'augmentation correspondante $v_1 - v$ du volume du mélange sera égal au nombre

$$\frac{L}{W - \omega},$$

qui variera avec t seulement.

Ce résultat, auquel j'arrive par la considération immédiate du sujet au point de vue physique des choses, est capital, car maintenant l'équation (5) devra se réduire à

$$\frac{\Gamma(t)\,L}{W-w} = \Omega(t) + \frac{dQ(v,t)}{dv},$$

et si, pour abréger, je fais

$$\frac{\Gamma(t)\,L}{W-w} - \Omega(t) = b(t),$$

il faudra que j'aie

(10) $$\frac{dQ(v,t)}{dv} = b(t),$$

d'où, en intégrant,

$$Q(v,t) = b(t)\,v + \beta(t),$$

puis, en différentiant par rapport à t,

$$\frac{dQ(v,t)}{dt} = b'(t)\,v + \beta'(t),$$

ce qui servira à faire trouver la chaleur spécifique à volume constant c_1 de la formule (6).

Mais l'essentiel est que la condition (3) se changera en

(11) $$\frac{\Gamma(t)\,F(t,u)}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t)\,F(t,u)]}\,\frac{dp}{dt} = \Omega(t) + b(t) = \frac{\Gamma(t)\,L}{W-w}.$$

J'arriverai exactement au même résultat, en recourant aux expressions connues de la chaleur latente dont je me suis servi depuis longtemps, et, notamment, quand il me plaisait de prendre v, p comme variables indépendantes, d'après les formules (O).

Mon ancien système de calculs en v, p me conduirait, au reste, tout naturellement à faire usage maintenant de v, t comme variables indépendantes, puisque p est devenu fonction de t.

Ainsi, pour un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, on aura nécessairement

$$\frac{\Gamma(t)\,f(t,u)}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t)\,f(t,u)]} = \text{fonction}(t) = \frac{1}{g(t)}.$$

et, par suite, en faisant usage de la notation auxiliaire

$$\Gamma(t)\,f(t,u) = e^{\omega(t,u)},$$

on devra avoir

$$\frac{d}{dt}\omega(t,u) = g(t);$$

d'où

$$\omega(t, u) = \int g(t)\,dt + h(u) = g_1(t) + h(u),$$

puis

$$f(t, u) = \frac{1}{\Gamma(t)} e^{\omega(t, u)} = \frac{1}{\Gamma(t)} e^{g_1(t)} . e^{h(u)} = \gamma(t)\,\varepsilon(u).$$

Donc la fonction $f(t, u)$ sera de l'espèce $\gamma(t)\,\varepsilon(u)$. D'autre part, une relation de la forme

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t) f(t, u)\,du = \Gamma(t)\gamma(t)\,\varepsilon(u)\,du$$

ne sera ni plus ni moins générale que l'expression plus simple

$$(12) \qquad \Gamma(t)\,dq = \Gamma(t) f(t, u)\,du = \Gamma(t)\gamma(t)\,du = k(t)\,du,$$

dont je me servirai définitivement dans ce qui va suivre.

L'équation (11) se changera, par conséquent, en la relation fondamentale que voici,

$$(13) \qquad \frac{k(t)}{k'(t)}\Omega'(t) = \frac{\Gamma(t)\,\mathrm{L}}{\mathrm{W} - \omega} = \Omega(t) + b(t),$$

et les formules (10) deviendront

$$(14) \quad \begin{cases} b(t) = \dfrac{k(t)\,\Omega'(t) - \Omega(t)\,k'(t)}{k'(t)}, \\[2ex] b'(t) = k(t)\,\dfrac{k'(t)\,\Omega''(t) - \Omega'(t)\,k''(t)}{k'(t)^2} = k(t)\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\Omega'(t)}{k'(t)}\right), \\[2ex] \mathrm{Q} = b(t)\,v + \beta(t) = \dfrac{k(t)\,\Omega'(t) - \Omega(t)\,k'(t)}{k'(t)}\,v + \beta(t). \end{cases}$$

L'équation (4) deviendra

$$(15) \quad \begin{cases} \Gamma(t)\,dq = k(t)\,du = [\Omega(t) + b(t)]\,dv + [b'(t)\,v + \beta'(t)]\,dt \\[2ex] \qquad\qquad = \dfrac{k(t)\,\Omega'(t)}{k'(t)}\,dv + k(t)\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\Omega'(t)}{k'(t)}\right) v\,dt + \beta'(t)\,dt, \end{cases}$$

puis, en la divisant par $k(t)$, on trouvera

$$du = \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,dv + v\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\right) dt + \frac{\beta'(t)}{k(t)}\,dt,$$

et, par voie d'intégration, on en conclura

$$(16) \qquad u = \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,v + \int \frac{\beta'(t)}{k(t)}\,dt.$$

Ce sera l'équation générale des courbes $\psi(v, p) = u$ en fonction de v, t comme variables indépendantes, et le problème se trouvera exactement résolu, sans que j'aie eu à faire usage de la relation finie

$$\mathrm{Q} = \mathrm{R}(t, u) - \mathrm{A} - \Gamma(t)\,\mathrm{F}(t, u) - vp.$$

En supposant, néanmoins, que je veuille me servir de cette relation, j'en conclurai

$$\Gamma(t)\,F(t, u) = vp + Q = v\Omega(t) + Q = \frac{k(t)\,\Omega'(t)}{k'(t)}\,v + \varphi(t),$$

puis, en y substituant la valeur de v tirée de l'équation (16),

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &\Gamma(t)\,F(t, u) = k(t)\,u + \varphi(t) - k(t)\int\frac{\varphi'(t)}{k(t)}\,dt,\\ &\text{et, en différentiant par rapport à } u,\\ &\Gamma(t)\,f(t, u) = k(t)\,du,\end{aligned}\right.$$

ce qui me ramènera justement à la formule (12), de laquelle j'étais parti pour trouver les formules (13), (14), (15) et (16).

Les formules (12), (13), (14), (15), (16) et (17) formeront ainsi le cercle entier de la théorie dans sa plus grande généralité, et si je voulais pénétrer dans ce cercle à l'aide de mes procédés généraux d'intégration, j'y réussirais tout aussi facilement.

Je suppose, par exemple, que l'on me propose de faire usage des formules (r), $(r\ bis)$, (r'') et de celles qui en dépendent.

Je regarderai alors la quantité Q comme une fonction inconnue de v, u, et de prime abord, à cause de la relation

$$p = \Omega(t),$$

je ferai

$$A = vp = v\Omega(t),$$

d'où

$$\frac{dA}{dv} = \Omega(t),$$

$$\frac{dA}{dt} = v\Omega'(t),$$

$$\frac{d^2A}{dv^2} = 0,$$

$$\frac{d^2A}{dv\,dt} = \Omega'(t),$$

$$\frac{d^2A}{dt^2} = v\Omega''(t);$$

j'en conclurai

$$\mathfrak{S}_0 = 0,$$

$$\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{\Omega'(t)},$$

$$q_0 \Gamma(t) = -\frac{\dfrac{dQ(v,u)}{du}\,\dfrac{d^2Q(v,u)}{dv^2}}{\dfrac{d^2Q(v,u)}{dv\,du}};$$

$$q_1 \Gamma(t) = -\frac{\dfrac{dQ(v,u)}{du}}{\dfrac{d^2Q(v,u)}{dv\,du}}.$$

puis,

$$c_0 \Gamma(t) = \frac{q_0 \Gamma(t)}{\sigma_0} = \infty,$$

$$c_1 \Gamma(t) = \frac{q_1 \Gamma(t)}{\sigma_1} = -\frac{\dfrac{dQ(v,u)}{du}\,\Omega'(t)}{\dfrac{d^2Q(v,u)}{dv\,du}},$$

et, pour les expressions de la chaleur latente,

$$\frac{dq_2}{dv_2}\Gamma(t) = -\frac{\dfrac{dQ(v,u)}{du}\,\dfrac{d^2Q(v,u)}{dv^2}}{\dfrac{d^2Q(v,u)}{dv\,du}},$$

$$\frac{dq_2}{dp_2}\Gamma(t) = \infty.$$

Mais il est démontré par les formules (9 *ter*) que la quantité de chaleur latente par unité de volume doit être égale à la quantité

$$\frac{L}{W-w}$$

qui varie avec t seulement.

Donc, il faudra que l'on ait

$$\frac{\dfrac{dQ(v,u)}{du}\,\dfrac{d^2Q(v,u)}{dv^2}}{\dfrac{d^2Q(v,u)}{dv\,du}} = \frac{\Gamma(t)L}{W-w} = \text{fonction } t.$$

Cette équation ne doit pas être directement intégrable, car si je me proposais d'éliminer t entre les équations déjà connues de Q, u, d'après les formules (14) et (16), je ne saurais représenter le résultat de l'élimination sous forme finie en v, u; mais la difficulté pourra être tournée au moyen des relations générales qu'il y a entre les dérivées secondes des fonctions A, Q, R; car, du moment où l'on devra avoir

$$A = vp = \Omega(t).$$

je trouverai, d'après les relations connues de ces dérivées secondes,

$$\frac{d^2 R(t, u)}{dt\,du} = -\frac{\Omega'(t)\dfrac{d^2 Q(v, u)}{dv\,du}}{\dfrac{d^2 Q(v, u)}{dv^2}}.$$

J'aurai, en même temps,

$$\frac{dQ(v, u)}{du} = \frac{dR(t, u)}{du},$$

et, par suite, la condition à remplir se transformera en

$$\frac{\Omega'(t)\dfrac{dR(t, u)}{du}}{\dfrac{d^2 R(t, u)}{dt\,du}} = \frac{LT(t)}{W - u}.$$

c'est-à-dire que je serai ramené identiquement à la formule (11), et, par suite, à la formule (12), de laquelle je suis parvenu à trier tout ce qui précède jusqu'à la formule (17) inclusivement.

Mais, au point de vue actuel de la question, la marche la plus naturelle du calcul sera différente et consistera à intégrer d'abord l'équation (12) par rapport à u, ce qui fera trouver

$$(17\ bis)\qquad R(t, u) = V(t)F(t, u) = k(t)u - \alpha(t).$$

En différentiant ensuite l'équation (17 *bis*) par rapport à t, on aura

$$\frac{dR(t, u)}{dt} = k'(t)u - \alpha'(t),$$

et, par suite, la première des équations (r') fera trouver

$$\Omega'(t)v = k'(t)u - \alpha'(t),$$

d'où l'on conclura

$$= \frac{k'(t)}{\Omega'(t)}u - \frac{\alpha'(t)}{\Omega'(t)},$$

ou bien

$$(16\ bis)\qquad u = \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}v + \frac{\alpha'(t)}{k'(t)},$$

en place de la formule (16) avec laquelle celle-ci se confondra en effet quand on donnera une valeur convenable à la fonction arbitraire $\alpha(t)$.

On aura recours ensuite à la formule (r''), ou plutôt à la formule (q''), pour trouver

$$Q = R - A = k(t)u - \alpha(t) - \Omega(t)v,$$

et, quand on y substituera la valeur précédente de u en v, t, puis, inversement, la

valeur de v en u, t, on aura les deux relations parfaitement équivalentes

$$(14\ bis)\quad \begin{cases} Q = \dfrac{k(t)\,\Omega'(t) - \Omega(t)\,k'(t)}{k'(t)}\,v + \dfrac{k(t)\,\alpha'(t) - \alpha(t)\,k'(t)}{k'(t)}, \\ Q = \dfrac{k(t)\,\Omega'(t) - \Omega(t)\,k'(t)}{\Omega'(t)}\,u + \dfrac{\Omega(t)\,\alpha'(t) - \alpha(t)\,\Omega'(t)}{\Omega'(t)}, \end{cases}$$

dont la première se confondra avec la dernière des formules (14) quand on assujettira la fonction arbitraire $\alpha(t)$ à la condition

$$\beta(t) = \frac{k(t)\,\alpha'(t) - \alpha(t)\,k'(t)}{k'(t)}.$$

De cette condition on tirera ensuite

$$\beta'(t) = k(t)\,\frac{k'(t)\,\alpha(t) - \alpha'(t)\,k'(t)}{k'(t)^2} = k(t)\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\alpha'(t)}{k'(t)}\right)$$

et

$$\int \frac{\beta'(t)}{k(t)}\,dt = \frac{\alpha'(t)}{k'(t)},$$

puis

$$\beta(t) - k(t)\int \frac{\beta'(t)}{k(t)}\,dt = -\alpha(t),$$

et, par conséquent, les formules (16 *bis*), (17 *bis*) se confondront en même temps avec les formules (16) et (17).

La condition fondamentale de la théorie sera enfin l'équation (13), et, du moment où cette condition sera remplie, on pourra calculer la quantité de chaleur nécessaire pour aller d'un point v, t à un autre point infiniment voisin $v + dv$, $t + dt$ au moyen de la première des formules (4).

De la seconde formule (4), ou plutôt de la relation initiale

$$dQ = \Gamma(t, f(t, u))\,du - p\,dv,$$

on conclura, tout à l'entour d'une ligne fermée quelconque s,

$$0 = \int_0^s \Gamma(t, f(t, u))\,du - \int_0^s p\,dv,$$

et, par suite, on aura, pour l'expression de l'aire S délimitée par la courbe fermée s,

$$S = \int_0^s p\,dv = \int_0^s \Gamma(t, f(t, u))\,du = \int_0^s \Gamma(t)\,dq - \int_0^s \Gamma(t)\,\gamma(t)\,du = \int_0^s k(t)\,du;$$

puis, en intégrant par parties, en ne perdant pas de vue que tout à l'entour d'une courbe fermée s la limite finale de l'intégration coïncidera avec la limite initiale, on aura encore

$$S = \int_0^s k(t)\,du = \int_0^s u\,k'(t)\,dt = -\int_0^s v\,\Omega'(t)\,dt = -\int_0^s v\,dp = +\int_0^s p\,dv.$$

et le résultat sera le même que si l'on partait de la relation complémentaire

$$dA = \frac{d}{dt}\{\Gamma(t)\,F(t, u)\}\,dt + p\,dv,$$

au moyen de laquelle on trouvera directement, tout à l'entour d'une ligne fermée s,

$$S = \int_0^s p\,dv = -\int_0^s \frac{dR(t, u)}{dt}\,dt = -\int_0^s \{k'(t)\,u - \alpha'(t)\}\,dt = -\int_0^s u k'(t)\,dt,$$

comme tout à l'heure.

En résumé, la théorie des vapeurs, c'est-à-dire la théorie d'un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, se réduira aux formules générales que voici :

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned}
p &= \Omega(t),\\
\frac{k(t)}{k'(t)}\,\Omega'(t) &= \frac{\Gamma(t)\,L}{W - w},\\
u &= \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,v + \frac{\alpha'(t)}{k'(t)},\\
v &= \frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\,u - \frac{\alpha'(t)}{\Omega'(t)},\\
k(t) &= \Gamma(t)\,\gamma(t),\\
R &= \Gamma(t)\,F(t, u) = k(t)\,u - \alpha(t) = \ldots\\
A &= vp = v\,\Omega(t),\\
Q &= R - A = k(t)\,u - \Omega(t)\,v - \alpha(t) = \ldots\\
dq &= f(t, u)\,du = \gamma(t)\,du = \gamma(t)\,d\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,v + \frac{\alpha'(t)}{k'(t)}\right).
\end{aligned}\right.$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$\Gamma(t)\,dq = \Gamma(t)\,\gamma(t)\,du = k(t)\,du = k(t)\,d\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,v + \frac{\alpha'(t)}{k'(t)}\right).$$

et, pour l'aire S délimitée par une courbe fermée s,

$$= \int_0^s \Gamma(t)\,f(t, u)\,du = \int_0^s \Gamma(t)\,dq = \int_0^s \Gamma(t)\,\gamma(t)\,du$$

$$= \int_0^s k(t)\,du = \int_0^s k(t)\,d\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,v\right) = \ldots$$

ou bien

$$S = \int^s k(t)\,du = -\int_0^s u k'(t)\,dt = \int_0^s v\,\Omega'(t)\,dt$$

$$= -\int_0^s v\,dp = +\int_0^s p\,dv.$$

Ces formules ne seront d'ailleurs applicables qu'entre les limites

$$v = \omega, \quad v = W,$$

et, de toute manière, il faudra que l'on parvienne à déterminer la fonction arbitraire $\varphi(t)$ qui s'y trouve.

Je porte donc mon attention sur l'expression du produit $\Gamma(t)\,dq$, et j'en tire

$$dq = \frac{k(t)}{\Gamma(t)}\,du = \frac{k(t)}{\Gamma(t)}\,d\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}v + \frac{\varphi'(t)}{k'(t)}\right) = \frac{k(t)}{\Gamma(t)}\,d\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}v\right) + \frac{k(t)}{\Gamma(t)}\frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'(t)}{k'(t)}\right)dt$$

$$= \frac{k(t)}{\Gamma(t)}\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,dv + \frac{k(t)}{\Gamma(t)}\left\{v\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'(t)}{k'(t)}\right)\right\}dt$$

En y faisant d'abord $dt = 0$, il me reste, pour l'expression de la chaleur latente, d'un point v, t à un autre point $v + dv$, à la même température t,

$$dq_1 = dl = \frac{k(t)}{\Gamma(t)}\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,dv,$$

et, en vertu de la seconde des formules (18), je trouve

$$dq_1 = dl = \frac{L\,dv}{W - \omega},$$

ce qui est parfaitement d'accord avec les équations (9), (9 *bis*), (9 *ter*).

Je fais ensuite $dv = 0$, et je trouve, pour l'expression de la chaleur spécifique à volume constant c_1, l'expression

$$c_1 = \frac{k(t)}{\Gamma(t)}\left\{v\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{\varphi'(t)}{k'(t)}\right)\right\}.$$

Mais je puis établir une relation plus générale dont celle-là ne sera qu'un cas particulier.

Je désigne par $c(t)$ une fonction de la température qui soit telle que la différentielle $c(t)\,dt$ de cette fonction doive représenter la quantité de chaleur nécessaire pour faire aller le volume v du mélange le long d'une courbe quelconque supposée représentée par les deux équations

$$v = \xi(t),$$
$$p = \Omega(t).$$

J'aurai dans ce cas-là, en chaque point de la courbe donnée,

$$u = \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\xi(t) + \frac{\varphi'(t)}{k'(t)}.$$

Et d'un point à un autre de la courbe donnée,

$$du = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\xi(t) + \frac{\varphi'(t)}{k'(t)}\right)dt,$$

puis

$$dq = \gamma(t)\,du = \frac{k(t)}{\Gamma(t)}\,du = \frac{k(t)}{\Gamma(t)}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,\varepsilon(t) + \frac{\alpha'(t)}{k'(t)}\right)dt,$$

et cette valeur de dq sera précisément la quantité $c'(t)\,dt$.

Donc, j'aurai pour la quantité de chaleur spécifique $c'(t)$ dans une direction quelconque non parallèle à l'axe Ov,

$$c'(t) = \frac{k(t)}{\Gamma(t)}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,\varepsilon(t) + \frac{\alpha'(t)}{k'(t)}\right),$$

puis, en multipliant cette formule par dt et en l'intégrant, j'aurai sous forme finie entre deux limites quelconques t_0, t_1, le long de la courbe donnée,

$$c(t_1) - c(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{k(t)}{\Gamma(t)}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,\varepsilon(t) + \frac{\alpha'(t)}{k'(t)}\right)dt.$$

Une telle manière d'intégrer réveillera naturellement la question déjà deux fois examinée, de savoir si la fonction universelle $\Gamma(t)$ doit être acceptée comme une quantité constante ou variable.

Je ne veux pas m'occuper une troisième fois de cette question ici, et sans me prononcer absolument ni pour ni contre, je conserverai la fonction $\Gamma(t)$ dont la présence ne me gênera réellement pas dans l'achèvement de mes calculs.

Cela convenu, je supposerai que, le long d'une courbe $v = \varepsilon(t)$ parfaitement connue, on soit parvenu à déterminer expérimentalement la fonction $c(t)$, et, par suite, sa dérivée $c'(t)$. Je me servirai alors de l'expression trouvée pour $c'(t)$ d'une manière inverse, et, après l'avoir mise d'abord sous la forme

$$\frac{\Gamma(t)\,c'(t)}{k(t)} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,\varepsilon(t) + \frac{\alpha'(t)}{k'(t)}\right),$$

je la multiplierai par dt et j'en tirerai par voie d'intégration

$$(19)\qquad \int \frac{\Gamma(t)\,c'(t)}{k(t)}\,dt = \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,\varepsilon(t) + \frac{\alpha'(t)}{k'(t)},$$

de telle sorte que, si les fonctions $\Omega(t)$, $k(t)$, $\Gamma(t)$ m'étaient connues, cette formule pourrait me servir à trouver la fonction $\alpha(t)$.

Or il y a sur la *fig.* 2 une courbe bien déterminée, le long de laquelle une pareille recherche de la fonction $\alpha(t)$ ne sera pas très-difficile à mettre à exécution : je veux parler de la courbe initiale $i_0 i i'$, dont l'équation est

$$v = w = \text{fonction}(t).$$

Je n'aurai qu'à remplacer la fonction arbitraire $\varepsilon(t)$ des formules précédentes par la fonction déterminée w, et ce que j'ai désigné généralement par $c(t)$ deviendra la quantité de chaleur sensible d'une masse liquide entretenue constamment à sa température d'ébullition le long de la courbe $i_0 i i'$, c'est-à-dire sous une pression p qui

augmentera progressivement avec t d'après la relation connue

$$p = \Omega(t).$$

Ce qu'on nomme habituellement la quantité de chaleur sensible d'un liquide, supposé amené à sa température d'ébullition, est une quantité analogue $c_1(t)$ que l'on trouve en échauffant le liquide sur une pression constante, du commencement à la fin de l'opération, au lieu que pour $c(t)$ la pression p devra varier d'après la relation

$$p = \Omega(t).$$

Pour faire voir très-clairement la distinction qu'il y a à faire entre les deux fonctions $c(t)$, $c_1(t)$, je porte mon attention sur la *fig.* 2, et j'y mène, par le point i, une courbe ih' de l'espèce $\varphi(v, p) =$ constante t pour une masse entièrement liquide. Une telle courbe d'espèce $\varphi(v, p) =$ constante t pour une masse entièrement liquide ne différera pas appreciablement d'une ligne droite ih' parallèle à l'axe Op, à cause de la compressibilité à peu près nulle des liquides à une température donnée.

Cela etant compris et la pression OP′ etant supposée égale à celle de l'atmosphère, j'observe que la fonction $c_1(t)$ représentera la quantité de chaleur nécessaire pour faire aller le volume v d'une masse liquide de h' en i' le long de la droite $h'i'$ parallèle à l'axe Ov sous la pression constante OP′, tandis que la fonction $c(t)$ représentera la quantité de chaleur nécessaire pour faire aller le volume v d'une masse liquide de i en i' le long de la courbe $i_0 i i'$ sous une pression croissante $p = \Omega(t)$.

La fonction $c_1(t)$ pourra dépendre en toute rigueur de la pression constante p' à laquelle elle se rapportera, tandis que la fonction $c(t)$ ne variera qu'avec (t).

Les deux fonctions $c(t)$, $c_1(t)$ ne devront pas être égales, car il me suffirait d'appliquer les principes généraux de ma théorie des effets dynamiques de la chaleur à une masse entièrement liquide et de designer spécialement par q la quantité de chaleur latente à peu près nulle que l'on parviendrait à exprimer de la masse liquide par une augmentation de pression de OP à OP′, le long de la ligne ih' sur la *fig.* 2, à une température constante t, pour que l'on dût avoir

$$\text{aire } ih'i' = \int_t^{t'} \Gamma(t)\, c'_1(t)\, dt - \int_t^{t'} \Gamma(t)\, c'(t)\, dt - q\,\Gamma(t').$$

Je trouverais, d'un autre autre côté, à la simple inspection de la *fig.* 2,

$$\text{aire } ih'i' = \int_t^{t'} v\,dp - v(p' - p) = p'(v' - v) - \int_t^{t'} p\,dv,$$

et, par suite, il me faudrait égaler les seconds membres de ces deux équations.

Quoi qu'il en soit, les recherches des physiciens ont appris que, pour de l'eau, la quantité $c_1(t)$, sous la pression constante de 1 atmosphère, est sensiblement proportionnelle à t de 0 à 100 degrés, et, par suite, on a été conduit à prendre comme unité calorifique la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 degré la température de 1 kilogramme d'eau sous la pression de 1 atmosphère; ou pour mieux dire, on a

pris pour unité calorique la centième partie de la quantité de chaleur nécessaire pour porter 1 kilogramme d'eau de sa température de solidification à sa température d'ébullition, sous une pression ambiante de 1 atmosphère.

Donc, pour 1 kilogramme d'eau on aura à très-peu près

$$c(t) = 1,$$

et la fonction $c(t)$ de mes raisonnements n'en différera peut-être pas sensiblement; mais je ne veux faire aucune hypothèse à ce sujet et je conserverai une fonction quelconque $c(t)$ dans mes formules.

Ainsi, en désignant par $\mathrm{H}(t)$ une fonction très-essentielle que l'on trouvera par voie d'intégration le long de la courbe $i_0 i i'$ sur la *fig.* 2, au moyen de la relation de principe

$$(20)\qquad \mathrm{H}(t) = \int \frac{\Gamma(t)\, c'(t)}{k(t)}\, dt = \int \frac{c'(t)}{\gamma(t)}\, dt,$$

on aura, en place de la formule (19),

$$(19\ bis)\qquad \mathrm{H}(t) = \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\, w + \frac{\alpha'(t)}{k'(t)},$$

et la troisième des formules (18) pourra être mise sous la forme

$$(21)\qquad u - \mathrm{H}(t) = \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,(v - w).$$

Quand on y remplacera t par t' sans changer u, on aura, à une autre hauteur,

$$p' = \Omega(t');$$

sur la *fig.* 2, le long d'une même courbe $\psi(v, p) =$ constante u,

$$(21\ bis)\qquad u - \mathrm{H}(t') = \frac{\Omega'(t')}{k'(t')}\,(v' - w'),$$

puis, en intervertissant les deux équations et en les retranchant l'une de l'autre, on trouvera

$$(21\ ter)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,(v - w) - \frac{\Omega'(t')}{k'(t')}\,(v' - w') = \mathrm{H}(t') - \mathrm{H}(t) \\ &\qquad = \int_t^{t'} \frac{d\mathrm{H}(t)}{dt}\, dt = \int_t^{t'} \frac{c'(t)}{\gamma(t)}\, dt. \end{aligned}\right.$$

Cela signifie, en langage ordinaire, que le produit de la différence $v - w$ par le rapport de la fonction $\Omega'(t)$ à la fonction $k'(t)$ devra, de bas en haut sur la *fig.* 2, éprouver une diminution égale à l'augmentation correspondante de la fonction $\mathrm{H}(t)$. Or la différence $v - w$ représentera la longueur $i\mathrm{B}$ d'une courbe quelconque $\mathrm{B}'\mathrm{B}u$ de l'espèce $\psi(v, p) =$ constante u, et la différence $v' - w'$ représentera la longueur correspondante $i'\mathrm{B}'$ de la même courbe $\mathrm{B}'\mathrm{B}u$; par conséquent, du moment où la courbe

initiale $i_0 i i'$ sera connue, l'équation (21 *ter*) donnera le moyen de tracer immédiatement toutes les courbes BB′, $B_1B'_1$, ... dans l'intervalle de deux droites horizontales PI, P′I′ entre les températures t, t', desquelles on connaîtra les accroissements progressifs de la fonction $H(t)$.

Les courbes BB′, $B_1B'_1$ seront ainsi parfaitement déterminées, même en deçà de la courbe $i_0 i i'$ et au delà de la courbe $I_0 I I'$, où elles ne pourront être tracées que fictivement et n'existeront réellement pas.

De plus, on voit que, lorsqu'on ne connaîtra que l'accroissement total de la fonction $H(t)$ de t à t', on trouvera par l'équation (21 *ter*) les vrais points d'intersection de toutes les courbes BB′, $B_1B'_1$, ... avec les deux horizontales $p = \Omega(t)$, $p' = \Omega(t')$ entre les températures t, t', desquelles on connaîtra l'accroissement total de la fonction $H(t)$, tandis que, dans l'intervalle et en dehors de l'intervalle de ces horizontales où l'on ne connaîtra pas l'accroissement de la fonction $H(t)$, la forme des courbes BB′, $B_1B'_1$, ... restera tout à fait indéterminée.

Cette manière de concevoir les choses serait encore parfaitement exacte dans le cas où la fonction $H(t)$ éprouverait une augmentation ou une diminution finie à une certaine valeur déterminée de la variable t.

Il sera d'ailleurs inutile d'augmenter d'une constante arbitraire l'intégrale du second membre de la formule (20), car une telle constante disparaîtrait toujours dans la différence $H(t') - H(t)$ du second membre de l'équation (21 *ter*) et n'influerait en rien sur la forme des courbes BB′, $B_1B'_1$, ...

Le second membre de l'équation (21) ayant une valeur parfaitement déterminée en chaque point de la *fig.* 2, il s'ensuit que l'on ne pourra augmenter la fonction $H(t)$ d'aucune constante sans être obligé d'augmenter la quantité variable u d'une constante égale.

Donc, l'addition d'une constante à la fonction $H(t)$ ne fera que déplacer l'origine des quantités u, ce qui sera de nulle importance dans le calcul.

La fonction $H(t)$ étant supposée exactement déterminée par l'équation (20), avec ou sans addition d'une constante, on conclura de l'équation (21), d'une part, le long de la courbe $i_0 i i'$,

$$(22)\quad \left\{\begin{array}{l} v = w, \quad u = H(t), \\ \text{et, d'autre part, le long de la courbe } I_0 I I', \\ v = W, \quad u = H(t) + \dfrac{\Omega'(t)}{k(t)}(W - w). \end{array}\right.$$

Ce seront les limites entre lesquelles tomberont toutes les autres valeurs des quantités v, u.

Le long de la courbe $i_0 i i'$, on aura

$$(22\ bis)\quad du = \frac{dH(t)}{dt}\,dt = \frac{W(t)(v'(t))}{k(t)}\,dt = \frac{v'(t)}{\eta(t)}\,dt,$$

et, tant que les fonctions $c'(t)$, $\gamma(t)$ seront positives toutes les deux, les courbes $\psi(v, p) =$ constante u se détacheront de la courbe $i_0 i i'$ de haut en bas sur la *fig.* 2.

Le long de la courbe $I_0 I I'$, on aura

$$(22\ ter)\qquad du = \left\{\frac{c'(t)}{\gamma(t)} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}(W - w)\right)\right\} dt$$

et, selon que cette quantité sera positive ou négative pour une valeur positive de dt, il arrivera que les courbes $\psi(v, p) = u$ se détacheront de la courbe $I_0 I I'$ de bas en haut ou de haut en bas sur la *fig.* 2. Si la même quantité était égale à zéro, la dernière des courbes ψ serait tangente à la courbe $I_0 I I'$, et, enfin, dans le cas où le second membre de l'équation (22 *ter*) serait égal à zéro pour toutes les valeurs de t, la dernière des courbes ψ se confondrait entièrement avec la courbe $I_0 I I'$.

De l'équation (21) je tire

$$(23)\qquad v - w = (u - H(t))\frac{k'(t)}{\Omega'(t)},$$

pour l'expression générale de la longueur iB d'une courbe donnée $B'Bu$, à une hauteur quelconque $p = \Omega(t)$ sur la *fig.* 2.

En remplaçant t par t', sans faire varier u, je trouve

$$(23\ bis)\qquad v' - w' = (u - H(t'))\frac{k'(t')}{\Omega'(t')},$$

pour la longueur $i'B'$ de la même courbe $B'Bu$ à une hauteur différente $p' = \Omega(t')$ sur la *fig.* 2.

En retranchant la formule (23 *bis*) de la formule (23), j'ai

$$(23\ ter)\qquad (v - v') + (w' - w) = (u - H(t'))\frac{k'(t)}{\Omega'(t)} - (u - H(t'))\frac{k'(t')}{\Omega'(t')},$$

et le second membre de l'équation (23 *ter*) représentera la somme des différences $v - v'$, $w' - w$, c'est-à-dire la somme des longueurs bB, ih sur la *fig.* 2.

La valeur de u ne devant pas être inférieure à $H(t')$, pour que le point B' ne tombe pas en deçà de la courbe $i_0 i i'$, je pose

$$(24)\qquad u = H(t') + u';$$

les formules (23), (23 *bis*), (23 *ter*) deviendront alors

$$(25)\qquad \begin{cases} v - w = (H(t') - H(t))\dfrac{k'(t)}{\Omega'(t)} + u'\dfrac{k'(t)}{\Omega'(t)}, \\ v' - w' = \qquad\qquad\qquad\qquad - u'\dfrac{k'(t')}{\Omega'(t')}, \\ (v - v') + (w' - w) = (H(t') - H(t))\dfrac{k'(t)}{\Omega'(t)} - u'\left(\dfrac{k'(t')}{\Omega'(t')} - \dfrac{k'(t)}{\Omega'(t)}\right). \end{cases}$$

et l'on en conclura

$$
(25\ bis)\quad \left\{
\begin{aligned}
\overline{ik} &= [\mathrm{H}(t') - \mathrm{H}(t)]\frac{k'(t)}{\Omega'(t)} = \frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\int_t^{t'} \frac{c'(t)}{\gamma(t)}\,dt,\\
\overline{k\mathrm{B}} &= u'\frac{k'(t)}{\Omega'(t)},\\
\overline{i'\mathrm{B}'} &= u'\frac{k'(t')}{\Omega'(t')},\\
\overline{k\mathrm{B}} - \overline{i'\mathrm{B}'} &= u'\left(\frac{k'(t)}{\Omega'(t)} - \frac{k'(t')}{\Omega'(t')}\right) = -u'\int_t^{t'} \frac{d}{dt}\left(\frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\right)dt,\\
hk &= [\mathrm{H}(t') - \mathrm{H}(t)]\frac{k'(t)}{\Omega'(t)} - (w' - w),\\
b\mathrm{B} &= [\mathrm{H}(t') - \mathrm{H}(t)]\frac{k'(t)}{\Omega'(t)} - (w' - w) - u'\left(\frac{k'(t')}{\Omega'(t')} - \frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\right),\\
b\mathrm{B} - \overline{hk} &= -u'\left(\frac{k'(t')}{\Omega'(t')} - \frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\right) = -u'\int_t^{t'} \frac{d}{dt}\left(\frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\right)dt.
\end{aligned}
\right.
$$

Il s'ensuit que la connaissance de la fonction $\mathrm{H}(t)$ ne sera nécessaire que pour la courbe initiale $i'k$, et que, du moment où la courbe $i'k$ sera connue, toutes les autres courbes de détente BB', $\mathrm{B}_1\mathrm{B}'_1$, ... se trouveront exactement déterminées quand on marquera de bas en haut sur la *fig.* 2 des longueurs $\mathrm{B}k$ proportionnellement au rapport des fonctions $k'(t)$, $\Omega'(t)$.

Il s'ensuit encore que, entre deux courbes données ki', BB', la distance $k\mathrm{B}$ ira en augmentant ou en diminuant de bas en haut sur la *fig.* 2, selon que le rapport de $k'(t)$ à $\Omega'(t)$ augmentera ou diminuera avec t.

La valeur de u' des formules (24), (25), (25 *bis*) pourra d'ailleurs augmenter jusqu à la limite où la dernière des courbes ψ passera par l'un des points I, I' selon que la quantité entre parenthèses dans le second membre de la formule (22 *ter*) sera positive ou négative.

De toute manière, on aura, au point I,

$$
(26)\quad \left\{
\begin{aligned}
u &= \mathrm{H}(t) + \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}(\mathrm{W} - w),\\
u' &= u - \mathrm{H}(t') = \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}(\mathrm{W} - w) - [\mathrm{H}(t') - \mathrm{H}(t)],
\end{aligned}
\right.
$$

et au point I',

$$
\left\{
\begin{aligned}
u &= \mathrm{H}(t') + \frac{\Omega'(t')}{k'(t')}(\mathrm{W}' - w'),\\
u' &= u - \mathrm{H}(t') = \frac{\Omega'(t')}{k'(t')}(\mathrm{W}' - w').
\end{aligned}
\right.
$$

De I en I′ la quantité u éprouvera un accroissement total, soit positif, soit négatif, que l'on trouvera par la différence

$$[H(t') - H(t)] + \left\{\frac{\Omega'(t')}{k'(t')}(W' - \omega') - \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}(W - \omega)\right\},$$

(26 *bis*) ou par l'intégrale définie

$$\int_t^{t'} \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\,dt + \int_t^{t'} \frac{d}{dt}\left\{\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}(W - \omega)\right\}dt.$$

Toutes les dimensions linéaires des courbes de détente $B'Bu$, $B'_1B_1u_1, \ldots$ étant supposées connues, d'après les équations (24), (25), (25 *bis*) et (26), il ne serait pas difficile de calculer directement les aires de ces courbes ou les intégrales

$$\int v\,dp = \int v\Omega'(t)\,dt, \quad \int p\,dv = vp - \int v\,dp = v\Omega'(t) - \int v\Omega'(t)\,dt;$$

mais, pour traiter la question d'une manière plus complète, je préfère me servir des expressions générales des fonctions A, Q, R des formules (18), ce qui m'obligera de trouver d'abord la fonction $\alpha(t)$.

Je remonte donc à l'équation (19 *bis*), et j'en tire

$$\alpha'(t) = H(t)k'(t) - \omega\Omega'(t).$$

Je multiplie par dt et j'intègre, ce qui me donne

(27) $$\alpha(t) = \int H(t)k'(t)\,dt - \int \omega\Omega'(t)\,dt,$$

puis, en procédant par parties avec le premier terme du deuxième membre, je trouve

$$\int H(t)k'(t)\,dt = H(t)k(t) - \int k(t)\frac{dH(t)}{dt}\,dt;$$

mais, d'après l'équation (20), on a

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{\Gamma(t)\Omega'(t)}{k(t)}.$$

On a, en même temps,

$$dp = \Omega'(t)\,dt,$$

et, par suite, on trouvera l'intégrale générale

(27 *bis*) $$\alpha(t) = H(t)k(t) - \int \Gamma(t)\Omega'(t)\,dt - \int \omega\,dp;$$

puis, de t à t', l'intégrale définie

(27 *ter*) $$\alpha(t') - \alpha(t) = [H(t')k(t') - H(t)k(t)] - \int_t^{t'} \Gamma(t)\Omega'(t)\,dt - \int_t^{t'} \omega\,dp,$$

ce qui s'interprétera sur la *fig.* 2 en disant que de t à t', le long de la courbe $i_0 i i'$,

l'accroissement de la fonction $\alpha(t)$ est égal à l'accroissement de la fonction composée $H(t)k(t)$, moins l'aire $Pii'P'$ représentée par le dernier terme du deuxième membre de l'équation (27 *ter*), moins encore l'aire comprise entre la courbe initiale $i_0 i i'$ et les deux courbes $\psi(v, p) =$ constante u, qui partiront, l'une du point i, l'autre du point i', et devront être prolongées jusqu'à la rencontre de l'axe Ov, moins, enfin, la quantité de force vive latente qu'il pourra y avoir à considérer de l'une à l'autre des courbes ψ le long de l'axe Ov.

En revenant à l'expression générale de la fonction $\alpha(t)$, et en la substituant dans l'expression de R des formules (18), je trouve

$$(28)\qquad R = k(t)u - \alpha(t) = (u - H(t))k(t) + \int \Gamma(t)c'(t)\,dt + \int \omega\,dp.$$

Les deux derniers termes du second membre sont les mêmes que dans la formule (27 *bis*), mais avec des signes contraires, et le tout doit être égal à l'aire $OPBu$, plus la quantité de force vive latente de O en u le long de l'axe Ov.

Le dernier terme du second membre de la formule (28) étant égal à l'aire $OPii_0$ sur la *fig.* 2, il s'ensuit que la somme des deux autres représentera l'aire $i_0 iBu$, plus la quantité de force vive latente de O en u le long de l'axe Ov.

En remplaçant t par t', sans faire varier u, et en retranchant les deux expressions l'une de l'autre, je trouve

$$R' - R = (u - H(t'))k(t') - (u - H(t))k(t) + \int_t^{t'} \Gamma(t)c'(t)\,dt + \int_t^{t'} \omega\,dp,$$

pour l'expression générale de l'aire $PP'B'B$ sur la *fig.* 2.

La valeur de u ne devant pas être inférieure à $H(t')$, pour que le point B' ne tombe pas en deçà de la courbe $i_0 i i'$, je pose

$$u = H(t') + u',$$

et je trouve

$$(28\,bis)\qquad \begin{cases} R' - R = \displaystyle\int_t^{t'} \omega\,dp + \int_t^{t'} \Gamma(t)c'(t)\,dt \\ \qquad - (H(t') - H(t))k(t') + u'(k(t') - k(t)), \end{cases}$$

ce qui me permet de conclure que l'on aura

$$(28\,ter)\qquad \begin{cases} \text{aire } ii'k = \displaystyle\int_t^{t'} \Gamma(t)c'(t)\,dt - (H(t') - H(t))k(t'), \\ \text{aire } ki'B'B = u'(k(t') - k(t)). \end{cases}$$

Au moyen de la relation (23), la quantité A des formules (18) se transformera en

$$(29)\qquad A = \psi p - \omega p + (u - H(t))\frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\Omega(t).$$

et se compliquera en apparence; mais au moyen d'une telle complication on trouvera

$$(30)\quad Q = R - A = [u - H(t)]\left[k(t) - \frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\,\Omega(t)\right] + \int \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - \int p\,d\omega.$$

Ce sera l'expression générale de l'aire ABu, plus la quantité de force vive latente de O en u le long de l'axe Ov.

Quand on y remplacera t par t', sans faire varier u, et qu'on retranchera les deux expressions l'une de l'autre, on aura

$$Q' - Q = [u - H(t)]\left[k(t') - \frac{k'(t')}{\Omega'(t')}\,\Omega(t')\right] - [u - H(t)]\left[k(t) - \frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\,\Omega(t)\right]$$
$$+ \int_t^{t'} \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - \int_t^{t'} p\,d\omega,$$

puis, en y faisant

$$u = H(t') + u',$$

on trouvera

$$(30\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} Q' - Q = &- \int_t^{t'} p\,d\omega + \int_t^{t'} \Gamma(t)\,c'(t)\,dt \\ &- [H(t') - H(t)]\left[k(t) - \frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\,\Omega(t)\right] \\ &+ u'\left\{[k(t') - k(t)] - \left(\frac{k'(t')}{\Omega'(t')}\,\Omega(t') - \frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\,\Omega(t)\right)\right\}. \end{aligned}\right.$$

Ce sera l'expression générale de l'aire ABB′A′ sur la *fig.* 2, et les trois premiers termes du second membre représenteront la valeur initiale de cette aire pour $u' = 0$. Le dernier terme représentera l'augmentation due à une valeur quelconque u'.

Il s'ensuit que l'on aura

$$(30ter)\quad \left\{\begin{aligned} &\text{aire } lki'n' \\ &= -\int_t^{t'} p\,d\omega + \int_t^{t'} \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - [H(t') - H(t)]\left[k(t) - \frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\,\Omega(t)\right]. \\ &\text{aire ABB}'\text{A}' - \text{aire } lki'n' \\ &= u'\left\{[k(t') - k(t)] - \left(\frac{k'(t')}{\Omega'(t')}\,\Omega(t') - \frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\,\Omega(t)\right)\right\}. \end{aligned}\right.$$

D'autre part, on trouvera, à la seule inspection de la *fig.* 2,

$$\text{aire } n'i'in = \int_t^{t'} p\,d\omega,$$

et, quand on ajoutera cette équation à la première des formules (30 *ter*), on aura

$$(30\ quater)\quad \text{aire } lki'in = \int_t^{t'} \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - [H(t') - H(t)]\left[k(t) - \frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\,\Omega(t)\right].$$

puis, en retranchant de celle-là la première des formules (28 *ter*), il restera

$$\text{aire } lkin = [\mathrm{H}(t') - \mathrm{H}(t)]\frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\Omega(t),$$

et, en effet, on devra avoir

$$\text{aire } lkin = \overline{ik} \times p,$$

ce qui, d'après la première des formules (25 *bis*), conduira exactement au même résultat.

Quand on remplacera t par t' dans la formule (29), sans faire varier u, on trouvera

$$\mathrm{A}' - \mathrm{A} = \omega' p' - \omega p + [u - \mathrm{H}(t')]\frac{k'(t')}{\Omega'(t')}\Omega(t') - [u - \mathrm{H}(t)]\frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\Omega(t),$$

et, quand on y fera encore

$$u = \mathrm{H}(t') + u',$$

on aura

$$(29\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{A}' - \mathrm{A} = \omega' p' - \omega p - [\mathrm{H}(t') - \mathrm{H}(t)]\frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\Omega(t) \\ + u'\left(\frac{k'(t')}{\Omega'(t')}\Omega(t') - \frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\Omega(t)\right). \end{aligned}\right.$$

Mais la différence $\mathrm{A}' - \mathrm{A}$ ne représentera pas une quantité simple sur la *fig.* 2, car on aura

$$(29\ ter)\qquad \mathrm{A}' - \mathrm{A} = \text{aire } \mathrm{PP'B'}b - \text{aire } \mathrm{A'}b\mathrm{BA}.$$

Il suit de là que, par la somme des formules (29 *bis*) et (30 *bis*), on devra retrouver l'expression déjà connue de l'aire PP′B′B ou de la différence R′ — R, ce qu'il sera, en effet, très-facile de vérifier.

Je reviens maintenant aux formules (29 *bis*), (29 *ter*), et j'observe que l'on aura directement sur la *fig.* 2,

$$(31)\qquad \text{aire } \mathrm{PP'B'}b = v'(p' - p) = v'[\Omega(t') - \Omega(t)],$$

puis, en y substituant la valeur de v' de la seconde des formules (25),

$$(31\ bis)\qquad \text{aire } \mathrm{PP'B'}b = \omega'(p' - p) + u'\frac{k'(t')}{\Omega'(t')}[\Omega(t') - \Omega(t)].$$

De même on aura directement, sur la *fig.* 2,

$$(32)\qquad \text{aire } \mathrm{A'}b\mathrm{BA} = (v - v')p = (v - v')\Omega(t),$$

puis, en y substituant l'expression $v - v'$ tirée de la troisième des formules (25),

$$(32\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} \text{aire } \mathrm{A'}b\mathrm{BA} = -(\omega' - \omega)p + [\mathrm{H}(t') - \mathrm{H}(t)]\frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\Omega(t) \\ - u'\left(\frac{k'(t')}{\Omega'(t')} - \frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\right)\Omega(t). \end{aligned}\right.$$

Par conséquent, en soustrayant la formule (32 *bis*) de la formule (31 *bis*), on devra retrouver la différence déjà connue A′ — A de la formule (29 *bis*); ce qu'il sera, en effet, très-facile de vérifier.

Quand on fera $u' = 0$ dans la formule (32 *bis*), on aura l'expression de l'aire $lkhn'$ sur la *fig.* 2, et le résultat sera parfaitement d'accord avec l'expression déjà connue de l'aire $lkin$, qui ne différera de celle-là que par l'aire du rectangle $nihn'$ égale au produit $(\omega' - \omega)p$.

L'aire triangulaire BB′b pourra être obtenue, à volonté, par l'expression

$$R' - R - \text{aire } PP'B'b,$$

ou par l'expression

$$Q' - Q - \text{aire } A'bBA,$$

c'est-à-dire en soustrayant la formule (31 *bis*) de la formule (28 *bis*), ou bien en soustrayant la formule (32 *bis*) de la formule (30 *bis*), et, de l'une comme de l'autre manière, on trouvera

$$(33)\quad \left\{\begin{aligned} \text{aire } BB'b = &- \text{aire } ihi' + \int_t^{t'} (t - t')\,dt - [H(t') - H(t)]\,k(t) \\ &+ u'\left\{[k(t') - k(t)] - \frac{k'(t')}{\Omega'(t')}[\Omega(t') - \Omega(t)]\right\}. \end{aligned}\right.$$

Quand on fera $u' = 0$ dans l'équation (33), on aura l'aire triangulaire $ki'h$, et le résultat sera, en effet, d'accord avec l'expression déjà connue de l'aire $ii'k$.

Le dernier terme du second membre représentera ce que l'on devra ajouter à l'aire $ki'h$ pour trouver l'aire correspondante BB′b, et, en effet, on aura directement sur la *fig.* 2,

$$\text{aire } BB'b = \text{aire } ki'h + \text{aire } ki'B'B - \text{aire } hi'B'b.$$

D'autre part, on connaît l'aire $ki'B'B$ par la seconde des formules (28 *ter*), et l'on trouvera l'aire $hi'B'b$, soit au moyen de la formule (31 *bis*), soit au moyen de la troisième des formules (25 *bis*), de manière à parvenir exactement au même résultat.

A l'aide de ces différentes formules, (23), . . ., (33), on pourra calculer les dimensions superficielles aussi bien que les dimensions linéaires de toutes les courbes de détente $B'Bu$, $B'_1B_1u_1$ dans l'intervalle de deux horizontales PI, P′I′ entre les températures t, t', desquelles on connaîtra à la fois les fonctions $H(t)$, $k(t)$, $\Omega(t)$.

Le long de l'axe Ov, de i_0 en I_0 sur la *fig.* 2, on devra concevoir une température constante t_0 qui dépendra de l'équation

$$(34)\qquad \Omega(t_0) = 0,$$

et, quand on désignera par une constante arbitraire C la quantité de force vive latente de O en i_0 le long de l'axe Ov, on aura en un point quelconque u de l'axe Ov entre les deux limites $v = \omega_0$, $v = W_0$,

$$(35)\qquad R_0 - Q_0 = C - [u - H(t_0)]\,k(t_0),$$

ou simplement

$$(35\ bis)\qquad R_0 = Q_0 = C + u\,k(t_0),$$

alors qu'on déterminera la constante arbitraire de la fonction $H(t)$, de manière à avoir

$$H(t_0) = 0.$$

La dernière des courbes ψ passera par l'un des points I, I', selon que la quantité entre parenthèses dans le second membre de l'équation (22 *ter*) sera positive ou négative, et la valeur correspondante de u' sera déterminée par l'une des formules (26), ce qui obligera de connaître encore la différence $W - w$ et amènera différentes réductions dans les formules (28 *bis*), (29 *bis*), (30 *bis*), (31 *bis*), (32 *bis*) et (33).

J'arrive maintenant à la neuvième et à la dixième des formules (18), qui pourront être remplacées par la relation unique

$$dq = \frac{k(t)}{\Gamma(t)}\,du = \gamma(t)\,du,$$

de telle sorte que, en y faisant d'abord

$$u = H(t),$$

et, par suite,

$$du = \frac{dH(t)}{dt}\,dt = \frac{\Gamma(t)\,c'(t)}{k(t)}\,dt = \frac{c'(t)}{\gamma(t)}\,dt,$$

je trouverai le long de la courbe $i_0 i i'$,

$$dq = c'(t)\,dt,$$

et, de t à t',

$$(36)\qquad \int_t^{t'} dq = \int_t^{t'} c'(t)\,dt = c(t') - c(t),$$

ce qui me ramènera précisément à la définition des fonctions $c(t)$ et $H(t)$, d'après les équations (19) et (20).

Le long de la droite PI, on aura

$$t = \text{constante},$$

et, par suite, l'intégrale générale

$$q = \gamma(t)\,u + \text{fonction}(t).$$

Mais il faudra qu'on trouve

$$q = 0 \quad \text{pour} \quad u = H(t),$$

et, par suite, on aura l'intégrale définie

$$(37)\qquad q = [u - H(t)]\,\gamma(t)$$

pour l'expression générale de la quantité de chaleur latente de t en B sur la *fig.* 2.

Quand on remplacera t par t' dans la formule (37), on trouvera pour la quantité de

chaleur latente correspondante, de i' en B′ sur la *fig.* 2,

$$(37\ bis)\qquad q' = [u - H(t')]\gamma(t');$$

mais la variable u ne devra pas être moindre que $H(t')$ pour que le point B′ ne tombe pas en deçà de la courbe $i_0 i i'$ et pour que la valeur de q' ne devienne pas négative.

Il sera donc convenable de poser

$$u = H(t') + u',$$

et de n'admettre pour u' que des valeurs positives, ce qui fera trouver, en place des formules (37) et (37 *bis*),

$$(38)\qquad \begin{cases} q = [H(t') - H(t)]\gamma(t) + u'\gamma(t), \\ q' = \qquad 0 \qquad\qquad\qquad + u'\gamma(t'). \end{cases}$$

Il suit de là que, de i en i', puis de i' en B′, la chaudière d'une machine à vapeur théoriquement parfaite aura à dépenser une quantité de chaleur représentée par la somme de la formule (36) et de la seconde des formules (38), c'est-à-dire par l'expression

$$(39)\qquad c(t') - c(t) + u'\gamma(t'),$$

et que le condenseur recevra une quantité de chaleur q représentée par la première des formules (38), c'est-à-dire par l'expression

$$(40)\qquad [H(t') - H(t)]\gamma(t) + u'\gamma(t).$$

La différence des formules (39) et (40), ou la quantité de chaleur anéantie sera représentée par l'expression

$$(41)\qquad [c(t') - c(t)] - [H(t') - H(t)]\gamma(t) + u'[\gamma(t') - \gamma(t)],$$

c'est-à-dire par l'intégrale définie

$$(41\ bis)\qquad \int_t^{t'} c'(t)\,dt - \gamma(t)\int_t^{t'} \frac{c'(t)}{\gamma(t)}\,dt + u'\int_t^{t'} \frac{d\gamma(t)}{dt}\,dt.$$

La quantité de travail obtenu sera égale à l'aire ii'B′B ou à la somme des aires $ii'k$, ki'B′B, et, d'après les formules (28 *bis*), (28 *ter*), on aura

$$(42)\qquad \text{aire } ii'B'B = \int_t^{t'} \Gamma(t)c'(t)\,dt - [H(t') - H(t)]k(t) + u'[k(t') - k(t)],$$

ou, ce qui reviendra au même,

$$(42\ bis)\qquad \begin{cases} \text{aire } ii'B'B = \displaystyle\int_t^{t'} \Gamma(t)c'(t)\,dt - \Gamma(t)\gamma(t)\int_t^{t'} \frac{c'(t)}{\gamma(t)}\,dt \\ \qquad\qquad + u'\displaystyle\int_t^{t'} \frac{d}{dt}[\Gamma(t)\gamma(t)]\,dt. \end{cases}$$

Ainsi, la quantité de chaleur anéantie ne pourra généralement être égale à zéro qu'autant qu'on aura

$$\gamma(t) = \text{constante},$$

comme dans la manière de voir de MM. Carnot et Clapeyron, et alors la fonction $\Gamma(t)$ ne pourra être une constante. D'un autre côté, quand la fonction $\gamma(t)$ sera une quantité essentiellement variable avec t et que l'on admettra l'hypothèse

$$\Gamma(t) = \text{constante } G,$$

la formule (42 *bis*) deviendra le produit de la constante G par la formule (41 *bis*).

Dans l'entière rigueur des choses, une machine à vapeur théoriquement parfaite réaliserait, en outre, l'aire triangulaire $ih'i'$ que l'on obtiendrait en menant par le point i de la *fig.* 2 une courbe déterminée ih', non pas de l'espèce $\varphi(v, p) = \text{constante } t$, mais de l'espèce $\psi(v, p) = \text{constante } u$, par rapport à une masse d'eau complétement liquide.

Par contre, la quantité de chaleur sensible à dépenser par la chaudière ne serait pas la différence $c(t') - c(t)$ le long de la courbe $i_0 i i'$, mais une différence analogue $c_1(t') - c_1(t)$ de h' en i' sur la *fig.* 2, et il me suffirait d'appliquer mes principes généraux de la théorie des effets dynamiques de la chaleur à une masse entièrement liquide pour trouver la condition nécessaire

$$\text{aire } ih'i' = \int_t^{t'} \Gamma(t)\, c'_1(t)\, dt - \int_t^{t'} \Gamma(t)\, c'(t)\, dt.$$

Cela conduirait tout simplement à mettre $c'_1(t)$ au lieu de $c'(t)$ sous le signe de l'intégration du premier terme de chacune des formules (41 *bis*), (42 *bis*), et à remplacer la limite inférieure t de chacun de ces premiers termes par ϑ; mais comme un tel changement n'influerait pas sur la dépendance mutuelle des formules (41 *bis*), (42 *bis*), et que, d'un autre côté, l'expérience a fait reconnaître que l'aire triangulaire $ih'i$, en même temps que la différence $\vartheta - t$, sont presque inappréciables, je me dispenserai d'en tenir compte.

Dans une machine à vapeur sans détente, la quantité de chaleur à dépenser par la chaudière sera exactement la même que dans une machine à détente, mais le travail obtenu sera moindre d'une quantité égale à l'aire du triangle $BB'b$.

On n'utilisera que l'aire $ii'B'b$ dont la différence avec l'aire connue $hi'B'b$ sera égale à l'aire triangulaire ihi', et, quand on négligera cette petite aire triangulaire, on aura sensiblement pour la quantité de force motrice de la machine à vapeur sans détente,

$$\text{aire } hi'B'b = u' \frac{h'(t')}{\Omega'(t')} (\Omega(t') - \Omega(t)). \tag{43}$$

La quantité de force motrice qu'on perdra sera la différence des formules (41) et (43), ou bien ce que deviendra le second membre de la formule (33) quand on y négligera l'aire triangulaire ihi'.

Je me propose maintenant de calculer la quantité de chaleur que recevra le condenseur dans une machine sans détente.

D'après le principe fondamental que j'ai érigé sur cette matière, toute la force vive non réalisée devra se retrouver dans le condenseur sous la forme d'une quantité équivalente de chaleur.

Donc le condenseur devra recevoir, d'une part, une quantité de chaleur égale à celle de la formule (40), plus une quantité additionnelle z qui dépendra de l'égalité

$$\Gamma(t)\,z = \text{aire } BB'b,$$

ce qui me fera trouver

$$z = \frac{\text{aire } BB'b}{\Gamma(t)} = \frac{1}{\Gamma(t)}\int_t^{t'} \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - [H(t') - H(t)]\,\gamma(t)$$
$$+ \frac{u'}{\Gamma(t)}\left\{[k(t') - k(t)] - \frac{k'(t')}{\Omega'(t')}[\Omega(t') - \Omega(t)]\right\}.$$

En y ajoutant la formule (40) et en ayant égard à la relation connue

$$k(t) = \Gamma(t)\,\gamma(t),$$

j'aurai en tout

$$(44)\qquad \frac{1}{\Gamma(t)}\int_t^{t'} \Gamma(t)\,c'(t)\,dt + u'\cdot\frac{k(t')}{\Gamma(t)} - \frac{u'}{\Gamma(t)}\,\frac{k'(t')}{\Omega'(t')}[\Omega(t') - \Omega(t)],$$

et la différence ou la quantité de chaleur anéantie sera représentée par l'expression

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} &[c(t') - c(t)] - \frac{1}{\Gamma(t)}\int_t^{t'} \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - u'\left(\frac{k'(t')}{\Gamma(t)} - \gamma(t')\right)\\ &\qquad + \frac{u'}{\Gamma(t)}\,\frac{k'(t')}{\Omega'(t')}[\Omega(t') - \Omega(t)],\end{aligned}\right.$$

qui se réduira à

$$(45\,bis)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int_t^{t'} c'(t)\,dt - \frac{1}{\Gamma(t)}\int_t^{t'} \Gamma(t)\,c'(t)\,dt - u'\left(\frac{\Gamma(t')}{\Gamma(t)} - 1\right)\gamma(t')\\ &\qquad + \frac{u'}{\Gamma(t)}\,\frac{k'(t')}{\Omega'(t')}[\Omega(t') - \Omega(t)].\end{aligned}\right.$$

Le principe duquel dépend la formule (44) est d'ailleurs fort simple, ainsi que je l'ai fait voir dans le temps, et se réduit à ce qui suit.

Toute somme de chaleur q à une température donnée t a pour équivalent mécanique le produit $q\,\Gamma(t)$, et toute autre somme de chaleur q' à une autre température t' a pour équivalent mécanique le produit $q'\,\Gamma(t')$; lors donc que, à l'aide d'un fluide élastique et avec la précaution essentielle de ne jamais mettre en présence des corps à des températures différentes t, t', on sera parvenu à produire de la force motrice, en enlevant une certaine somme de chaleur q' à une source entretenue à la température t', et

en versant une autre somme de chaleur q dans une source entretenue à la température t, la quantité de force motrice obtenue devra être égale à la différence $q'\Gamma(t') - q\Gamma(t)$; tandis que, dans le phénomène de la transmission libre de la chaleur entre deux corps entretenus à des températures différentes t, t', on devra admettre de deux choses l'une, ou une perte de force vive, ou l'égalité $q'\Gamma(t') = q\Gamma(t)$; et comme l'idée d'une perte de force vive dans le phénomène de la transmission libre de la chaleur entre deux corps entretenus à des températures différentes t, t' choque éminemment notre bon sens, nous devons naturellement opter pour l'égalité $q'\Gamma(t') = q\Gamma(t)$.

Mais, dans ce cas-là, on se trouvera amené très-manifestement à prendre la commune valeur des produits $q\Gamma(t)$, $q'\Gamma(t')$ pour la mesure rationnellement exacte de la quantité de chaleur qui passera d'un corps à un autre, et, à moins de supposer que les physiciens n'aient pas réussi jusqu'à ce jour à bien mesurer ce que l'on doit nommer une quantité de chaleur, on se trouvera conduit à admettre la relation

$$\Gamma(t) = \text{constante } G.$$

Néanmoins, comme je n'ai pas été arrêté jusqu'ici dans mes calculs en regardant la fonction $\Gamma(t)$ comme une quantité variable, je continuerai à me tenir à ce point de vue jusqu'au bout.

Ce sera donc la formule (44) que j'adopterai pour la mesure de la quantité de chaleur que recevra le condenseur dans une machine sans détente, tandis que la chaudière ne cessera pas de fournir une quantité de chaleur représentée par la formule (39); et alors ce sera la formule (45) ou (45 *bis*) que l'on devra employer en place de la formule (41) ou (41 *bis*), quand on voudra passer d'une machine à détente complète à une machine sans détente.

Quand enfin on voudra supposer

$$\Gamma(t) = \text{constante } G,$$

la formule (45 *bis*) se réduira à son dernier terme, et le rapport de ce dernier terme au second membre de la formule (43) deviendra égal à la constante G.

Toutes ces formules seront d'ailleurs applicables jusqu'à la limite où la dernière des courbes $\psi(v, p) =$ constante u passera par l'un des points I, I' de la *fig.* 2, selon que la quantité entre parenthèses au second membre de l'équation (22 *ter*) sera positive ou négative, et la valeur correspondante de u' dépendra de l'une ou de l'autre des formules (26).

Les valeurs correspondantes de la formule (41) seront respectivement

$$(46)\quad \begin{cases} [c(t') - c(t)] - [H(t') - H(t)]\gamma(t') + \dfrac{\Omega'(t)}{k'(t)}[W - w][\gamma(t') - \gamma(t)], \\ [c(t') - c(t)] - [H(t') - H(t)]\gamma(t) + \dfrac{\Omega'(t')}{k'(t')}[W - w'][\gamma(t') - \gamma(t)], \end{cases}$$

mais celles de la formule (45) ne seront pas assez simples pour que je me donne la peine de les développer explicitement ici.

Après avoir épuisé, de cette manière, tout ce qui est relatif à la détermination des dimensions linéaires, des dimensions superficielles et des quantités de chaleur, à l'entour des aires $ii'k$, $ii'B'B$, $ii'B'_1B_1$,..., sur la *fig.* 2, je supposerai encore que l'on veuille trouver la quantité de chaleur nécessaire le long d'une courbe quelconque représentée par une équation arbitrairement donnée

$$\chi(v, t) = 0.$$

En joignant alors une telle équation à la relation

$$p = \Omega(t),$$

on n'aurait qu'à effectuer l'élimination de la variable t pour trouver l'équation de la courbe donnée en v, p; et, réciproquement, si cette dernière équation était donnée, on n'aurait qu'à y substituer la relation

$$p = \Omega(t)$$

pour trouver l'équation correspondante de la courbe en v, t.

La question étant ainsi posée, je remonte à la formule (23), ou plutôt à la formule (21), et j'en tire

$$(47) \qquad u = \mathrm{H}(t) + \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}v - \omega.$$

Ce sera l'expression générale de u le long de la courbe donnée, pourvu que, au second membre, on établisse entre v, t la relation

$$\chi(v, t) = 0;$$

par conséquent, d'un point à un autre de la courbe donnée, on aura d'abord

$$\frac{d\chi}{dv}dv + \frac{d\chi}{dt}dt = 0,$$

puis

$$(47\ bis) \qquad du = \left\{\frac{d}{dt}\left(\mathrm{H}(t) - \omega\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\right) + v\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\right)\right\}dt + \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}dv$$

et l'expression de la quantité de chaleur correspondante dq sera

$$(48) \qquad dq = \eta(t)\,du = \eta(t)\left\{\frac{d}{dt}\left(\mathrm{H}(t) - \omega\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\right) + v\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\right)\right\}dt + \eta(t)\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}dv.$$

Quand l'équation donnée

$$\chi(v, t) = 0$$

se reduira à

$$t = \text{constante},$$

on aura simplement

$$dq = \eta(t)\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}dv.$$

et, par voie d'intégration, on en déduira, sous forme générale,

$$q = \gamma(t)\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}v + \text{fonction}(t);$$

puis, en exprimant que pour $v = w$ on devra avoir $q = 0$, on trouvera particulièrement

$$(49) \qquad q = \gamma(t)\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}(v - w).$$

Ce sera la quantité de chaleur latente pour une augmentation de volume $v - w$, et, quand on y substituera la valeur de $v - w$ tirée de la formule (47), on retrouvera l'expression déjà connue par la formule (37), qui était

$$49\,bis \qquad q = [u - \mathrm{H}(t)]\gamma(t).$$

Quand l'équation de la courbe donnée se réduira à

$$v = \text{constante},$$

on aura

$$dv = 0,$$

et l'équation (48) fera trouver l'expression de la chaleur spécifique à volume constant sous la forme

$$(50) \qquad c_1 = \gamma(t)\left\{\frac{d}{dt}\left(\mathrm{H}(t) - w\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\right) + v\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\right)\right\},$$

puis, en développant et en faisant usage de l'expression connue de la fonction $\mathrm{H}(t)$, on aura

$$(50\,bis) \qquad c_1 = c'(t) - \gamma(t)\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\frac{dw}{dt} + (v - w)\gamma(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\right),$$

ou, ce qui reviendra au même, en remplaçant la différence $v - w$ par sa valeur tirée de la formule (47),

$$50\,ter \qquad c_1 = c'(t) - \gamma(t)\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}\frac{dw}{dt} + [u - \mathrm{H}(t)]\gamma(t)\frac{k'(t)}{\Omega'(t)}\frac{d}{dt}\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}.$$

Quand on fera successivement

$$v = w \quad \text{et} \quad v = \mathrm{W}$$

dans la formule (50 *bis*), on trouvera pour les deux limites correspondantes de c_1, en i, I,

$$(51) \qquad \begin{cases} c'(t) - \gamma(t)\dfrac{\Omega'(t)}{k'(t)}\dfrac{dw}{dt}, \\[2ex] c'(t) - \gamma(t)\dfrac{\Omega'(t)}{k'(t)}\dfrac{dw}{dt} + \mathrm{W} - w\,\gamma(t)\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\Omega'(t)}{k'(t)}\right). \end{cases}$$

mais ces limites de la quantité c_1 ne seront applicables que de haut en bas sur la *fig. 2*, c'est-à-dire pour des valeurs négatives de dt.

Quand, enfin, on voudra trouver la quantité de chaleur dq le long d'une courbe quelconque dans une direction non parallèle aux axes Ov, Ot, on devra employer la formule (48) dont le développement sera très-compliqué et qui ne prendra une forme simple que lorsqu'on se bornera à écrire

$$(48\,bis)\qquad dq = c'(t)\,dt + \gamma(t)\,d\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}(v - w)\right).$$

Quand on fera

$$v = w$$

dans cette expression générale de dq, on retrouvera la relation connue

$$dq = c'(t)\,dt$$

le long de la courbe $i_0 i i'$.

On retrouvera encore la même relation

$$dq = c'(t)\,dt$$

quand les variables v, t satisferont à la condition

$$\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}(v - w) = \text{constante } h.$$

Le long de la courbe $I_0 II'$, on aura

$$(52)\qquad v = W,\quad \frac{dq}{dt} = c'(t) + \gamma(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}(W - w)\right).$$

Quand, enfin, on voudra appliquer la formule (48 *bis*) tout à l'entour d'une courbe fermée quelconque s, on trouvera d'abord

$$(53)\qquad \int_0^s dq = \int_0^s c'(t)\,dt + \int_0^s \gamma(t)\,d\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}(v - w)\right)$$

Mais, d'une part, l'intégrale définie d'une différentielle exacte, tout à l'entour d'une courbe fermée, sera toujours égale à zéro, et, d'autre part, on aura généralement

$$\int y\,dx = xy - \int x\,dy,$$

$$\int_{x_0}^{x} y\,dx = (x_1 y_1 - x_0 y_0) - \int_{x_0}^{x_1} x\,dy,$$

par suite, tout à l'entour d'une courbe fermée,

$$\int_0^s y\,dx = 0 - \int_0^s x\,dy;$$

de telle sorte que la formule (53) se réduira à

$$(53\ bis)\qquad \int_0^s dq = -\int_0^s \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}(v-w)\gamma'(t)\,dt.$$

L'aire S, delimitée par une pareille courbe fermée sur la *fig.* 2, pourra en même temps être calculee, d'après les deux dernières des formules (18), par l'une des expressions

$$(54)\qquad \left\{\begin{aligned}
S &= \int_0^s p\,dv = -\int_0^s v\,dp,\\
S &= \int_0^s \Gamma(t)\,dq = \int_0^s \Gamma(t)\,\gamma'(t)\,dt + \int_0^s \Gamma(t)\,\gamma(t)\,d\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}(v-w)\right),\\
&= 0 + \int_0^s k(t)\,d\left(\frac{\Omega'(t)}{k'(t)}(v-w)\right),\\
&= 0 + 0 - \int_0^s \Omega'(t)(v-w)\,dt\\
&= -\int_0^s v\,\Omega'(t)\,dt = -\int_0^s v\,dp = +\int_0^s p\,dv
\end{aligned}\right.$$

Les formules (54) pourraient être employées à retrouver d'une autre manière toutes les aires déjà connues $ii'k$, $ki'B'B$, $hi'k$, $bB'B$,...; mais je ne m'arrêterai pas à de pareilles vérifications ici.

Je me bornerai à faire remarquer que l'aire totale $ii'I'I$ sera représentée par l'intégrale

$$(55)\qquad \int_t^{t'} (W-w)\,dp = \int_t^{t'} (W-w)\,\Omega'(t)\,dt,$$

et que, tout à l'entour de cette aire, la formule (53 *bis*) fera trouver

$$(56)\qquad \int_0^s dq = -\int_0^s \frac{\Omega'(t)}{k'(t)}(W-w)\gamma'(t)\,dt.$$

La discussion des formules (18) est ainsi veritablement complète sans que j'aie eu à faire usage de la relation fondamentale exprimée par la seconde des equations (18).

La seconde des formules (18) ne devra pourtant pas être omise, car il est directement évident, d'après la nature physique des choses, que l'expression de la chaleur latente devra se réduire à la formule (9), et pour que cette réduction puisse se faire, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait la seconde des formules (18), ainsi que l'on pourra s'en assurer de nouveau par une comparaison directe entre les formules (9) et (49).

Or la seconde des formules (18) exigera que l'on ait

$$(57)\qquad \frac{\Omega'(t)}{k'(t)} = \frac{\Gamma(t)\,L}{k(t)\,(W-\omega)} = \frac{L}{\gamma(t)\,(W-\omega)},$$

et, par conséquent, cette valeur du rapport des fonctions $\Omega'(t)$, $k'(t)$ pourra être substituée dans toutes les relations précédentes.

Il y aura surtout de l'avantage à faire une telle substitution dans celles des relations précédentes qui dépendront à la fois du rapport des fonctions $\Omega'(t)$, $k'(t)$, et de la différence $W-\omega$ le long de la courbe limite $I_0 II'$, parce que l'on aura simplement

$$(57\ bis)\qquad \begin{cases} \dfrac{\Omega'(t)}{k'(t)}(W-\omega) = \dfrac{L}{\gamma(t)}, \\[2ex] \dfrac{\Omega'(t')}{k'(t')}(W'-\omega') = \dfrac{L'}{\gamma'(t')}. \end{cases}$$

Mais on pourra mieux faire encore en adjoignant aux formules (18) une relation auxiliaire qui aura une signification très-nette au point de vue physique des choses, et qui, par cette raison en même temps que par sa forme algébrique, entraînera de grandes simplifications dans différentes parties du sujet.

Je veux parler de la relation

$$(58)\qquad x = \frac{v-\omega}{W-\omega},$$

des formules (7), (8), (9), dans lesquelles la lettre x m'a servi à désigner la fraction de la masse entière actuellement transformée en vapeur sous un volume donné v du mélange.

Il suffira, en effet, que l'on veuille faire usage en même temps des relations (57) et (58) pour que la formule (21) se réduise à la forme très-simple

$$(59)\qquad u - H(t) = \frac{L}{\gamma(t)}\,x.$$

Quand on y remplacera t par t' sans changer u, on aura à une autre hauteur $p' = \Omega(t')$ sur la *fig.* 2, le long d'une même courbe $\psi(v, p) =$ constante u,

$$(59\ bis)\qquad u - H(t') = \frac{L'}{\gamma(t')}\,x',$$

puis, en intervertissant les deux équations et en les retranchant l'une de l'autre,

$$(59\ ter)\qquad \frac{L'}{\gamma(t')}\,x' - \frac{L}{\gamma(t)}\,x = H(t') - H(t) = \int_t^{t'} \frac{c'(t)}{\gamma(t)}\,dt,$$

ce qui permettra de trouver les rapports x, et, par suite, les espacements proportionnels de toutes les courbes de détente $B'Bu$, $B'_1B_1u_1, \ldots$, sur les droites horizontales iI, $i'I'$ de la *fig.* 2, dès l'instant qu'on connaîtra la fonction $H(t)$ et le rapport de la chaleur latente L à la fonction $\gamma(t)$.

Ce sera, ensuite, une deuxième question que celle de connaître encore les longueurs des droites iI, $i'I'$, ou les différences $W - w$, $W' - w'$, de manière à pouvoir déterminer les dimensions absolues de la *fig.* 2 au moyen de l'équation (58) qui fera trouver respectivement

$$(60)\qquad \begin{cases} v = w + (W - w)x, \\ v' = w' + (W' - w')x'. \end{cases}$$

Rien n'est plus clair que cette manière de scinder la théorie complète en différentes parties au moyen de la variable auxiliaire x, et je vais en présenter l'entier développement.

Les limites de x seront manifestement $x=0$, $x=1$, et, par suite, on aura, en place des formules (22), d'une part, le long de la courbe $i_0 i i'$,

$$(61)\qquad \begin{cases} x = 0, \quad u = H(t), \\ \text{d'autre part, le long de la courbe } I_0 I I', \\ x = 1, \quad u = H(t) + \dfrac{L}{\gamma(t)}. \end{cases}$$

Quand t variera, on aura, en place des formules (22 *bis*) et (22 *ter*), d'une part, le long de la courbe $i_0 i i'$,

$$(61\ bis)\qquad x = 0, \quad du = \frac{dH(t)}{dt}\,dt = \frac{c'(t)}{\gamma(t)}\,dt,$$

et, d'autre part, le long de la courbe $I_0 I I'$,

$$(61\ ter)\qquad x = 1, \quad du = \left(\frac{c'(t)}{\gamma(t)} + \frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\gamma(t)}\right)\right)dt.$$

En place de l'équation (23) on écrira

$$(62)\qquad x = [u - H(t)]\frac{\gamma(t)}{L}.$$

Ce sera l'expression générale de la fraction x, de i en B sur la *fig.* 2.

En y remplaçant t par t' sans changer u, on aura, de i' en B' sur la *fig.* 2,

$$(62\ bis)\qquad x' = [u - H(t')]\frac{\gamma(t')}{L'}.$$

et, en retranchant les deux formules l'une de l'autre,

$$(62\ ter)\qquad x - x' = [u - H(t)]\frac{\gamma(t)}{L} - [u - H(t')]\frac{\gamma(t')}{L'}.$$

La valeur de u ne devant pas être inférieure à $H(t')$ pour que le point B' ne tombe pas en deçà de la courbe $i_0 i i'$, il sera convenable de poser

$$(63)\qquad u = H(t') + u'.$$

Les formules (62), (62 *bis*), (62 *ter*) deviendront alors

$$(64)\quad \begin{cases} x = (\mathrm{H}(t') - \mathrm{H}(t))\dfrac{\gamma(t)}{\mathrm{L}} + u'\dfrac{\gamma(t)}{\mathrm{L}}, \\ x' = \qquad 0 \qquad\qquad + u'\dfrac{\gamma(t')}{\mathrm{L}'}, \\ x - x' = (\mathrm{H}(t') - \mathrm{H}(t))\dfrac{\gamma(t)}{\mathrm{L}} - u'\left(\dfrac{\gamma(t')}{\mathrm{L}'} - \dfrac{\gamma(t)}{\mathrm{L}}\right) \\ \qquad = \dfrac{\gamma(t)}{\mathrm{L}}\displaystyle\int_t^{t'} \dfrac{c'(t)}{\gamma(t)}\,dt - u'\int_t^{t'} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\gamma(t)}{\mathrm{L}}\right)dt, \end{cases}$$

et l'on en conclura, tant pour les valeurs absolues de x que pour les accroissements de cette variable sur la *fig.* 2,

$$(64\ bis)\quad \begin{cases} \text{de } i' \text{ en } k, \quad (\mathrm{H}(t') - \mathrm{H}(t))\dfrac{\gamma(t)}{\mathrm{L}} = \dfrac{\gamma(t)}{\mathrm{L}}\displaystyle\int^{t'} \dfrac{c'(t)}{\gamma(t)}\,dt, \\ \text{de } k \text{ en B}, \qquad\qquad u'\dfrac{\gamma(t)}{\mathrm{L}}, \\ \text{de } i' \text{ en B}', \qquad\qquad u'\dfrac{\gamma(t')}{\mathrm{L}'}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

La valeur de u' des formules (63), (64), (64 *bis*) pourra d'ailleurs augmenter jusqu'à la limite où la dernière des courbes ψ passera par l'un des points I, I', selon que la quantité entre parenthèses, dans le second membre de la formule (61 *ter*), sera positive ou négative.

De toute manière, on aura, au point I,

$$(65)\quad \begin{cases} u = \mathrm{H}(t) + \dfrac{\mathrm{L}}{\gamma(t)}, \\ u' = u - \mathrm{H}(t') = \dfrac{\mathrm{L}}{\gamma(t)} - (\mathrm{H}(t') - \mathrm{H}(t)) = \dfrac{\mathrm{L}}{\gamma(t)} - \displaystyle\int_t^{t'} \dfrac{c'(t)}{\gamma(t)}\,dt, \\ \text{et, au point I}', \\ u = \mathrm{H}(t') + \dfrac{\mathrm{L}'}{\gamma(t')}, \quad u' = u - \mathrm{H}(t') = \dfrac{\mathrm{L}'}{\gamma(t')}. \end{cases}$$

De I en I' la quantité u éprouvera un accroissement total, soit positif, soit négatif, que l'on trouvera par la différence

$$(65\ bis)\quad \begin{cases} (\mathrm{H}(t') - \mathrm{H}(t)) + \left(\dfrac{\mathrm{L}'}{\gamma(t')} - \dfrac{\mathrm{L}}{\gamma(t)}\right), \\ \text{ou, par l'intégrale définie,} \\ \displaystyle\int_t^{t'} \dfrac{c'(t)}{\gamma(t)}\,dt - \int_t^{t'} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\mathrm{L}}{\gamma(t)}\right)dt \end{cases}$$

La formule (57) pourra être substituée encore dans les expressions de toutes les aires qui dépendront du rapport des fonctions $\Omega'(t)$, $k'(t)$, mais on n'y trouvera un avantage réel que pour celles de ces aires qui aboutiront à la courbe $I_0 II'$; à moins qu'on ne veuille se placer à un point de vue exactement inverse en prenant x comme variable indépendante de tous les calculs, auquel cas les formules (28), (29) et (30) ou les expressions générales des fonctions A, Q, R deviendront

$$(66)\quad \begin{cases} R = \Gamma(t)L(x) + \int \Gamma(t)c'(t)\,dt + \int \omega\,dp, \\ A = W - \omega(p)x + \omega p, \\ Q = R - A = [\Gamma(t)L - (W - \omega(p))]x + \int \Gamma(t)c'(t)\,dt - \int p\,d\omega, \end{cases}$$

et se réduiront à un tel degré de simplicité, que chacune d'elles sera directement évidente dans toutes ses parties dès l'instant qu'on se pénétrera bien de la relation fondamentale

$$S = q'\Gamma(t') - q\Gamma(t),$$

à laquelle j'ai été amené par le cours naturel des idées dans la voie de raisonnement ouverte par M. Carnot, et de laquelle je suis parvenu à tirer tout le contenu du présent Mémoire.

On pourra donc s'étonner que depuis longtemps je n'ai pas abandonné les formules (28), (29) et (30) pour leur substituer les formules (66).

Mais pouvais-je abandonner les formules (18) aussitôt après les avoir trouvées, et ne faudra-t-il pas, en tout état de choses, que l'on se serve de la variable u? Car, au moyen des formules (66), on trouvera bien, d'un point t, x à un autre point quelconque t', x' sur la *fig.* 2,

$$(66\ bis)\quad \begin{cases} R' - R = [\Gamma(t')L'(x') - \Gamma(t)L(x)] + \int_t^{t'} \Gamma(t)c'(t)\,dt + \int_t^{t'} \omega\,dp, \\ A' - A = [W' - \omega(p')]p'x' - [W - \omega(p)]px + \omega'p' - \omega p, \\ Q' - Q = \{[\Gamma(t')L' - (W' - \omega(p'))]x' - [\Gamma(t)L - (W - \omega(p))]x\} \\ \qquad + \int_t^{t'} \Gamma(t)c'(t)\,dt - \int_t^{t'} p\,d\omega; \end{cases}$$

mais il restera à savoir quelle devra être la relation de x à x' le long d'une courbe donnée $B'Bu$ de l'espèce $\psi(v, p) =$ constante u, et cette relation sera exprimée par la formule (59 *ter*), à laquelle je ne suis parvenu qu'en passant par les formules (18), (19), (20) et (21), et dont l'emploi dérangera la simplicité des formules (66 *bis*).

Les formules (66 *bis*) seraient, à la vérité, d'une commodité extrême si, au lieu d'aller le long d'une courbe $B'Bu$ ou $\psi(v, p) =$ constante u, on voulait aller le long d'une des courbes $x =$ constante, dont j'ai dit un mot à l'occasion des formules (7) et (8), et parmi lesquelles se trouveront toujours les courbes $I_0 II'$, $I_0 II'$, dont l'une correspondra à $x = 0$ et l'autre à $x = 1$.

Les formules (66 *bis*) pourront encore être transformées très-facilement en v, v', puisqu'il suffira d'y faire

$$(67)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{v - w}{W - w}, \\ x' = \dfrac{v' - w'}{W - w'}, \end{cases}$$

quelle que puisse être d'ailleurs la relation de v en fonction de t ou de p le long d'une courbe donnée quelconque.

Mais je ne crois pas avoir besoin de m'appesantir plus longuement là-dessus, et, pour arriver à la fin de cette longue théorie dans l'exposition de laquelle la parfaite clarté des choses a toujours été mon but principal, je veux me hâter de faire voir encore ce que deviendra, à ce point de vue, au moyen de la variable auxiliaire x, le calcul de la quantité de chaleur dq le long d'une courbe donnée quelconque sur la *fig.* 2.

Je ne reprendrai pas une à une toutes celles des formules (36), ..., (56) qui se rapportent à cet objet; je me bornerai à remplacer la formule (47) par

$$(68)\qquad u = H(t) + \frac{L}{\gamma(t)}x,$$

et, par suite, la formule (47 *bis*) par

$$(68\ bis)\qquad du = \frac{c'(t)}{\gamma(t)}dt + d\left(\frac{L}{\gamma(t)}x\right) = \left\{\frac{c'(t)}{\gamma(t)} + x\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\gamma(t)}\right)\right\}dt + \frac{L}{\gamma(t)}dx,$$

ce qui me fera trouver, en place des formules (48) et (48 *bis*),

$$(69)\qquad dq = \gamma(t)\,du - c'(t)\,dt + \gamma(t)\,d\left(\frac{L}{\gamma(t)}x\right),$$

et, en développant,

$$(69\ bis)\qquad dq = \left\{c'(t) - x\gamma(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\gamma(t)}\right)\right\}dt + L\,dx.$$

Dans le dernier terme du second membre, on reconnaîtra immédiatement l'expression de la chaleur latente le long de la droite iI sur la *fig.* 2, et la quantité entre parenthèses dans le premier terme représentera la chaleur spécifique du mélange le long d'une courbe $x =$ constante.

En y faisant $x = 0$ et $x = 1$, on retrouvera, d'une part, le long de la courbe $i_0 i i'$, l'expression connue

$$dq = c'(t)\,dt,$$

et, d'autre part, le long de la courbe $I_0 I I'$, en place de la formule (52),

$$(70)\qquad dq = \left\{c'(t) + \gamma(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\gamma(t)}\right)\right\}dt.$$

Pour trouver la chaleur spécifique du mélange à volume constant, il faudra que la

variable x soit assujettie à la relation

$$v - w = (W - w)x,$$

et qu'on ne fasse pas varier v pendant la différentiation, ce qui fera trouver

$$-dw = (W - w)\,dx + x\,d(W - w),$$

et, par suite,

$$dx = -x\frac{d(W - w)}{W - w} - \frac{dw}{W - w};$$

puis, en substituant dans la formule (69 *bis*) et en divisant dt, on aura, en place des formules (50 *bis*), (50 *ter*),

$$(71)\quad c = \frac{dq}{dt} = c'(t) + x\left\{\gamma(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\gamma(t)}\right) - \frac{L}{W - w}\frac{d}{dt}(W - w)\right\} - \frac{L}{W - w}\frac{dw}{dt}.$$

Quand on y fera respectivement $x = 0$, $x = 1$, on trouvera pour les deux limites de c_1, en place des formules (51),

$$(72)\quad \begin{cases} c'(t) - \dfrac{L}{W - w}\dfrac{dw}{dt}, \\ c'(t) + \gamma(t)\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{L}{\gamma(t)}\right) - \dfrac{L}{W - w}\dfrac{dW}{dt}. \end{cases}$$

mais ces limites de la quantité c_1 ne seront applicables que de haut en bas sur la *fig.* 2, c'est-à-dire pour des valeurs négatives de dt.

Quand la variable x satisfera à la condition

$$\frac{L}{\gamma(t)}x = \text{constante},$$

c'est-à-dire

$$\frac{L}{\gamma(t)}\frac{v - w}{W - w} = \text{constante},$$

ou bien

$$u - H(t) = \text{constante},$$

on aura, d'après la formule (69), la même expression

$$dq = c'(t)\,dt$$

que le long de la courbe $i_0 i i'$.

Quand la variable x satisfera à la relation

$$\frac{L}{\gamma(t)}x + H(t) = \text{constante},$$

on aura

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\gamma(t)}x\right) = -\frac{dH(t)}{dt} = -c'(t).$$

et la formule (69) fera trouver

$$dq = 0,$$

parce que, en effet, dans ce cas-là, on aura

$$u = \text{constante},$$

et, par suite,

$$du = 0, \quad dq = \gamma(t)\,du = 0.$$

La formule (69) pouvant être intégrée le long d'une courbe quelconque, on aura, en principe,

$$(73) \qquad \int_{t_0 x}^{t_1 x_1} dq = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t_0)] + \int_{t_0 x}^{t_1 x_1} \gamma(t)\, d\left(\frac{L}{\gamma(t)} x\right);$$

mais on aura aussi, en intégrant par parties,

$$\int \gamma(t)\, d\left(\frac{L}{\gamma(t)} x\right) = Lx - \int \frac{Lx}{\gamma(t)} \gamma'(t)\, dt,$$

et, par suite, la formule (73) pourra être remplacée par

$$(73\ bis) \qquad \int_{t_0 x}^{t_1 x_1} dq = [\varepsilon(t) - \varepsilon(t_0)] + [Lx_1 - Lx_0] - \int_{t_0 x}^{t_1 x_1} \frac{Lx}{\gamma(t)} \gamma'(t)\, dt,$$

puis, quand on opérera tout à l'entour d'une ligne fermée s, on aura, en place des formules (54) et (54 *bis*),

$$(74) \qquad \int_0^s dq = \int_0^s \gamma(t)\, d\left(\frac{L}{\gamma(t)} x\right) = -\int_0^s \frac{Lx}{\gamma(t)} \gamma'(t)\, dt.$$

On aura en même temps, pour l'expression de l'aire S délimitée par une pareille courbe fermée,

$$S = \int_0^s \Gamma(t)\, dq,$$

et, au moyen de la formule (69), en ne perdant pas de vue que l'intégrale définie d'une différentielle exacte à l'entour d'une ligne fermée sera toujours égale à zéro, on trouvera, en place des formules (54),

$$(75) \quad S = \int_0^s \Gamma(t)\, dq = \int_0^s \Gamma(t)\, \gamma(t)\, d\left(\frac{L}{\gamma(t)} x\right) = -\int_0^s \frac{Lx}{\gamma(t)} \frac{d}{dt}[\Gamma(t)\gamma(t)]\, dt.$$

Quand les deux relations générales

$$(74\ bis) \qquad \int_0^s dq = -\int_0^s \frac{Lx}{\gamma(t)} \gamma'(t)\, dt,$$

$$(75\ bis) \qquad S = -\int_0^s \frac{Lx}{\gamma(t)} \frac{d}{dt}[\Gamma(t)\gamma(t)]\, dt.$$

devront être appliquées tout à l'entour d'une aire S qui sera délimitée sur la *fig.* 2 par

la courbe $i_0 i i'$, par deux horizontales $i\mathrm{I}$, $i'\mathrm{I}'$, et par une autre courbe quelconque allant d'un point B de l'horizontale $i\mathrm{I}$ à un autre point B'_1 de l'horizontale $i'\mathrm{I}'$, on aura à faire $x = 0$ le long de la courbe $i_0 i i'$ et $dt = 0$ le long de chacune des droites $i\mathrm{I}$, $i'\mathrm{I}'$; donc, en voulant déterminer les valeurs des intégrales en question, on trouvera zéro de i en i', comme aussi de B en i et de i' en B'.

Ainsi, les seconds membres des formules (74 *bis*), (75 *bis*) se réduiront chacun à la seule quantité que l'on trouvera par voie d'intégration de B'_1 en B le long de la courbe donnée qui passera par ces deux points, et l'on aura tout uniment

$$(76)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^s dq = -\int_t^{t'} \frac{\mathrm{L}x}{\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt = +\int_t^{t'} \frac{\mathrm{L}x}{\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt,\\ &\mathrm{S} = \int_0^s \Gamma(t)\,dq = -\int_t^{t'} \frac{\mathrm{L}x}{\gamma(t)}\frac{d}{dt}[\Gamma(t)\gamma(t)]\,dt\\ &\qquad = +\int_t^{t'} \frac{\mathrm{L}x}{\gamma(t)}\frac{d}{dt}[\Gamma(t)\gamma(t)]\,dt, \end{aligned}\right.$$

ce qui pourra servir à démontrer que l'on ne saurait avoir généralement

$$\int_0^s dq = 0$$

qu'autant que l'on aura

$$\gamma(t) = \text{constante},$$

et, par suite,

$$\mathrm{S} = \int_t^{t'} \mathrm{L}x\frac{d\Gamma(t)}{dt}\,dt,$$

comme dans la manière de voir de MM. Carnot et Clapeyron.

Cela pourra servir aussi à faire voir que, avec l'hypothèse $\Gamma(t) = \text{constante } \mathrm{G}$, on trouvera

$$\mathrm{S} = \mathrm{G}\int_0^s dq.$$

Mais le principal objet des formules (76) sera de faire trouver les deux intégrales définies

$$\int_0^s dq, \quad \int_0^s \Gamma(t)\,dq,$$

sous leurs formes algébriques les plus simples possibles, avec la facilité de pouvoir repasser à tout instant de ces formules simples à des formules explicites d'une plus grande complication.

Je suppose, par exemple, que l'on doive avoir

$$\frac{\mathrm{L}}{\gamma(t)} = \text{constante} = k;$$

alors on trouvera

$$(77)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{t'} dq = h(\gamma(t') - \gamma(t)),\\ &S = \int_0^{t'} \Gamma(t)\,dq = h(\Gamma(t')\gamma(t') - \Gamma(t)\gamma(t)), \end{aligned}\right.$$

mais ce ne sera qu'un exemple de calcul sans utilité réelle.

Je suppose, en second lieu, que l'on doive avoir

$$\frac{L}{\gamma(t)}x + H(t) = \text{constante} = u,$$

ou

$$\frac{L}{\gamma(t)}v = u - H(t);$$

alors l'aire S se trouvera délimitée par l'une des courbes $B'Bu$, $B'_1B_1u_1, \ldots$, et l'on trouvera, en place des formules (41) et (42),

$$(78)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{t'} dq = u(\gamma(t') - \gamma(t)) - \int_t^{t'} H(t)\gamma'(t)\,dt,\\ &S = \int_0^{t'} \Gamma(t)\,dq = u(\Gamma(t')\gamma(t') - \Gamma(t)\gamma(t))\\ &\qquad - \int_t^{t'} H(t)\frac{d}{dt}(\Gamma(t)\gamma(t))\,dt, \end{aligned}\right.$$

puis, en appliquant aux derniers termes des seconds membres le procédé des intégrations par parties, en ne perdant pas de vue que l'on devra avoir

$$\frac{dH(t)}{dt} = \frac{c'(t)}{\gamma(t)},$$

on sera conduit aux deux relations suivantes :

$$(78\ bis)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^{t'} dq = u(\gamma(t') - \gamma(t)) - (H(t')\gamma(t') - H(t)\gamma(t)) + c(t') - c(t),\\ &S = u(\Gamma(t')\gamma(t') - \Gamma(t)\gamma(t)) - (H(t')\Gamma(t')\gamma(t') - H(t)\Gamma(t)\gamma(t))\\ &\qquad + \int \Gamma(t)c'(t)\,dt, \end{aligned}\right.$$

et, dans le cas où l'on s'aviserait d'y faire

$$u = H(t') + u',$$

on retrouverait précisément les formules (41) et (42).

Quand, enfin, la valeur de u devra être telle que la dernière des courbes

$\psi(v, p) =$ constante u passe par l'un des points I, I′, on aura, par rapport au point I,

$$
79 \quad \left\{
\begin{aligned}
u &= H(t) + \frac{L}{\gamma(t)}, \\
\int_{t_0}^{t} dq &= -[H(t) - H(t_0)]\gamma(t') + \frac{L}{\gamma(t)}[\gamma(t') - \gamma(t)] + [c(t') - c(t)], \\
S &= -[H(t) - H(t_0)]\Gamma(t')\gamma(t') + \frac{L}{\gamma(t)}[\Gamma(t')\gamma(t') - \Gamma(t)\gamma(t)] \\
&\quad + \int \Gamma(t)c'(t)\,dt.
\end{aligned}
\right.
$$

et, par rapport au point I′,

$$
79\,bis \quad \left\{
\begin{aligned}
u &= H(t') - \frac{L'}{\gamma(t')}, \\
\int_{t_0}^{t} dq &= -[H(t) - H(t_0)]\gamma(t) - \frac{L'}{\gamma(t')}[\gamma(t') - \gamma(t)] + [c(t') - c(t)], \\
S &= -[H(t') - H(t_0)]\Gamma(t)\gamma(t) - \frac{L'}{\gamma(t')}[\Gamma(t')\gamma(t) - \Gamma(t)\gamma(t)] \\
&\quad + \int \Gamma(t)c'(t)\,dt.
\end{aligned}
\right.
$$

Les secondes des formules (79), (79 *bis*) serviront à remplacer les formules (40), et les dernières seront les expressions correspondantes des aires S.

Je ne m'arrêterai pas à déterminer les expressions correspondantes de l'aire triangulaire $bB'B$, qui représenterait le bénéfice de force motrice d'une machine à vapeur à détente complète par rapport à une machine sans détente.

Je me bornerai à faire remarquer que les groupes de formules (79) et (79 *bis*) ne seront pas applicables tous les deux, et que l'on devra prendre le groupe (79) ou le groupe (79 *bis*), selon que la quantité u ira en augmentant ou en diminuant avec t, le long de la courbe I_0II', c'est-à-dire selon que, dans le second membre de l'équation (61 *ter*), on aura

$$
80 \qquad \frac{\gamma(t)}{\gamma(t')} = -\frac{d}{dt}\left[\frac{L}{\gamma(t)}\right] > \text{ ou } < 0.
$$

Cela reviendra à dire que l'on devra employer celui des groupes (79) et (79 *bis*) qui fera trouver la moindre valeur pour S; car, quand on retranchera chacune des formules du groupe (79) de sa correspondante du groupe (79 *bis*), on trouvera les différences que voici :

$$
\text{pour } u \ldots \quad [H(t') - H(t)] - \left[\frac{L}{\gamma(t')} - \frac{L}{\gamma(t)}\right],
$$

$$
\text{pour } \int_{t_0}^{t} dq \ldots \quad [\gamma(t') - \gamma(t)]\{H(t_0) - H(t)\} - \left[\frac{L}{\gamma(t)} - \frac{L}{\gamma(t')}\right],
$$

$$
\text{pour } S \ldots \quad [\Gamma(t)\gamma(t') - \Gamma(t)\gamma(t)]\{H(t') - H(t)\} - \left[\frac{L'}{\gamma(t)} - \frac{L}{\gamma(t')}\right],
$$

en sorte que de I en I′, les intégrales définies

$$\int_0^s dq, \quad S = \int_0^s \Gamma(t)\,dq,$$

éprouveront des accroissements soit positifs, soit négatifs, qui seront égaux respectivement aux produits de l'accroissement de u par les facteurs

$$\gamma(t') - \gamma(t) = \int_t^{t'} \frac{d\gamma(t)}{dt}\,dt,$$

$$\Gamma(t')\gamma(t') - \Gamma(t)\gamma(t) = \int_t^{t'} \frac{d}{dt}[\Gamma(t)\gamma(t)]\,dt.$$

Je suppose d'ailleurs que, de t à t', la variable u aille toujours en augmentant ou toujours en diminuant, et alors il est bien clair que celle des aires S qui ne dépassera pas la courbe I_0II' correspondra au point I ou au point I′ sur la *fig.* 2, selon que le premier membre des formules (61 *ter*) ou (80) sera positif ou négatif.

Les formules (76) seront directement applicables à l'aire $ii'I'I$, quand on y fera $x = 1$, et, par conséquent, l'on aura tout à l'entour de l'aire $ii'I'I$, en place des formules (56) et (57),

$$(81)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^s dq = \int_t^{t'} \frac{L}{\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt, \\ \displaystyle S = \int_0^s \Gamma(t)\,dq - \int_t^{t'} \frac{L}{\gamma(t)}\frac{d}{dt}[\Gamma(t)\gamma(t)]\,dt, \end{cases}$$

puis, en intégrant par parties,

$$(81\ bis)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^s dq = [L' - L] - \int_t^{t'} \gamma(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\gamma(t)}\right)dt, \\ \displaystyle S = [\Gamma(t')L' - \Gamma(t)L] - \int_t^{t'} \Gamma(t)\gamma(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\gamma(t)}\right)dt. \end{cases}$$

D'autre part, si l'on convient de désigner par $C(t)$ une fonction de t qui soit telle, que la différentielle de cette fonction $C'(t)\,dt$ puisse représenter la quantité de chaleur dq le long de la courbe I_0II', il faudra que, d'après la formule (70), l'on ait

$$(82)\qquad C'(t) = c'(t) + \gamma(t)\frac{d}{dt}\left(\frac{L}{\gamma(t)}\right),$$

et, par suite, les formules (81 *bis*) se réduiront à

$$(81\ ter)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^s dq = [L' - L] + [c(t') - c(t)] - [C(t') - C(t)], \\ \displaystyle S = [\Gamma(t')L' - \Gamma(t)L] + \int_t^{t'} \Gamma(t)c'(t)\,dt - \int_t^{t'} \Gamma(t)C'(t)\,dt. \end{cases}$$

La seconde des formules (81 *ter*) sera une conséquence immédiate de la relation de principe $S = q'\Gamma(t') - q\Gamma(t)$, et la première des formules (81 *ter*) sera directement évidente sur la *fig.* 2, en ce que, de i en i', puis de là en I, il faudra une quantité de chaleur représentée par l'expression

$$[c(t') - c(t)] + L',$$

tandis que, de i en I, puis de là en I′, le long de la courbe $I_0 II'$, il faudra une quantité de chaleur représentée par l'expression

$$L - C(t') - c(t),$$

de telle sorte que, en soustrayant cette dernière expression de la précédente, on tombera justement sur le second membre de la première des formules (81 *ter*).

Ainsi donc, des deux groupes de formules (79) et (79 *bis*), on devra faire usage de celui dont l'aire S sera la plus petite, ou de celui dont l'aire S sera moindre que la valeur de S des formules (81 *ter*), et ce sera le groupe (79) ou le groupe (79 *bis*) qui se trouvera dans ce cas-là, selon que le premier membre de la formule (80) sera positif ou négatif, c'est-à-dire, en d'autres termes, quand la fonction $\gamma(t)$ sera positive, selon que la quantité $C'(t)$ de l'équation (82) sera positive ou négative.

La circonstance physique à laquelle cela correspondra est facile à assigner et pourra être énoncée comme il suit :

Une masse de vapeur saturée, que l'on fera diminuer de volume par compression, ne pourra rester à l'état de saturation qu'autant qu'on lui fournira de la chaleur quand $C'(t)$ sera positif, et qu'on lui ôtera de la chaleur quand $C'(t)$ sera négatif.

Donc, quand la compression se fera sans aucune addition ni soustraction de chaleur, il arrivera que, dans le premier cas, une partie de la vapeur existante passera à l'état liquide, et que, dans le second cas, toute la vapeur existante passera à l'état gazeux ou à l'état de vapeur surchauffée.

Le contraire arrivera dans l'un et l'autre cas quand le volume d'une masse de vapeur saturée augmentera au lieu de diminuer.

La mesure du phénomène se réduira d'ailleurs à avoir recours aux équations (68), (68 *bis*), (69), (69 *bis*), et à y faire $du = 0$, pour le cas d'une augmentation ou diminution du volume v du mélange dans une enveloppe non perméable à la chaleur, ce qui fera trouver généralement le long d'une courbe donnée $B'Bu$, d'après la formule (68 *bis*),

$$(83) \qquad L\,dv = \left\{ c'(t) - c(t) - t\frac{d}{dt}\left[\frac{L}{\gamma(t)}\right] \right\} dv.$$

Quand, ensuite, on fera $x = 1$, pour que la formule (83) devienne applicable à celle des courbes $\psi(v, p)$ qui partira du point I sur la *fig.* 2, on aura

$$(84) \qquad L\,dv = \left\{ c'(t) - c(t) - t\frac{d}{dt}\left[\frac{L}{\gamma(t)}\right] \right\} dv.$$

c'est-à-dire

$$(84\ bis)\qquad \mathrm{L}\,dx = -\,\mathrm{C}'(t)\,dt,$$

et il y aura précipitation ou surchauffe selon que la différentielle dx ressortira de la formule (84 *bis*) avec le signe — ou avec le signe +.

Toute valeur négative de dx sera la mesure de la quantité de vapeur qui se condensera par suite d'un changement de volume dans une enveloppe non perméable à la chaleur pendant que la température variera de t à $t + dt$, et la valeur négative correspondante du produit $\mathrm{L}dx$ sera la mesure de la quantité de chaleur latente qui deviendra libre et qui sera employée à porter la masse de vapeur restante $1 - dx$ à sa nouvelle température de saturation $t + dt$.

Par contre, toute valeur positive de dx sera un indice de surchauffe, et la valeur correspondante du produit $\mathrm{L}\,dx$ sera la mesure de la quantité de chaleur employée à produire l'état surchauffé de la masse entière à sa nouvelle température $t + dt$.

Quand on aura $\mathrm{C}'(t) = 0$, on trouvera en même temps $dx = 0$, le long de la courbe $\psi(v, p) =$ constante u partant du point I, et $du = 0$ le long de la courbe $\mathrm{I_0II'}$; par suite, la dernière des courbes ψ coïncidera avec la courbe $\mathrm{I_0II'}$, et les formules (79), (79 *bis*) se confondront avec les formules (81 *ter*).

Tout cela étant supposé compris, j'observe que l'on aura

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathrm{L}}{\gamma(t)}\right) = \frac{1}{\gamma(t)}\frac{d\mathrm{L}}{dt} - \frac{\mathrm{L}\gamma'(t)}{\gamma(t)^2},$$

et que, par suite, la formule (82), servant à définir la quantité $\mathrm{C}(t)$, se réduira à

$$(82\ bis)\qquad \mathrm{C}'(t) = c'(t) + \frac{d\mathrm{L}}{dt} - \mathrm{L}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)},$$

de telle sorte que, si les quantités L, $c(t)$, $\mathrm{C}(t)$ étaient connues, la formule (82 *bis*) pourrait servir à faire trouver la nature de la fonction $\gamma(t)$.

De la formule (82 *bis*) on conclura, en effet,

$$(82\ ter)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{c'(t) + \frac{d\mathrm{L}}{dt} - \mathrm{C}'(t)}{\mathrm{L}} \\ &\text{puis, en multipliant par } dt \text{ et en intégrant,} \\ &\log\gamma(t) = \int^{t} \frac{c'(t) + \frac{d\mathrm{L}}{dt} - \mathrm{C}'(t)}{\mathrm{L}}\,dt, \\ &\text{ou, ce qui reviendra au même,} \\ &\gamma(t) = e^{\int^{t} \frac{c'(t) + \frac{d\mathrm{L}}{dt} - \mathrm{C}'(t)}{\mathrm{L}}\,dt} \end{aligned}\right.$$

Cela ne changera rien à la forme algébrique des formules (81 *ter*); mais, dans le cas où l'expérience ferait trouver

$$c(t) + L - C(t) = \text{constante},$$

le second membre de la première des équations (81 *ter*) se réduirait à zéro.

On aurait en même temps

$$c'(t) + \frac{dL}{dt} - C'(t) = 0,$$

et, par suite, les formules (82 *ter*) feraient trouver

$$\gamma(t) = \text{constante},$$

à la manière de voir de MM. Carnot et Clapeyron.

Quoi qu'il en soit, je suppose que, à l'aide des formules (82 *ter*), on soit parvenu à déterminer la nature de la fonction $\gamma(t)$.

J'aurai recours ensuite à la seconde des formules (18), et j'y remplacerai la fonction $k(t)$ par sa valeur connue

$$k(t) = \Gamma(t)\gamma(t),$$

d'où

$$k'(t) = \frac{d}{dt}[\Gamma(t)\gamma(t)],$$

ce qui me fera trouver d'abord

$$\frac{\gamma(t)\Omega'(t)}{\frac{d}{dt}[\Gamma(t)\gamma(t)]} = \frac{L}{W - \omega},$$

et, en transposant,

$$(83) \qquad \frac{d}{dt}[\Gamma(t)\gamma(t)] = \frac{W - \omega}{L}\Omega'(t)\gamma(t),$$

puis, en multipliant par dt et en intégrant,

$$(83\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} & k(t) = \Gamma(t)\gamma(t) = \int \frac{W - \omega}{L}\Omega'(t)\gamma(t)\,dt, \\ & \text{d'où, enfin,} \\ & \Gamma(t) = \frac{1}{\gamma(t)}\int \frac{W - \omega}{L}\Omega'(t)\gamma(t)\,dt, \end{aligned} \right.$$

et ce sera le second membre de cette dernière formule qui devra être sinon une constante, du moins une même fonction de t pour tous les corps de la nature.

Si la fonction universelle $\Gamma(t)$ était connue, on se servirait de l'équation (83) d'une autre manière. On effectuerait la différentiation indiquée au premier membre et l'on

diviserait les deux membres par la fonction $\gamma(t)$, ce qui ferait avoir

$$(84)\quad \left\{\begin{aligned} &\Gamma(t)\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} + \Gamma'(t) = \frac{W - \omega}{L}\Omega'(t), \\ &\text{et, par conséquent,} \\ &\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} + \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)} = \frac{(W - \omega)\Omega'(t)}{\Gamma(t)L}, \end{aligned}\right.$$

puis, en y substituant la première des formules (82 *ter*) et en chassant le dénominateur $\Gamma(t)L$, on aurait la condition universelle

$$(85)\quad \Gamma(t)\left[c'(t) + \frac{dL}{dt} - C'(t)\right] + L\Gamma'(t) = (W - \omega)\Omega'(t).$$

On trouverait la même relation d'une autre manière si l'on remontait à la seconde des formules (81 *ter*), et si l'on y faisait d'abord

$$S = \int_t^{t'} (W - \omega)\,dp = \int_t^{t'} (W - \omega)\Omega'(t)\,dt,$$

puis

$$t' = t + dt$$

ce qui ferait trouver

$$(85\ bis)\quad (W - \omega)\Omega'(t) = \frac{d}{dt}[\Gamma(t)L] + \Gamma(t)c'(t) - \Gamma(t)C'(t),$$

de telle sorte que, en développant le premier terme du second membre et en transposant, on aurait précisément l'équation (85).

C'est là le plus haut degré de généralité que je puisse et doive donner à la théorie des effets dynamiques de la chaleur pour un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, sans faire aucune hypothèse, c'est-à-dire en ne m'appuyant que sur la relation fondamentale

$$(86)\quad S = q'\Gamma(t') - q\Gamma(t) - \int_t^{t'} \frac{d}{dt}[q\Gamma(t)]\,dt,$$

à laquelle j'ai été amené en me laissant aller au cours naturel des idées dans la voie de raisonnement qui a été ouverte ou inventée par Carnot.

Et comme j'ai démontré rigoureusement que, pour un mélange de liquide et de vapeur saturée de ce liquide, on devra avoir

$$(87)\quad dq = \gamma(t)\,du,$$

il en est résulté que la formule (86) s'est changée en

$$(88)\quad S = \int\int \frac{d}{dt}[\Gamma(t)\gamma(t)]\,dt\,du$$

de telle sorte que, par une simple comparaison de la formule (88) avec l'ancienne formule de MM. Carnot et Clapeyron, qui était

$$(89)\qquad S\int\int\frac{d\Gamma(t)}{dt}\,dt\,dq,$$

il me sera permis de dire que, dans la théorie exacte des vapeurs, ce seront, d'une part, la quantité u ou la constante arbitraire de mes formules, et, d'autre part, la fonction composée

$$k(t)=\Gamma(t)\,\gamma(t),$$

qui joueront exactement les mêmes rôles que ceux que MM. Carnot et Clapeyron voulaient faire jouer de prime abord à une quantité de chaleur q et à la fonction simple $\Gamma(t)$.

J'ai expliqué d'ailleurs, en deux et même en trois passages, que du moment où l'expérience ne vérifierait pas la relation $\gamma(t)=$ constante, on ne saurait guère se refuser à admettre l'hypothèse $\Gamma(t)=$ constante, afin qu'il n'y eût pas de perte de travail ou de force vive dans le phénomène de la transmission libre de la chaleur entre deux corps A, A′ à des températures différentes t, t'.

Toute quantité de chaleur deviendrait alors l'équivalent immédiat d'une certaine somme de travail ou de force vive, et, dans le cas où l'expérience ferait trouver des résultats différents, on serait conduit naturellement à penser que c'est la manière usitée de mesurer une quantité de chaleur qui est défectueuse.

Quoi qu'il en soit, avec l'hypothèse

$$(90)\qquad \Gamma(t)=\text{constante } G,$$

les formules (75) et (76), appliquées à une ligne fermée quelconque s, se réduiront à une seule en ce que l'on aura

$$(91)\qquad S=G\int_0^s dq=G\int_0^s\gamma(t)\,d\left(\frac{L}{\gamma(t)}-x\right)=-G\int_0^s\frac{Lx}{\gamma(t)}\gamma'(t)\,dt.$$

La formule (85) se réduira à

$$(92)\qquad G\left(c'(t)+\frac{dL}{dt}-c'(t)\right)=(W-w)\,\Omega'(t),$$

et les formules (82), (82 *bis*), (82 *ter*) ne changeront pas.

Après cet exposé général de toute ma théorie des vapeurs, il me reste à ajouter que la somme qui, dans les équations précédentes, est désignée par $c(t)+L$ est précisément celle que M. Regnault a représentée, pour de la vapeur d'eau, par la formule

$$(1)\qquad \lambda=606,5+0,305\,t=a+bt.$$

Donc, pour de la vapeur d'eau, en partant de la formule de M. Regnault, et en faisant

$$a = 606,5, \quad b = 0,305,$$

on aura

$$(1\ bis) \qquad \begin{cases} c(t) + L = a + bt, \\ c(t') + L' = a + bt', \end{cases}$$

et la première des formules (81 *ter*), c'est-à-dire l'expression de la quantité de chaleur anéantie tout à l'entour de la ligne ii' I' I sur la *fig.* 2 deviendra

$$(2) \qquad \int_0^s dq = b(t' - t) - [C(t') - C(t)]$$

On aura ensuite

$$c'(t) + \frac{dL}{dt} = b,$$

et la première des formules (82 *ter*) se réduira à

$$(3) \qquad \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{b - c'(t)}{L}.$$

Les formules (83), (83 *bis*), (84) ne changeront pas, et la condition (85) deviendra

$$(4) \qquad \Gamma(t)[b - C'(t)] + L\Gamma'(t) = (W - w)\Omega'(t).$$

Quand on supposera, en outre,

$$c(t) = t,$$

on trouvera

$$(5) \qquad L = \lambda - t = a - (1 - b)t,$$

et les formules (3), (4) prendront les formes un peu plus explicites

$$(3\ bis) \qquad \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{b - c'(t)}{a - (1 - b)t},$$

$$(4\ bis) \qquad \Gamma(t)[b - C'(t)] + [a - (1 - b)t]\Gamma'(t) = (W - w)\Omega'(t),$$

ou, ce qui reviendra au même, de la formule (3 *bis*) on conclura

$$\gamma(t) = e^{\int \frac{b - C'(t)}{a - (1 - b)t}},$$

et, au moyen de cette valeur de $\gamma(t)$, on trouvera, d'après les formules (83 *bis*),

$$(6) \qquad \Gamma(t) = \frac{1}{\gamma(t)} \int \frac{(W - w)\Omega'(t)}{a - (1 - b)t} \gamma(t)\, dt.$$

Mais cela ne suffira pas pour trouver la fonction $\gamma(t)$ tant qu'on ne connaîtra pas

la fonction $C(t)$, ni pour trouver la fonction $\Gamma(t)$ tant qu'on ne connaîtra pas la fonction $\Omega'(t)$ et l'expression de la différence $W - w$ en t.

L'unité calorifique étant la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 degré centigrade la température de 1 kilogramme d'eau, la différence $W - w$ sera l'augmentation de volume de 1 kilogramme d'eau transformé en vapeur.

Le mètre cube étant pris pour unité de volume, on aura, à très-peu près, pour la valeur de la différence $W - w$ à la température de 100 degrés,

$$1,695;$$

mais on n'est pas encore bien fixé sur la loi d'après laquelle la différence $W - w$ varie avec t.

La fonction $\Omega'(t)$ est celle que l'on connaît le mieux : c'est la dérivée par rapport à t de l'équation

$$p = \Omega(t).$$

En langage interprétatif ordinaire, on peut dire que la quantité $\Omega'(t)$ est l'accroissement de la pression p pour une augmentation de température de 1 degré.

Dans les Tables de M. Regnault, tome XXI des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, la pression p est mesurée par la hauteur d'une colonne de mercure évaluée en millimètres, en sorte que le nombre 760 y représente la pression de 1 atmosphère.

Mais quand on voudra prendre pour unité de travail le poids de 1 kilogramme élevé à 1 mètre de hauteur et que le volume v d'un fluide élastique sera exprimé en mètres cubes, il faudra que la pression p du fluide élastique soit représentée par le poids d'un nombre équivalent de kilogrammes sur 1 mètre carré de surface pour que la valeur numérique du produit vp représente des kilogrammètres.

D'autre part, le poids d'une colonne de mercure de 760 millimètres de hauteur sur 1 mètre carré de surface est de 10333 kilogrammes.

Donc, avec l'emploi du kilogrammètre comme unité de travail, et avec le mètre cube comme unité de volume, toutes les pressions ou tensions des Tables de M. Regnault devront être multipliées par le nombre

$$\frac{10333}{760} = 13,596.$$

Ainsi, par exemple, à la température de 100 degrés on trouvera en millimètres de mercure

$$\Omega'(t) = 27,15,$$

et, par suite, on aura pour la valeur absolue correspondante de $\Omega'(t)$, en kilogrammes par mètre carré,

$$27,15 \times 13,596 = 369,131.$$

La valeur de $W - w$ à 100 degrés étant de 1,695 mètres cubes, on trouvera pour la

valeur absolue du produit $(W - \varpi)\,\Omega'(t)$ en kilogrammètres,

$$1,695 \times 369,131 = 625,677.$$

Cela ne permettra pas de faire usage de l'équation (6), mais l'équation (4 *bis*) deviendra, à la température de 100 degrés,

$$(4\ ter)\qquad \Gamma(100)\,[0,305 - C'(100)] = 537\,\Gamma'(100) = 625,677.$$

On ne saurait aller plus avant sans connaître la fonction $C(t)$ en ce qui concerne la détermination de la fonction $\gamma(t)$ par la formule (3 *bis*), et, pareillement, sans connaître la loi de $W - \varpi$ en t dans la formule (4 *bis*) ou dans la formule (6).

Cela posé, MM. Carnot et Clapeyron érigeraient en principe la relation

$$\gamma(t) = \text{constante},$$

et, par suite, d'après les formules (3), (3 *bis*), il leur faudrait supposer

$$C'(t) = 0,305,$$

c'est-à-dire

$$(7)\qquad C(t) = 0,305\,t + \text{constante}.$$

De la formule (2) ils concluraient

$$\int_0^s dq = 0$$

tout à l'entour de la courbe ii' I'I, et la formule (4 *bis*) leur ferait trouver généralement

$$(8)\qquad \Gamma'(t) = \frac{(W - \varpi)\,\Omega'(t)}{a - (1 - b)\,t} = \frac{(W - \varpi)\,\Omega'(t)}{666,5 - 0,695\,t};$$

par suite, ils auraient, à la température de 100 degrés, d'après la formule (4 *ter*),

$$(8\ bis)\qquad \Gamma'(100) = \frac{625,677}{537} = 1,165.$$

MM. Regnault, Joule, etc., admettent, au contraire, que l'on devra avoir

$$\Gamma(t) = \text{constante } G,$$

et, par suite,

$$\Gamma'(t) = 0,$$

ce qui réduira les formules (4) et (4 *bis*) à

$$(4\ quater)\qquad G\,[b - C'(t)] = (W - \varpi)\,\Omega'(t).$$

Ainsi la différence $W - \varpi$ devra varier en raison directe de la différence $b - C'(t)$ et en raison inverse de $\Omega'(t)$.

Il faudra que l'on ait

$$C'(t) < b,$$

et le second membre de la formule (2) ne se réduira plus à zéro.

On admet communément que l'expérience doit vérifier la relation

$$C'(t) = 0,$$

mais les consequences que l'on trouvera dans ce cas-là rentreront dans le cas plus general où l'on supposera

$$(9) \quad \begin{cases} C'(t) = \text{constante} = \beta, \\ \text{et, par suite,} \\ C(t) = \beta t + \text{constante} \end{cases}$$

De la formule (2) on conclura alors

$$(10) \quad \int_{t_0}^{t'} dq = (b - \beta)(t' - t)$$

pour la quantité de chaleur anéantie tout à l'entour de l'aire ii' I' I sur la *fig.* 2.

La formule (3 *bis*) deviendra

$$(3\ ter) \quad \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)} = \frac{b - \beta}{a - (1 - b)t},$$

et, par voie d'intégration, on en conclura

$$\log \gamma(t) = -\frac{b - \beta}{1 - b} \log[a - (1 - b)t] + \log \text{constante},$$

c'est-à-dire

$$(3\ quater) \quad \gamma(t) = \frac{\text{constante}}{[a - (1 - b)t]^{\frac{b - \beta}{1 - b}}}.$$

Les formules (4 *ter*), (4 *quater*) feront trouver, à la température de 100 degrés,

$$G(b - \beta) = 625,677,$$

d'où

$$(11) \quad G = \frac{625,677}{b - \beta}.$$

Ainsi, la constante G sera inversement proportionnelle à la différence constante $b - \beta$, et, quelque valeur que l'on veuille attribuer à cette différence, cela ne changera rien à la nature de la courbe $I_0 I I'$ sur la *fig.* 1, puisque, d'après l'équation (4 *quater*), on devra avoir tout le long de cette courbe

$$(W - \omega\ \Omega'(t)) = \text{constante},$$

et, à la temperature de 100 degrés,

$$W - \omega = 1,695,$$
$$\Omega'(t) = 27,15 \times 13,596 = 369,131.$$

L'aire $ii'II'$ de la *fig.* 2 sera égale au produit de la constante G par le second membre de la formule (10), et comme la constante G dépendra de l'équation (11), on aura

$$G(b - \beta)(t' - t) = 625,677(t' - t). \tag{12}$$

Ainsi, par exemple, dans une machine à vapeur théoriquement parfaite à détente complète, où l'on aura

$$t' = 100^\circ, \quad t = 50,$$

et où, pour chaque kilogramme de vapeur dépensée, la chaudière aura à fournir une quantité de chaleur égale à

$$(100 - 50) + 537 = 587,$$

la quantité de chaleur anéantie qui ne paraîtra pas dans le condenseur sera égale à

$$(b - \beta) \times 50 = (0,305 - \beta) \times 50. \tag{13}$$

Le maximum de travail théoriquement possible avec une telle perte de chaleur sera

$$G(b - \beta) \times 50 = 625,677 \times 50 = 31284. \tag{14}$$

Dans une machine sans détente, entre les mêmes limites de température $t' = 100$, $t = 50$, on utilisera une quantité de travail égale au produit $(W - \omega)(p' - p)$, et, d'après les Tables de M. Regnault, la différence $p' - p$ serait mesurée par une colonne de 668 millimètres de mercure; par suite, on utiliserait une quantité de travail égale au produit

$$1,695 \times 668 \times 13,596 = 15394, \tag{15}$$

c'est-à-dire, en nombre rond, la moitié seulement de ce que l'on obtiendrait dans une machine à détente complète. Par conséquent, la quantité de chaleur détruite qui ne reparaîtrait pas dans le condenseur serait aussi, en nombre rond, la moitié du second membre de la formule (13).

Ainsi, du moment où l'on supposera

$$C'(t) = \text{constante } \beta,$$

rien ne changera dans les seconds membres des formules (14) et (15); ce seront les quantités

$$G, \quad \int_0^{t'} dq \quad \text{et la fonction } \gamma(t)$$

seulement qui prendront d'autres valeurs.

Quand on fera

$$(16)\quad \left\{\begin{array}{l} \beta = b = 0{,}305, \\ \text{on trouvera} \\ G = \infty, \quad \int_{t'}^{t} dq = 0, \quad \Gamma(t) = \text{constante}, \end{array}\right.$$

et l'on retombera sur la manière de voir de MM. Carnot et Clapeyron.

Quand on fera

$$(17)\quad \left\{\begin{array}{l} \beta = 0, \\ \text{on trouvera} \\ G = \dfrac{625{,}77}{0{,}305} = 2052, \end{array}\right.$$

et le second membre de la formule (13), c'est-à-dire la quantité de chaleur anéantie dans une machine à détente complète pour

$$t' = 100 \quad \text{et} \quad t = 50,$$

sera

$$0{,}305 \times 50 = 15{,}25.$$

Dans la machine correspondante sans détente, on trouvera la moitié environ, ou 7,5.

La formule (15 *quater*) deviendra, dans ce cas-là,

$$(18)\quad \gamma(t) = \frac{\text{constante}}{606{,}5 - 0{,}695\, t^{\frac{0{,}305}{0{,}695}}}$$

et, quand on y fera respectivement

$$t = 50, \quad t = 100,$$

on trouvera

$$\gamma(50) = \frac{\text{constante}}{16{,}22},$$

$$\gamma(100) = \frac{\text{constante}}{15{,}78}.$$

Ainsi la fonction $\gamma(t)$ augmentera très-lentement avec t, et dans la proportion de 158 à 162 seulement depuis $t = 50$ jusqu'à $t = 100$.

M. Joule admet que l'on doit avoir

$$\Gamma(t) = \text{constante } G;$$

mais il assigne à la constante G une valeur à peu près cinq fois plus petite que le nombre trouvé 2052.

Selon M. Joule, la quantité de chaleur nécessaire pour augmenter de 1 degré Farenheit la température d'une livre d'eau, a pour équivalent mécanique une quantité de force motrice égale à celle d'un poids de 772 livres élevé à la hauteur d'un pied.

Cela revient à dire que la quantité de chaleur nécessaire pour augmenter de $\frac{100}{180}$ degrés centigrades la température d'un kilogramme d'eau, a pour équivalent mécanique une quantité de force motrice égale à celle d'un poids de 772 kilogrammes élevé à la hauteur de $0^m,3048$, et de là on conclut que l'unité de chaleur précédemment employée doit avoir pour équivalent mécanique un nombre de kilogrammètres représentés par le nombre

$$772 \cdot 0,3048 \cdot \frac{180}{100} = 424.$$

Pour que la formule (11) donnât cette valeur, il faudrait que l'on eût

$$b - \beta = \frac{625,77}{424} = 1,476,$$

et, par conséquent,

$$\beta = b - 1,476 = 0,305 - 1,476 = -1,171,$$

$$\varphi(t) = -1,171\,t + \text{constante}.$$

Le second membre de la formule (13), c'est-à-dire la quantité de chaleur anéantie dans une machine théoriquement parfaite, à détente complète, serait

$$1,476 \times 50 = 73,8.$$

Dans la machine sans détente, ce ne serait que la moitié environ, ou

$$\frac{15394}{424} = 36,3$$

(pour une dépense de 587 unités de chaleur par la chaudière dans l'un et l'autre cas).

La formule (3 *quater*) deviendrait

$$\gamma(t) = \frac{\text{constante}}{(606,5 - 0,695\,t)^{\frac{1,476}{0,695}}},$$

et, en y faisant respectivement

$$t = 50, \quad t = 100,$$

on trouverait

$$\gamma(50) = \frac{\text{constante}}{717100},$$

$$\gamma(100) = \frac{\text{constante}}{627700}.$$

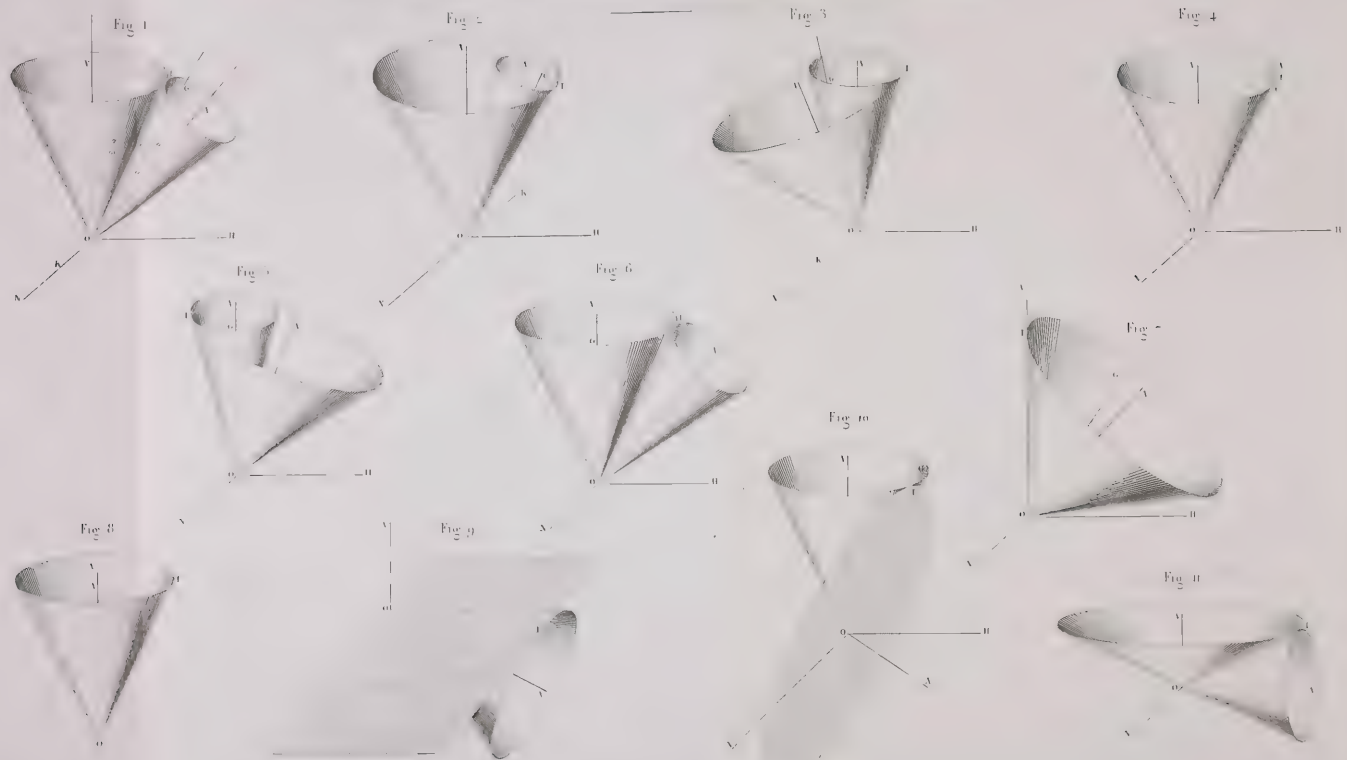
Ainsi, la fonction $\gamma(t)$ augmenterait dans la proportion de 63 à 72, de $t = 50$ à $t = 100$.

Là se termine le rôle que je m'étais proposé de remplir, celui d'exposer une théorie complète des effets dynamiques de la chaleur par des formules explicitement développées qui permettront de soumettre au calcul telles hypothèses que l'on voudra sur les chaleurs spécifiques et sur les chaleurs latentes des gaz et des vapeurs en même temps que sur l'utilité dynamique de ces fluides élastiques dans la théorie générale des machines à vapeur.

Je réserverai pour une autre fois l'application de ces formules à la théorie du thermomètre, qui faisait partie encore du Mémoire que j'ai présenté à l'Institut dans la séance du 24 novembre 1851.

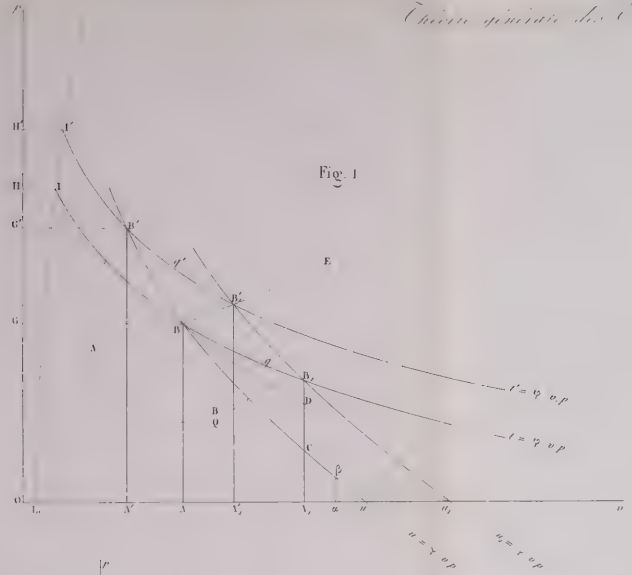
FIN DU DIX-HUITIÈME VOLUME.

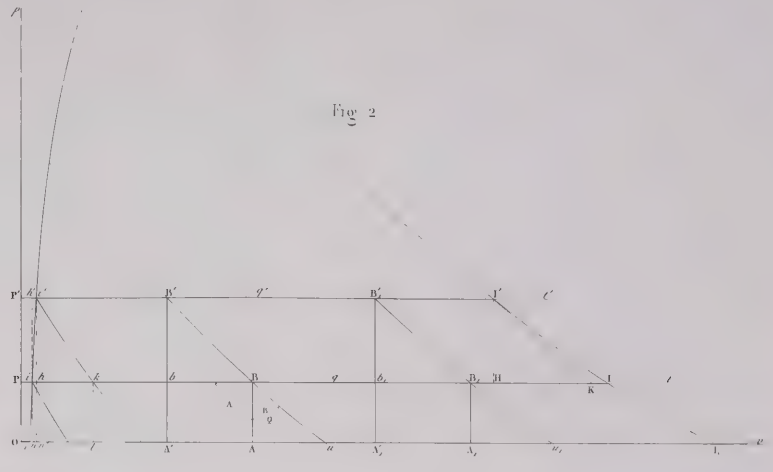
Courbes des lignes curvilignes, décrites par le point d'appui

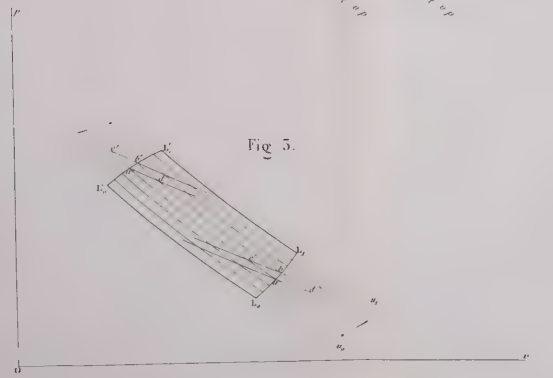


Isabelle, éditeur.

Théorie générale des Effets dynamiques de la Chaleur ; par M. A. Grüna







Lacour imp. de Nouvel de Paris

Mallet-Bachelier éditeur

QA
1
J684
t.18
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY